Verteilungsfreie Toleranzgrenzen*

(Die *kursiven* Werte sind approximiert)

Die Tafel gibt den zu wählenden minimalen Stichprobenumfang N, bei dem mit einer Vertrauenswahrscheinlichkeit von β_t anzunehmen ist, daß 100 β_p% der Bevölkerung

($x = 0$) entweder über dem kleinsten oder unter dem größten Wert der Stichprobe liegen;

($x = 1$) zwischen dem kleinsten und dem größten Wert der Stichprobe liegen;

($x = 2$) zwischen dem zweitkleinsten und dem zweitgrößten Wert der Stichprobe liegen usw.

Beispiel: Wie groß muß eine Stichprobe gewählt werden, damit mit einer Vertrauenswahrscheinlichkeit von $\beta_t = 0{,}99$ 100 $\beta_p = 95\%$ der Bevölkerung

a) entweder über dem kleinsten oder unter dem größten Wert der Stichprobe liegen? Bei $x = 0$ findet man $N = 90$;

b) zwischen dem fünftkleinsten und dem fünftgrößten Wert der Stichprobe liegen? Bei $x = 5$ findet man $N = 371$.

$\beta_t = 0{,}999$

β_p 0,999	0,990	0,950	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30
x									
0 6 905	688	135	66	31	20	14	10	8	6
1 9 230	919	181	88	42	27	19	14	11	9
2 13 058	1301	256	126	60	38	27	21	16	13
3 16 450	1640	324	159	77	49	35	27	21	17
4 19 620	1957	387	190	92	59	43	33	26	21
5 22 651	2260	447	220	107	69	50	38	30	25
6 25 583	2552	505	249	121	78	57	44	35	28
7	2838	562	277	135	87	63	49	39	32
8	*3116*	617	305	148	96	70	54	43	35
9	*3390*	672	332	162	105	76	59	47	39
10	*3661*	*725*	359	175	113	83	64	51	42

$\beta_t = 0{,}990$

0 4 603	459	90	44	21	13	10	7	6	4
1 6 636	661	130	64	31	20	14	10	8	6
2 10 042	1001	197	97	46	30	21	16	13	10
3 13 105	1307	259	128	62	40	29	22	18	14
4 15 996	1596	316	156	76	49	36	28	22	18
5 18 779	1874	371	184	90	58	42	33	26	21
6 21 486	2145	425	210	103	67	49	38	30	25
7	2409	478	237	116	75	55	43	34	28
8	*2668*	530	262	128	83	61	47	38	31
9	*2924*	581	288	141	92	67	52	42	35
10	*3178*	*630*	313	153	100	73	57	46	38

$\beta_t = 0{,}980$

0 3 911	390	77	38	18	11	8	6	5	4
1 5 832	581	115	56	27	17	12	9	7	6
2 9 081	906	179	88	43	27	19	15	12	9
3 12 024	1200	238	117	57	37	27	21	16	13
4 14 813	1478	293	145	71	46	34	26	21	17
5 17 506	1747	347	172	84	55	40	31	25	20
6 20 131	2010	399	198	97	63	46	36	29	24
7	2267	450	223	109	71	52	40	33	27
8		501	248	122	79	58	45	37	30
9		551	273	134	87	64	50	40	33
10			297	146	95	70	55	44	37

$\beta_t = 0{,}950$

0 2 995	299	59	29	14	9	6	5	4	3
1 4 742	473	93	45	22	14	10	7	6	5
2 7 751	773	153	75	36	23	17	13	10	8
3 10 511	1049	208	103	50	33	24	18	15	12
4 13 146	1313	261	129	63	41	30	24	19	16
5 15 703	1568	312	154	76	50	36	28	23	19
6 18 205	1818	362	179	88	58	42	33	27	22
7	2064	410	204	100	65	48	38	30	25
8	*2305*	459	228	112	73	54	42	34	28
9	*2545*	507	252	124	81	60	47	38	32
10	*2783*	*553*	275	135	89	65	51	42	35

$\beta_t = 0{,}900$

0 2 302	230	45	22	11	7	5	4	3	2
1 3 889	388	77	38	18	12	8	6	5	4
2 6 679	666	132	65	32	20	14	11	9	7
3 9 273	926	184	91	45	29	21	17	13	11
4 11 770	1176	234	116	57	38	28	21	17	14
5 14 204	1419	283	140	69	45	33	26	21	18
6 16 596	1658	330	164	81	53	39	31	25	21
7	1894	377	188	92	61	45	35	29	24
8	*2126*	424	211	104	68	50	40	32	27
9	*2347*	470	234	115	76	56	44	36	30
10	*2586*	*514*	256	127	83	61	48	40	33

Wilcoxon-Test[1] für Paar-Differenzen

n = Anzahl der Paare. Erläuterungen siehe Textteil

n	$2\alpha \leqq 0{,}10$	$2\alpha \leqq 0{,}05$	$2\alpha \leqq 0{,}02$	$2\alpha \leqq 0{,}01$
5	0– 15	–	–	–
6	2– 19	0– 21	–	–
7	3– 25	2– 26	0– 28	–
8	5– 31	3– 33	1– 35	0– 36
9	8– 37	5– 40	3– 42	1– 44
10	10– 45	8– 47	5– 50	3– 52
11	13– 53	10– 56	7– 59	5– 61
12	17– 61	13– 65	9– 69	7– 71
13	21– 70	17– 74	12– 79	9– 82
14	25– 80	21– 84	15– 90	12– 93
15	30– 90	25– 95	19–101	15–105
16	35–101	29–107	23–113	19–117
17	41–112	34–119	28–125	23–130
18	47–124	40–131	32–139	27–144
19	53–137	46–144	37–153	32–158
20	60–150	52–158	43–167	37–173
21	67–164	58–173	49–182	42–189
22	75–178	66–187	55–198	48–205
23	83–193	73–203	62–214	54–222
24	91–209	81–219	69–231	61–239
25	100–225	89–236	76–249	68–257

Poisson-Verteilung

Signifikanzschranken* für x bei gegebenem λ

λ	$2\alpha \leqq 0{,}05$	$2\alpha \leqq 0{,}01$	λ	$2\alpha \leqq 0{,}05$	$2\alpha \leqq 0{,}01$
0	–	–	**50**	36– 65	32– 70
1	•– 4	•– 5	51	36– 66	33– 71
2	•– 6	•– 7	52	37– 68	33– 72
3	•– 8	•– 9	53	38– 69	34– 74
4	0– 9	•–11	54	39– 70	35– 75
5	0–11	•–13	**55**	40– 71	36– 76
6	1–12	0–14	56	41– 72	37– 77
7	1–14	0–16	57	42– 73	38– 78
8	2–15	1–17	58	43– 74	38– 80
9	3–16	1–19	59	43– 76	39– 81
10	3–18	2–20	**60**	44– 77	40– 82
11	4–19	3–21	61	45– 78	41– 83
12	5–20	3–23	62	46– 79	42– 84
13	5–21	4–24	63	47– 80	43– 85
14	6–23	4–25	64	48– 81	43– 86
15	7–24	5–27	**65**	49– 82	44– 88
16	8–25	6–28	66	50– 83	45– 89
17	8–27	6–29	67	50– 84	46– 90
18	9–28	7–31	68	51– 86	47– 91
19	10–29	8–32	69	52– 87	48– 92
20	11–30	9–33	**70**	53– 88	48– 93
21	12–31	9–35	71	54– 89	49– 95
22	12–33	10–36	72	55– 90	50– 96
23	13–34	11–37	73	56– 91	51– 97
24	14–35	11–39	74	57– 92	52– 98
25	15–36	12–40	**75**	58– 93	53– 99
26	16–37	13–41	76	58– 95	54–101
27	16–39	14–42	77	59– 96	54–102
28	17–40	14–44	78	60– 97	55–103
29	18–41	15–45	79	61– 98	56–104
30	19–42	16–46	**80**	62– 99	57–105
31	20–43	17–47	81	63–100	58–106
32	20–45	17–48	82	64–101	59–107
33	21–46	18–50	83	65–102	60–109
34	22–47	19–51	84	66–103	60–110
35	23–48	20–52	**85**	66–105	61–111
36	24–49	21–53	86	67–106	62–112
37	25–50	21–55	87	68–107	63–113
38	25–52	22–56	88	69–108	64–114
39	26–53	23–57	89	70–109	65–115
40	27–54	24–58	**90**	71–110	66–117
41	28–55	24–59	91	72–111	66–118
42	29–56	25–61	92	73–112	67–119
43	30–57	26–62	93	74–113	68–120
44	30–58	27–63	94	74–114	69–121
45	31–60	28–64	**95**	75–116	70–122
46	32–61	29–65	96	76–117	71–123
47	33–62	29–67	97	77–118	72–125
48	34–63	30–68	98	78–119	72–126
49	35–64	31–69	99	79–120	73–127
50	36–65	32–70	**100**	80–121	74–128

* Nachdruck nur mit Erlaubnis des Herausgebers.

1) Werte (nach außen gerundet) nach TUKEY, J. W., *Memorandum Report 17*, Statistical Research Group, Princeton University (1949). Nachdruck mit Erlaubnis des Autors.

Erläuterungen siehe rechts unten

Das Fehlen einer signifikanten Schranke auf einer Seite ist durch einen Punkt (•), auf beiden Seiten durch einen isolierten Strich gekennzeichnet

$N_1 = N_2 = \frac{1}{2}N \leqq 100$

$\frac{1}{2}N$	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
4	2– 8	–	–	–
5	3– 9	2– 10	2– 10	–
6	3– 11	3– 11	2– 12	2– 12
7	4– 12	3– 13	3– 13	3– 13
8	5– 13	4– 14	4– 14	3– 15
9	6– 14	5– 15	4– 16	4– 16
10	6– 16	6– 16	5– 17	5– 17
11	7– 17	7– 17	6– 18	5– 19
12	8– 18	7– 19	7– 19	6– 20
13	9– 19	8– 20	7– 21	7– 21
14	10– 20	9– 21	8– 22	7– 23
15	11– 21	10– 22	9– 23	8– 24
16	11– 23	11– 23	10– 24	9– 25
17	12– 24	11– 25	10– 26	10– 26
18	13– 25	12– 26	11– 27	11– 27
19	14– 26	13– 27	12– 28	11– 29
20	15– 27	14– 28	13– 29	12– 30
21	16– 28	15– 29	14– 30	13– 31
22	17– 29	16– 30	14– 32	14– 32
23	17– 31	16– 32	15– 33	14– 34
24	18– 32	17– 33	16– 34	15– 35
25	19– 33	18– 34	17– 35	16– 36
26	20– 34	19– 35	18– 36	17– 37
27	21– 35	20– 36	19– 37	18– 38
28	22– 36	21– 37	19– 39	18– 40
29	23– 37	22– 38	20– 40	19– 41
30	24– 38	22– 40	21– 41	20– 42
31	25– 39	23– 41	22– 42	21– 43
32	25– 41	24– 42	23– 43	22– 44
33	26– 42	25– 43	24– 44	23– 45
34	27– 43	26– 44	24– 46	23– 47
35	28– 44	27– 45	25– 47	24– 48
36	29– 45	28– 46	26– 48	25– 49
37	30– 46	29– 47	27– 49	26– 50
38	31– 47	30– 48	28– 50	27– 51
39	32– 48	30– 50	29– 51	28– 52
40	33– 49	31– 51	30– 52	29– 53
41	34– 50	32– 52	31– 53	29– 55
42	35– 51	33– 53	31– 54	30– 56
43	35– 53	34– 54	32– 56	31– 57
44	36– 54	35– 55	33– 57	32– 58
45	37– 55	36– 56	34– 58	33– 59
46	38– 56	37– 57	35– 59	34– 60
47	39– 57	38– 58	36– 60	35– 61
48	40– 58	38– 60	37– 61	36– 63
49	41– 59	39– 61	38– 62	36– 64
50	42– 60	40– 62	38– 64	37– 65
51	43– 61	41– 63	39– 65	38– 66
52	44– 62	42– 64	40– 66	39– 67
53	45– 63	43– 65	41– 67	40– 68
54	45– 65	44– 66	42– 68	41– 69
55	46– 66	45– 67	43– 69	42– 70
56	47– 67	46– 68	44– 70	42– 72
57	48– 68	47– 69	45– 71	43– 73
58	49– 69	47– 71	46– 72	44– 74
59	50– 70	48– 72	46– 74	45– 75
60	51– 71	49– 73	47– 75	46– 76
61	52– 72	50– 74	48– 76	47– 77
62	53– 73	51– 75	49– 77	48– 78
63	54– 74	52– 76	50– 78	49– 79
64	55– 75	53– 77	51– 79	49– 81
65	56– 76	54– 78	52– 80	50– 82
66	57– 77	55– 79	53– 81	51– 83
67	58– 78	56– 80	54– 82	52– 84
68	58– 80	57– 81	54– 84	53– 85
69	59– 81	58– 82	55– 85	54– 86
70	60– 82	58– 84	56– 86	55– 87
71	61– 83	59– 85	57– 87	56– 88
72	62– 84	60– 86	58– 88	57– 89
73	63– 85	61– 87	59– 89	57– 91
74	64– 86	62– 88	60– 90	58– 92
75	65– 87	63– 89	61– 91	59– 93
76	66– 88	64– 90	62– 92	60– 94
77	67– 89	65– 91	63– 93	61– 95
78	68– 90	66– 92	64– 94	62– 96
79	69– 91	67– 93	64– 96	63– 97
80	70– 92	68– 94	65– 97	64– 98
81	71– 93	69– 95	66– 98	65– 99
82	71– 95	69– 97	67– 99	66–100
83	72– 96	70– 98	68–100	66–102
84	73– 97	71– 99	69–101	67–103
85	74– 98	72–100	70–102	68–104
86	75– 99	73–101	71–103	69–105
87	76–100	74–102	72–104	70–106
88	77–101	75–103	73–105	71–107
89	78–102	76–104	74–106	72–108
90	79–103	77–105	74–108	73–109
91	80–104	78–106	75–109	74–110
92	81–105	79–107	76–110	75–111
93	82–106	80–108	77–111	75–113
94	83–107	81–109	78–112	76–114
95	84–108	82–110	79–113	77–115
96	85–109	82–112	80–114	78–116
97	86–110	83–113	81–115	79–117
98	87–111	84–114	82–116	80–118
99	87–113	85–115	83–117	81–119
100	88–114	86–116	84–118	82–120

$N_1 < N_2$, $N_2 \leqq 20$

$N_1 = 2$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
2	–	–	–	–
3	–	–	–	–
4	–	–	–	–
5	–	–	–	–
6	–	–	–	–
7	–	–	–	–
8	2– •	–	–	–
9	2– •	–	–	–
10	2– •	–	–	–
11	2– •	–	–	–
12	2– •	2– •	–	–
13	2– •	2– •	–	–
14	2– •	2– •	–	–
15	2– •	2– •	–	–
16	2– •	2– •	–	–
17	2– •	2– •	–	–
18	2– •	2– •	–	–
19	2– •	2– •	2– •	–
20	2– •	2– •	2– •	–

$N_1 = 3$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
3	–	–	–	–
4	•– 7	–	–	–
5	2– •	–	–	–
6	2– •	2– •	–	–
7	2– •	2– •	–	–
8	2– •	2– •	–	–
9	2– •	2– •	2– •	–
10	3– •	2– •	2– •	–
11	3– •	2– •	2– •	–
12	3– •	2– •	2– •	2– •
13	3– •	2– •	2– •	2– •
14	3– •	2– •	2– •	2– •
15	3– •	3– •	2– •	2– •
16	3– •	3– •	2– •	2– •
17	3– •	3– •	2– •	2– •
18	3– •	3– •	2– •	2– •
19	3– •	3– •	2– •	2– •
20	3– •	3– •	2– •	2– •

$N_1 = 4$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
4	2– 8	–	–	–
5	2– 9	2– 9	•– 9	–
6	3– 9	2– 9	2– •	–
7	3– 9	2– •	2– •	–
8	3– •	3– •	2– •	2– •
9	3– •	3– •	2– •	2– •
10	3– •	3– •	2– •	2– •
11	3– •	3– •	2– •	2– •
12	4– •	3– •	3– •	2– •
13	4– •	3– •	3– •	2– •
14	4– •	3– •	3– •	2– •
15	4– •	3– •	3– •	3– •
16	4– •	4– •	3– •	3– •
17	4– •	4– •	3– •	3– •
18	4– •	4– •	3– •	3– •
19	4– •	4– •	3– •	3– •
20	4– •	4– •	3– •	3– •

$N_1 = 5$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
5	3– 9	2–10	2–10	–
6	3–10	3–10	2–11	2– •
7	3–10	3–11	2–11	2–11
8	3–11	3–11	2– •	2– •
9	4–11	3– •	3– •	2– •
10	4–11	3– •	3– •	3– •
11	4– •	4– •	3– •	3– •
12	4– •	4– •	3– •	3– •
13	4– •	4– •	3– •	3– •
14	5– •	4– •	3– •	3– •
15	5– •	4– •	4– •	3– •
16	5– •	4– •	4– •	3– •
17	5– •	4– •	4– •	3– •
18	5– •	5– •	4– •	4– •
19	5– •	5– •	4– •	4– •
20	5– •	5– •	4– •	4– •

$N_1 = 6$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
6	3–11	3–11	2–12	2–12
7	4–11	3–12	3–12	2–13
8	4–12	3–12	3–13	3–13
9	4–12	4–13	3–13	3– •
10	5–12	4–13	3– •	3– •
11	5–13	4–13	4– •	3– •
12	5–13	4–13	4– •	3– •
13	5–13	5– •	4– •	3– •
14	5–13	5– •	4– •	4– •
15	6– •	5– •	4– •	4– •
16	6– •	5– •	4– •	4– •
17	6– •	5– •	5– •	4– •
18	6– •	5– •	5– •	4– •
19	6– •	6– •	5– •	4– •
20	6– •	6– •	5– •	4– •

$N_1 = 7$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
7	4–12	3–13	3–13	3–13
8	4–13	4–13	3–14	3–14
9	5–13	4–14	4–14	3–15
10	5–13	5–14	4–15	3–15
11	5–14	5–14	4–15	4–15
12	6–14	5–14	4–15	4– •
13	6–14	5–15	5– •	4– •
14	6–14	5–15	5– •	4– •
15	6–15	6–15	5– •	4– •
16	6–15	6– •	5– •	5– •
17	7–15	6– •	5– •	5– •
18	7–15	6– •	5– •	5– •
19	7–15	6– •	6– •	5– •
20	7–15	6– •	6– •	5– •

$N_1 = 8$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
8	5–13	4–14	4–14	3–15
9	5–14	5–14	4–15	3–15
10	6–14	5–15	4–15	4–16
11	6–15	5–15	5–16	4–16
12	6–15	6–16	5–16	4–17
13	6–15	6–16	5–17	5–17
14	7–16	6–16	5–17	5–17
15	7–16	6–16	5–17	5– •
16	7–16	6–17	6–17	5– •
17	7–16	7–17	6– •	5– •
18	8–16	7–17	6– •	6– •
19	8–16	7–17	6– •	6– •
20	8–17	7–17	6– •	6– •

$N_1 = 9$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
9	6–14	5–15	4–16	4–16
10	6–15	5–16	5–16	4–17
11	6–15	6–16	5–17	5–17
12	7–16	6–16	5–17	5–18
13	7–16	6–17	6–18	5–18
14	7–17	7–17	6–18	5–18
15	8–17	7–18	6–18	6–19
16	8–17	7–18	6–18	6–19
17	8–17	7–18	7–19	6–19
18	8–18	8–18	7–19	6– •
19	8–18	8–18	7–19	6– •
20	9–18	8–18	7–19	7– •

$N_1 = 10$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
10	6–16	6–16	5–17	5–17
11	7–16	6–17	5–18	5–18
12	7–17	7–17	6–18	5–19
13	8–17	7–18	6–19	5–19
14	8–17	7–18	6–19	6–19
15	8–18	7–18	7–19	6–20
16	8–18	8–19	7–20	6–20
17	9–18	8–19	7–20	7–20
18	9–19	8–19	7–20	7–21
19	9–19	8–20	8–20	7–21
20	9–19	9–20	8–20	7–21

$N_1 = 11$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
11	7–17	7–17	6–18	5–19
12	8–17	7–18	6–19	6–19
13	8–18	7–19	6–19	6–20
14	8–18	8–19	7–20	6–20
15	9–19	8–19	7–20	7–21
16	9–19	8–20	7–21	7–21
17	9–19	9–20	8–21	7–22
18	10–20	9–20	8–21	7–22
19	10–20	9–21	8–22	8–22
20	10–20	9–21	8–22	8–22

$N_1 = 12$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
12	8–18	7–19	7–19	6–20
13	9–18	8–19	7–20	6–21
14	9–19	8–20	7–21	7–21
15	9–19	8–20	8–21	7–22
16	10–20	9–21	8–22	7–22
17	10–20	9–21	8–22	8–22
18	10–21	9–21	8–22	8–23
19	10–21	10–22	9–23	8–23
20	11–21	10–22	9–23	8–23

$N_1 = 13$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
13	9–19	8–20	7–21	7–21
14	9–20	9–20	8–21	7–22
15	10–20	9–21	8–22	7–22
16	10–21	9–21	8–22	8–23
17	10–21	10–22	9–23	8–23
18	11–21	10–22	9–23	8–24
19	11–22	10–23	9–24	9–24
20	11–22	10–23	10–24	9–24

$N_1 = 14$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
14	10–20	9–21	8–22	7–23
15	10–21	9–22	8–23	8–23
16	11–21	10–22	9–23	8–24
17	11–22	10–23	9–24	8–24
18	11–22	10–23	9–24	9–25
19	12–23	11–23	10–24	9–25
20	12–23	11–24	10–25	9–25

$N_1 = 15$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
15	11–21	10–22	9–23	8–24
16	11–22	10–23	9–24	9–24
17	11–22	11–23	10–24	9–25
18	12–23	11–24	10–25	9–25
19	12–23	11–24	10–25	10–26
20	12–24	12–25	11–26	10–26

$N_1 = 16$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
16	11–23	11–23	10–24	9–25
17	12–23	11–24	10–25	9–26
18	12–24	11–25	10–26	10–26
19	13–24	12–25	11–26	10–27
20	13–25	12–25	11–26	10–27

$N_1 = 17$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
17	12–24	11–25	10–26	10–26
18	13–24	12–25	11–26	10–27
19	13–25	12–26	11–27	10–27
20	13–25	13–26	11–27	11–28

$N_1 = 18$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
18	13–25	12–26	11–27	11–27
19	14–25	13–26	12–27	11–28
20	14–26	13–27	12–28	11–29

$N_1 = 19$

N_2	$2\alpha = 0{,}10$	$2\alpha = 0{,}05$	$2\alpha = 0{,}02$	$2\alpha = 0{,}01$
19	14–26	13–27	12–28	11–29
20	14–27	13–27	12–29	12–29

Erläuterungen

(Zeit)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Folge (I)	$\underline{A}$	$\underline{B}$	A	A	A	B	B	A	B	A
Folge (II)	$\underline{A}$	$\underline{B}$	A	B	A	A	B	A	B	A
Folge (III)	$\underline{A}$	$\underline{A}$	A	A	A	A	B	B	B	B

Jede der Folgen (I), (II), (III) hat einen Umfang von $N = 10$ und eine Anzahl B von $N_1 = 4$ und eine Anzahl A von $N_2 = 6$. (Man nenne, sofern $N = N_1 + N_2 < 40$, die kleinere Anzahl N_1). In diesen Folgen bilden die unterstrichenen Buchstaben je eine Iteration (englisch *run*). Das Total der Iterationen I ist bei Folge (I) = 7, bei Folge (II) = 9, bei Folge (III) = 2.

Die Tafel gibt die Vertrauensgrenzen ($\geqq 1 - 2\alpha$) für den Erwartungswert $\mathfrak{I}_{(total)}$ des Totals der Iterationen:

a) Wird die linke Schranke *erreicht* oder *unterschritten*, so ist: $I < \mathfrak{I}$ mit Wahrscheinlichkeit α oder $I \neq \mathfrak{I}$ mit Wahrscheinlichkeit 2α.
Für den Wald-Wolfowitz-Test ist die Signifikanz immer 2α.

b) Wird die rechte Schranke *erreicht* oder *überschritten*, so ist: $I > \mathfrak{I}$ mit Wahrscheinlichkeit α oder $I \neq \mathfrak{I}$ mit Wahrscheinlichkeit 2α.

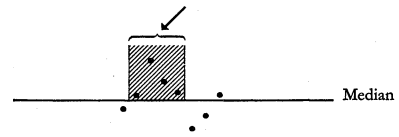
c) Liegt I zwischen den Schranken und *erreicht sie nicht*, so kann die Nullhypothese nicht verworfen werden.

1) Werte nach Swed und Eisenhart, *Ann. math. Statist.*, **14**, 66 (1943). Nachdruck mit Erlaubnis der Autoren und des Verlages.

l	$\alpha \leqq 0{,}01$	$\alpha \leqq 0{,}10$	$\alpha \leqq 0{,}50$	$\alpha \leqq 0{,}90$	$\alpha \leqq 0{,}99$
1	2	2	2	2	2
2	4	4	6	8	12
3	6	6	12	22	38
4	8	10	22	54	100
5	10	16	46	116	230
6	14	26	92	260	490
7	18	44	182	530	1 044
8	26	78	360	1 104	2 140
9	38	142	714	2 240	4 370
10	56	256	1 424	4 530	8 980
11	86	480	2 850	9 190	18 240
12	140	930	5 680	18 540	37 200
13	234	1 838	11 330	37 600	75 500
14	410	3 630	22 700	75 700	151 700
15	748	7 160	45 300	151 700	303 000
16	1 446	14 190	90 600	303 000	607 000
17	2 830	28 100	181 200	607 000	1 214 000
18	5 530	56 100	362 000	1 214 000	2 430 000
19	10 860	117 300	725 000	2 430 000	4 850 000
20	21 500	235 000	1 450 000	4 850 000	9 710 000

Diese Tafel[1] gibt die Wahrscheinlichkeit α für den Fall, daß bei dem in der Tafel gegebenen Stichprobenumfang die längste Iteration oberhalb oder unterhalb des Medians die Länge l erreicht oder überschreitet. Der Entscheid, welche Seite des Medians geprüft werden soll, ist vor dem Test zu fassen!

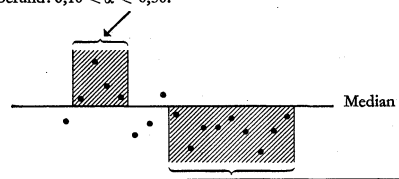
Beispiel: Stichprobenumfang = 28. Längste Iteration oben = 4. Befund: $0{,}50 < \alpha < 0{,}90$.



l	$\alpha \leqq 0{,}01$	$\alpha \leqq 0{,}10$	$\alpha \leqq 0{,}50$	$\alpha \leqq 0{,}90$	$\alpha \leqq 0{,}99$
1	2	2	2	2	2
2	4	4	6	10	14
3	6	8	14	26	44
4	8	14	30	68	116
5	12	26	68	152	252
6	20	50	140	322	552
7	34	98	290	676	1 164
8	62	194	596	1 390	2 390
9	116	390	1 208	2 830	4 930
10	216	782	2 440	5 650	10 140
11	446	1 182	4 910	11 750	20 700
12	884	2 360	9 840	23 800	42 500
13	1 762	4 720	19 890	48 600	86 700
14	3 510	9 450	39 900	98 600	174 200
15	6 990	18 900	80 500	197 300	348 000
16	13 930	37 800	161 300	395 000	697 000
17	27 900	75 600	323 000	789 000	1 394 000
18	55 500	151 200	645 000	1 578 000	2 790 000
19	111 000	302 000	1 290 000	3 160 000	5 570 000
20	222 000	605 000	2 580 000	6 310 000	11 150 000

Diese Tafel[1] gibt die Wahrscheinlichkeit α für den Fall, daß bei dem in der Tafel gegebenen Stichprobenumfang die *kürzere* der längsten Iteration oberhalb des Medians und der längsten Iteration unterhalb des Medians die Länge l erreicht oder überschreitet.

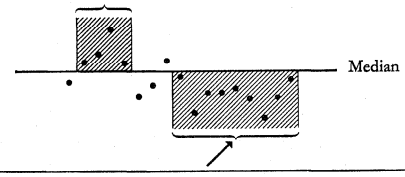
Beispiel: Stichprobenumfang = 28. Längste Iteration oben = 4, unten = 9. Befund: $0{,}10 < \alpha < 0{,}50$.



l	$\alpha \leqq 0{,}01$	$\alpha \leqq 0{,}10$	$\alpha \leqq 0{,}50$	$\alpha \leqq 0{,}90$	$\alpha \leqq 0{,}99$
1	2	2	2	2	2
2	4	4	4	8	10
3	6	6	8	16	28
4	8	8	16	36	64
5	10	14	30	76	136
6	12	20	58	152	282
7	16	32	106	296	568
8	22	52	200	580	1 150
9	32	86	388	1 174	2 310
10	42	150	758	2 350	4 640
11	62	262	1 488	4 720	9 330
12	94	500	2 920	9 460	18 730
13	156	962	5 860	10 660	37 700
14	256	1 876	11 250	21 300	75 700
15	418	3 670	22 600	42 600	151 600
16	766	7 330	45 200	85 300	303 000
17	1 472	14 090	90 100	170 500	606 000
18	2 860	27 900	180 300	341 000	1 213 000
19	5 570	55 500	361 000	682 000	2 430 000
20	10 860	111 100	721 000	1 364 000	4 850 000

Diese Tafel[1] gibt die Wahrscheinlichkeit α für den Fall, daß bei dem in der Tafel gegebenen Stichprobenumfang die *längere* der längsten Iteration oberhalb des Medians und der längsten Iteration unterhalb des Medians die Länge l erreicht oder überschreitet.

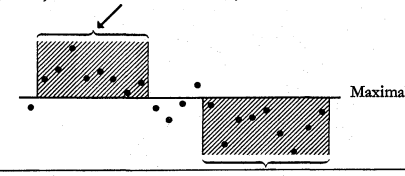
Beispiel: Stichprobenumfang = 28. Längste Iteration oben = 4, unten = 9. Befund: $\alpha < 0{,}01$.



l	$\alpha \leqq 0{,}01$	$\alpha \leqq 0{,}10$	$\alpha \leqq 0{,}50$	$\alpha \leqq 0{,}90$	$\alpha \leqq 0{,}99$
1	2	2	2	2	2
2	4	4	6	8	12
3	6	8	12	22	34
4	8	12	22	48	76
5	12	18	46	96	162
6	16	34	86	192	380
7	24	58	166	382	668
8	38	108	324	760	1 342
9	66	204	638	1 518	2 690
10	118	400	1 266	3 030	5 410
11	228	790	2 530	6 070	10 870
12	444	1 568	5 050	12 130	21 500
13	878	3 130	10 070	24 300	43 100
14	1 750	6 220	20 100	48 500	86 200
15	3 480	12 490	40 300	97 000	172 300
16	6 790	25 000	80 600	194 100	345 000
17	13 860	49 900	161 100	388 000	689 000
18	27 700	99 900	322 000	776 000	1 379 000
19	55 400	199 800	644 000	1 553 000	2 760 000
20	110 800	400 000	1 289 000	3 110 000	5 510 000

Diese Tafel[1] gibt die Wahrscheinlichkeit α für den Fall, daß bei dem in der Tafel gegebenen Stichprobenumfang die *kürzere* der längsten Iteration oberhalb eines Maximalschnittes und der längsten Iteration unterhalb dieses Maximalschnittes die Länge l erreicht oder überschreitet. Der Maximalschnitt wird so geführt, daß die kürzere der längsten Iterationen ober- und unterhalb dieses Schnittes maximalisiert wird.

Beispiel: Stichprobenumfang = 28. Längste Iteration über dem Maximalschnitt = 8, unten = 9. Befund: $\alpha < 0{,}01$.



l	$\alpha \leqq 0{,}01$	$\alpha \leqq 0{,}05$	$\alpha \leqq 0{,}10$	$\alpha \leqq 0{,}90$	$\alpha \leqq 0{,}95$	$\alpha \leqq 0{,}99$
2	—	—	—	7	8	12
3	—	—	4	32	40	61
4	—	7	11	162	210	321
5	9	26	48	964	1 253	1 923
6	34	153	309	6 637	8 633	13 268
7	234	1 170	2 396	52 229	67 950	104 452
8	2 034	10 348	21 248	464 209	603 947	928 410
9	20 067	102 382	210 291	4 595 600	5 979 012	9 191 191
10	218 833	1 116 808	2 294 003	50 133 734	65 225 489	100 267 459

Diese Tafel[2,3] gibt die Wahrscheinlichkeit α für den Fall, daß bei dem in der Tafel gegebenen Stichprobenumfang mindestens eine Auf- oder Ab-Iteration der Länge l oder länger eintritt.

Beispiel: Stichprobenumfang = 28. Zu prüfende Auf-Iteration = 5. Befund: $0{,}05 < \alpha < 0{,}10$.

Definition von Auf- und Ab-Iterationen:

Zeitliche Reihenfolge:	1	2	3	4	5	6
Werte:	1,14	1,17	1,20	1,19	1,21	1,16
		auf	ab	auf	ab	
Länge l:		3	1	1	1	

1) Werte nach OLMSTEAD, P. S., Runs Determined in a Sample by an Arbitrary Cut, *Bell Telephone System, Technical Publications*, Monograph 2937 (1958). *2*) Werte für l von 2–5 nach OLMSTEAD, P. S., Distribution of Sample Arrangements for Runs up and down, *Bell Telephone System, Technical Publications*, Monograph 2289 (1946); und *Ann. math. Statist.*, **17**, 24 (1946). Nachdruck mit Erlaubnis des Verfassers, des Verlages und der Bell Telephone Laboratories, Inc., New York. *3*) Werte für l von 6–10 durch den Herausgeber mit POISSON-Approximation errechnet.

72137	73850	32733	35321	80647	39713	61060	57865	88049	20557	43375	50914	83628	73935	72502	48174	62551	96122	22375	96488
04254	60099	50584	10961	57642	19101	30613	01549	96531	83936	45842	78222	88481	44933	12839	20750	47116	58973	99018	22769
48083	50731	81250	57995	41467	29834	08059	22945	72193	36077	82577	16210	76092	87730	90049	02115	37096	20505	91937	69776
16602	26772	89693	92558	38394	84119	68486	17622	30953	78267	31568	58297	88922	50436	86135	42726	54307	29170	13045	65527
29910	55480	47184	79775	09779	08718	45822	17643	63252	00232	98059	07255	90786	95246	15280	61692	45137	17539	31799	64780
77708	83761	89238	86521	82711	79266	47763	26173	36183	65869	64355	91271	49295	98354	28005	69792	01480	51557	70726	35862
90715	65115	12870	89922	24926	44062	94896	97561	96490	35454	51623	98381	11055	32951	28363	16451	67912	66404	76254	75495
79666	48119	38525	82189	34921	49838	47558	92343	47408	99542	44247	12762	54488	74321	36224	95619	16238	25374	13653	25345
53294	49761	76235	55814	29900	03796	73326	94291	10739	36087	32326	52225	72447	77804	57045	27552	72387	34001	83792	66764
44422	78305	76369	20601	39701	80769	17322	78280	42376	64899	62390	68375	42921	28545	33167	85710	11035	40171	04840	69848
12601	54432	65017	91131	50515	97477	80691	31834	32401	11994	97820	06653	27477	61364	22681	02280	53815	47479	44017	37563
65664	73669	24910	25458	23699	86413	19985	49355	24358	02915	81553	92012	50435	73814	96290	86827	81430	45597	82296	28947
18363	66515	23098	22384	87756	66396	63646	50963	99099	62895	09202	48494	95974	33534	94657	71126	71770	16092	03942	90111
00491	53688	72033	68063	86104	90576	04119	65531	30304	39202	82110	82254	03669	03281	11613	36336	98297	48100	71594	52667
02878	83197	94318	47901	85252	91124	32939	75043	40325	53252	18175	09457	83810	46392	02705	85591	33192	65127	80852	42030
79920	22780	43100	83886	26378	66010	00020	80666	66861	17820	50756	80608	35695	72641	26306	76298	32532	22644	96853	18610
97556	54260	42361	12741	56996	48177	85725	36668	45531	85245	12710	60264	74650	92126	08152	32147	17457	56298	48964	64733
79435	52143	12322	12254	04314	98550	58315	78036	24355	85822	44424	88508	66190	74060	93206	92840	44833	81146	64060	62975
93903	78220	09178	33676	58996	78675	11648	96220	54127	24804	24720	66501	74157	42246	41688	72835	87258	89384	11251	34329
04758	50961	90230	72006	24268	77817	10524	60304	79352	31942	85419	93017	28087	78323	77109	56832	78400	24190	37978	85863
53841	28758	93442	42983	25254	96336	16570	89358	36619	72838	10933	99964	13468	17211	48046	51122	92668	96750	11139	06275
07626	78473	17708	59059	33584	52451	11575	55992	83228	38546	49559	71671	53603	24491	57570	90789	32932	67449	05115	45941
40645	27008	16341	05870	42604	79286	08720	13175	89573	38051	39391	92039	71664	40219	97707	93975	66981	19556	24605	52169
82666	14127	94390	07069	39152	10357	94612	56748	75428	28101	38543	54214	48928	32818	51963	87353	15094	29529	87305	01361
60147	99378	58310	34655	48242	58656	30544	01860	08322	70476	44242	54227	28598	64422	29361	20359	48577	05971	92373	22765
61557	43927	11643	65522	76713	95782	34956	67384	47654	64999	11468	74149	81386	94127	67342	38010	92522	57728	39432	27914
71522	16545	68464	62540	76143	06328	94718	58404	84099	73641	52165	54336	89196	40042	37889	06003	58033	59082	94988	62152
05366	66273	49518	25413	20346	22719	18255	47685	78475	67421	83093	77038	55399	67893	89597	85630	08059	35757	49479	63531
72668	62720	08971	97908	15905	86615	97559	68107	10649	30976	66455	90708	08450	50120	17795	55604	51222	17900	55553	02980
51497	78491	83680	08319	51223	19735	72708	82599	28127	29660	30790	65154	19582	20942	81439	83917	90452	64753	99645	19799
66170	68781	91423	86645	02925	51327	41022	76893	29200	82747	97297	74420	18783	93471	89055	56413	77817	10655	52915	68198
23361	60672	52451	03774	06365	94880	70978	57385	70532	46978	87390	53319	90155	03154	20301	47831	86786	11284	49160	79852
53608	59661	70966	24937	56559	98856	19207	41684	20288	19783	82215	35810	39852	43795	21530	96315	55657	76473	08217	46810
24079	01177	02666	35515	24819	73382	50172	23114	28745	12249	35844	63265	26451	06986	08707	99251	06260	74779	96285	31998
50495	87947	20592	91917	59595	55083	43112	94833	72864	58785	53473	06308	56778	30474	57277	23425	27092	47759	18422	56074
93550	48308	20282	92711	74402	51335	64031	41740	69680	69373	73674	97914	77989	47280	71804	74587	70563	77813	50242	60398
16269	03381	09798	89487	33632	47073	92357	38870	73784	95662	83923	90790	49474	11901	30322	80254	99608	17019	17892	76813
32868	72831	55156	90166	91599	09471	79945	42580	86605	97758	08206	54199	41327	01170	21745	71318	07978	35440	26128	10545
80722	21328	19977	82161	29385	62151	48030	05125	70866	72154	86385	39490	57482	32921	33795	43155	30432	48384	85430	51828
67362	87389	09559	98456	70498	40173	80016	81500	48061	25583	74101	87573	01556	89183	64830	16779	35724	82103	61658	20296
83452	92994	85019	57720	36951	03383	34265	65728	89776	04006	06089	84076	12445	47416	83620	59151	97420	23689	74515	55211
51168	41624	94768	53124	95920	04777	82534	76335	21108	42302	79496	21054	80132	67719	72662	58360	57384	65406	63918	17046
83805	28803	63272	65480	08764	16379	72055	61146	82780	89411	53131	57879	39099	42715	24830	60045	23250	39847	46616	17817
59782	50488	77081	10186	86577	28581	26999	96294	20431	30114	23035	30380	76272	60343	57573	42492	47962	21439	54664	97968
09627	26695	79373	09119	79765	99918	01628	47335	17893	53176	07436	14799	78197	48601	97557	83918	20530	61565	69344	71964
20160	50603	71684	34875	60617	77991	66322	27390	73834	73494	21527	93579	20949	85666	25102	64733	93872	72698	87520	43340
04375	15463	49139	17369	71179	77472	96239	18521	67354	41883	58939	36222	43935	36272	47817	90287	91434	86453	84477	03559
67163	48629	25607	27003	09721	70206	10497	83617	39176	45062	63903	33862	14903	38996	60027	41702	78189	28598	12707	91191
49380	42273	93835	32621	60848	67721	69712	33438	85908	58620	50646	47857	96024	58568	67614	44370	40276	85964	71604	05691
56013	02278	53110	33235	62949	53799	51375	42451	76889	68096	80657	91046	95340	70209	23825	46031	45306	64476	31460	61553
46596	51960	02957	56574	18672	02994	39960	02489	53079	72789	22562	39359	38220	13972	86115	17196	24569	26820	66299	50962
52928	66296	15570	31407	54988	78749	16135	82797	31296	93268	10104	95616	82618	85756	51156	74037	12501	94162	42006	99213
09403	50848	71088	31308	35677	49046	10870	72107	11550	61175	33345	56717	07896	74085	59886	03051	78702	13402	74318	20992
30328	72163	66728	81091	52307	78952	60261	11207	73065	48286	57057	49472	95241	84360	13960	95736	43637	60399	19080	72417
78707	57821	28410	64908	30432	78760	36880	02564	96978	62332	77321	92228	53849	26578	39954	86726	91039	13884	25376	60187
73597	94657	72927	46459	61325	50908	25601	30038	78786	65197	65283	18169	72967	53031	47906	99501	27753	69946	66875	31598
07446	66408	19958	65159	11338	39231	72802	70630	87336	16385	32784	38073	87910	89260	66444	15979	83469	76952	50065	89540
47870	55448	14158	83451	58729	42430	42234	04905	83274	22459	75032	93544	10482	34277	40177	01081	57788	08612	39886	33050
84269	35324	35508	49481	56478	30246	41771	61398	98154	61644	12405	45037	68034	98561	46747	30655	41878	93610	51745	97527
52704	71441	50581	65679	37597	17182	60733	11765	09293	70076	40751	95846	80277	92450	60888	18689	45966	25837	70906	62841
19020	09999	08316	32781	89731	52148	09111	64205	77930	32391	69076	13459	59896	78185	60268	03650	36814	88460	34049	19544
19442	94873	36976	30366	65815	66895	27222	17378	59359	00055	66780	54939	78369	04163	77673	73342	78915	20537	06126	92480
39523	74227	51895	39733	29426	76685	93548	87546	07687	47338	12240	32277	23015	54261	95020	77705	81682	96907	37411	90717
01201	85057	93409	81200	21176	78459	18960	85182	02245	11566	52527	62992	55171	85448	12545	75992	08790	88992	69756	46722
51725	60273	84903	84374	31438	36959	83719	40702	79038	68639	63329	93821	58095	62204	69319	00672	96037	78680	98734	92743
91045	72642	42684	32419	12825	58785	84563	62071	17799	96994	41635	52830	19700	98193	37600	70617	58959	45486	58338	12464
54896	95603	17290	91508	95605	82514	32257	15699	02654	83110	44278	95523	12666	87597	23190	26243	36690	75829	71060	91605
92324	88115	77848	38006	45600	02181	79261	49705	31491	25318	52586	72494	66685	05344	71633	68536	18786	28575	08455	93825
88397	78035	06366	37342	62070	74459	62026	13032	14048	16304	11959	78684	72590	47283	45445	35611	98354	53680	45747	87442
52118	65337	13461	18438	16099	57330	05018	92605	10316	07351	78020	86361	30286	06434	50229	09070	44848	09996	77753	49227
37202	05623	23595	79677	59772	37141	63390	48093	02366	05407	08325	52046	87494	95585	25547	53500	45047	08406	66984	71128
71637	80269	83299	89743	94628	26784	17792	09214	53781	90102	25774	92525	32301	25923	76556	13274	39776	97027	56919	88547
35790	19603	31212	34419	34728	47391	93272	09887	34196	98251	62453	37703	70711	37921	54989	17828	60976	57662	61757	71249
99087	72525	34402	50115	09825	54728	37514	24437	01316	04770	06534	17768	36086	05468	41631	95632	78154	38634	47463	99728
89768	36608	49108	92337	79809	81934	06370	18703	90858	55130	40869	88243	37403	42231	17073	49097	54147	03656	14735	78351
83816	00718	94663	39629	27812	28250	44983	33834	54280	67850	96025	96117	00768	14821	69029	25453	48798	15486	73835	51776
00806	20667	81224	24296	39967	60239	89494	34431	44890	59892	79682	20308	82510	53609	13258	89631	80497	49167	81559	47202
65733	03902	29140	05414	62087	65727	54430	52632	94126	95597	48338	67645	44676	14730	22642	21919	21050	87791	76192	56686
60671	23190	47433	86979	45281	69750	96999	42104	34377	63309	82181	00278	28209	95629	75818	09043	48564	87355	27209	09827
45326	86280	74876	51858	03263	10215	87947	09427	32380	43636	58578	07761	28456	46570	11623	50417	37763	30136	58254	71090
54419	65493	88741	89069	10789	00973	30238	46126	85306	37114	22718	50584	92291	56575	24075	43889	40909	18741	86154	20843
72845	68939	06483	40835	16564	75047	22938	13073	32066	43098	75738	94910	15403	89151	73322	18370	90586	46115	87375	79147
01828	48113	60005	87083	90000	22346	89182	27750	63314	87302	49472	24885	79506	60638	07132	00908	92035	75518	30878	14979
89871	81320	05251	25930	37320	11895	16187	03303	40287	52435	23926	92544	54099	31497	03863	22864	72620	74169	25311	80669
74883	93005	77888	64673	19302	54669	21526	07401	30925	46148	20138	33874	56715	38424	38273	11361	15203	64912	62494	31231
25493	56247	46907	25634	84761	76421	42907	95158	27146	37012	43361	03173	97911	71313	44256	66609	42504	76799	46790	28464
28278	93841	13134	25129	65536	19838	21479	48265	01674	47274	56350	37512	14883	99673	62298	33948	32456	28675	04242	20735
44834	89816	52509	85192	32114	83770	90076	70233	76730	25043	16686	54737	57431	01786	20803	69465	37970	05673	49516	98035
23329	74767	85661	54449	76606	02131	93202	25355	93941	84434	22384	13240	93617	51549	28532	57150	77261	62643	74966	08777
33176	16108	98145	27652	76918	41000	46059	72208	90475	10341	39703	83224	37858	61657	04184	15597	29448	01922	05709	77900
44597	28074	92908	22392	38034	83739	32876	98604	75652	95680	51386	48724	76069	94867	93570	20306	31712	96238	57864	86267
81456	81110	94771	13664	07478	80992	58485	18882	13238	59865	55644	05528	94935	58972	43340	94718	97397	92197	57257	73187
91503	59589	22803	18122	17790	00236	93750	20468	92189	66781	06210	18208	13973	57905	66878	55721	67437	61709	88182	92769
63651	64109	13207	68346	42140	00052	04099	48767	23355	42505	34539	51129	48580	59386	62209	29754	77409	48146	50411	50511
30709	25869	68851	65221	69392	35106	36393	27129	17326	86452	69952	68433	72332	62502	76323	38379	07293	76788	84281	58581
50664	89487	41973	98456	51147	51327	26590	94684	58103	96936	71276	30275	22753	46046	67196	65135	54879	71903	23541	92400
80089	83750	36605	85343	26090	28447	33179	69730	09683	08770	50381	43130	88108	64709	15191	68718	38375	46747	19860	76129
19293	91304	37043	82077	42231	31534	54358	52939	26655	72687	26616	09608	59223	74533	64986	49667	78039	61030	46122	54941
97754	28401	62553	98641	48553	35996	08033	91811	70471	81538	20017	19613	81103	37642	41866	96777	08667	74544	92903	58427
47923	38366	81939	61526	27691	13988	21630	00957	50599	91260	72832	89364	14158	71740	91289	61204	91185	23485	18424	65084

1) Nach LINDER, A., *Planen und Auswerten von Versuchen*, Birkhäuser, Basel (1953), S. 177 ff. Nachdruck mit Erlaubnis des Autors und des Verlages.

I. Symbole

$a \to b$	a strebt nach b
∞	unendlich
lim	Grenzwert (limes)
$a \sim b$	a annähernd gleich groß wie b
$a \approx b$	a in großer Annäherung gleich groß wie b
$a = b$	a gleich groß wie b. Vgl. II, Gleichung (**1**)
$a \equiv b$	a identisch b (nur für Formeln)
$a > b$	a größer als b
$a < b$	a kleiner als b — Vgl. II, Gleichungen (**2**) und (**3**)
$a \gg b$	a viel größer als b
$a \ll b$	a viel kleiner als b
$a \neq b$ $a \lessgtr b$	a ungleich groß wie b, gelesen: a ungleich b
$b < a < c$	a größer als b und kleiner als c
$a \geqq b$	a gleich groß oder größer als b, das heißt, a ist mindestens so groß wie b
$a \leqq b$	a gleich groß oder kleiner als b, das heißt, a ist höchstens so groß wie b
$b \leqq a \leqq c$	a liegt zwischen b und c
$\lvert a \rvert$	Absolutwert von a; er ist immer positiv, zum Beispiel $\lvert -5 \rvert = 5$
$+$	Additionszeichen, plus, positiv
$-$	Subtraktionszeichen, minus, negativ
$\times$ oder $\cdot$	Multiplikationszeichen, mal (der Punkt wird von uns nicht verwendet)
: oder $\div$	Divisionszeichen, dividiert durch ($\div$ ist in den USA gebräuchlich; wird von uns nicht verwendet)
$a + b = c$	$a + b$, gelesen a plus b, wird Addition genannt. a und b sind die Summanden, $a + b$ die Summe, c der Summenwert, in der Regel ebenfalls als Summe bezeichnet
$\sum_1^k x_i$	Summe aller Werte $x_1, x_2, x_3, \ldots$, kurz aller Werte x_i, zwischen $i = 1$ bis und mit $i = k$, das heißt $\sum_1^k x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k$ Wenn keine Unklarheit entsteht, werden die Summierungsgrenzen unter- und oberhalb des Σ meist weggelassen
$\int$	Unbestimmtes Integral
$\int_a^b$	Bestimmtes Integral, Integral zwischen $x = a$ und $x = b$
$a - b = c$	$a - b$, gelesen a minus b, wird Subtraktion genannt. a ist der Minuend, b der Subtrahend, $a - b$ die Differenz, c der Differenzenwert, in der Regel ebenfalls als Differenz bezeichnet. Die Subtraktion ist die Umkehroperation der Addition
$a \times b = c$ $a\,b = c$ $a \cdot b = c$	$a \times b$, gelesen a mal b, wird Multiplikation genannt. a, b sind die Faktoren, $a \times b$ das Produkt, c der Produktenwert, in der Regel ebenfalls als Produkt bezeichnet. Der Punkt wird von uns wegen Verwechslungsgefahr nicht verwendet
$a : b = c$	$a : b$, gelesen a durch b, wird Division genannt. a ist der Dividend, b der Divisor, $a : b$ der Quotient, c der Quotientenwert, in der Regel ebenfalls als Quotient bezeichnet. Die Division ist die Umkehroperation der Multiplikation. Sie kann auch als Bruch dargestellt werden $\frac{a}{b}$ oder a/b Beim Bruch wird a als Zähler (= Dividend), b als Nenner (= Divisor) bezeichnet
$a^b = c$	a^b, gelesen a hoch b, wird Potenzierung genannt. a ist die Basis, b der Exponent, a^b die Potenz, c der Potenzwert, in der Regel ebenfalls als Potenz bezeichnet. Beim Spezialfall $a^2 = c$ wird a^2, in der Regel auch c, das Quadrat von a genannt
$\sqrt[b]{a} = c$	$\sqrt[b]{a}$, gelesen b-te Wurzel aus a (der Autor liest b aus a), wird Radizierung genannt. a ist der Radikand, b der Wurzelexponent, $\sqrt[b]{a}$ die Wurzel, c der Wurzelwert, in der Regel ebenfalls als Wurzel bezeichnet. Beim Spezialfall $\sqrt[2]{a} = c$ wird a, in der Regel auch c, die Quadratwurzel von a genannt. Der Wurzelexponent der Quadratwurzel wird meistens nicht angeschrieben, das heißt $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$. Die Radizierung ist eine der beiden Umkehroperationen der Potenzierung, die andere ist das Logarithmieren
log, ln	siehe Logarithmen, S. 134
e	Basis der natürlichen Logarithmen = 2,718 281 828 4 ...
π	Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser = 3,141 592 653 5 ...
sin cos tan, tg arc sin	siehe S. 139

II. Das Zahlensystem

Als *natürliche Zahlen* bezeichnet man die Gesamtheit aller positiven ganzen Zahlen. Null und negative Zahlen werden nicht dazugerechnet.

Als *rationale Zahlen* bezeichnet man die Gesamtheit aller positiven und negativen ganzen Zahlen sowie die aus diesen Zahlen gebildeten Brüche und die Null.

Als *irrationale Zahlen* bezeichnet man jene Bruchzahlen, die sich nicht durch Division erzeugen lassen. So führt das Wurzelziehen oft zu irrationalen Zahlen, zum Beispiel $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ usw. Zu den irrationalen Zahlen gehören auch π und e.

Als *reelle Zahlen* bezeichnet man die Gesamtheit aller rationalen und irrationalen Zahlen. Innerhalb der reellen Zahlen gelten folgende Grundgesetze:

1. Die vier Grundoperationen

Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sind im Bereich der reellen Zahlen immer und eindeutig durchführbar, ausgenommen die Division durch Null.

2. Das Ordnungsgesetz

Zwischen zwei reellen Zahlen a und b besteht *immer nur eine* der drei Beziehungen

$$a = b \quad \text{oder} \quad a > b \quad \text{oder} \quad a < b$$

wobei

$$a = b \quad \text{wenn} \quad a - b = 0 \tag{1}$$

$$a > b \quad \text{wenn} \quad a - b > 0 \tag{2}$$

$$a < b \quad \text{wenn} \quad a - b < 0 \tag{3}$$

Beispiele zu den Gleichungen (**2**) und (**3**)

$$\ldots > 10 > 9 > \ldots > 1 > 0 > -1 > \ldots > -10 > \ldots$$

$$\ldots < -10 < -9 < \ldots < -1 < 0 < 1 < \ldots < 10 < \ldots$$

3. Das kommutative Gesetz

$$a+b=b+a \tag{4}$$

$$ab=ba \tag{5}$$

4. Das assoziative Gesetz

$$(a+b)+c=a+(b+c) \tag{6}$$

$$(ab)c=a(bc) \tag{7}$$

5. Das distributive Gesetz

$$a(b+c)=ab+ac \tag{8}$$

III. Rechnen mit Null und Unendlich

$$a-a=0 \tag{9}$$

$$|0|=0 \tag{10}$$

$$0\times a=0 \tag{11}$$

$$\frac{a}{\infty}=0 \quad (a\neq\infty) \tag{12}$$

$$\frac{0}{a}=0 \quad (a\neq 0) \tag{13}$$

$$\frac{a}{0} \quad \text{ist nicht definiert} \tag{14}$$

$$0^a=0 \quad (a>0) \tag{15}$$

$$a^0=1 \quad (a\neq 0) \tag{16}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{für } a>1 \\ 1 & \text{für } a=1 \\ 0 & \text{für } -1<a<1 \text{ und } a\neq 0 \\ \text{nicht konvergent} & \text{für } a\leqq -1 \end{cases} \tag{17}$$

$$\log_c 0=-\infty \quad (c>1) \tag{18}$$

$$\log_c \infty=+\infty \quad (c>1) \tag{19}$$

$$\log_c 1=0 \tag{20}$$

$$0!=1 \tag{21}$$

$$\binom{n}{0}=1 \tag{22}$$

IV. Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division

1. Vorzeichen

a, b, c seien positive Zahlen. Dann gilt

$$a\pm b=a\mp(-b) \tag{23}$$

$$a(-b)=(-a)b=-(ab)=-c \tag{24}$$

$$(-a)(-b)=+ab=+c \tag{25}$$

$$\frac{-b}{a}=\frac{b}{-a}=-\frac{b}{a}=-c \tag{26}$$

$$\frac{-b}{-a}=+\frac{a}{b}=+c \tag{27}$$

2. Ausklammern

$$a-b-c-d-\cdots=a-(b+c+d+\cdots) \tag{28}$$

$$\pm ab\pm ac\pm ad\pm\cdots=a(\pm b\pm c\pm d\pm\cdots)=\pm a(b+c+d+\cdots) \tag{29}$$

3. Umformen von Divisionen in Multiplikationen

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{a}\times b \tag{30}$$

Werte für $1/a$ im Bereich 1–999 siehe S. 18. Die Anwendung der Gleichung (**30**) ist besonders vorteilhaft beim Maschinenrechnen mit konstantem Divisor.

4. Umformen von Multiplikationen und Divisionen in Additionen

Ist b eine ganze Zahl (eventuell umformen), dann ist

$$\left.\begin{aligned} ab &= a+a+a+\cdots \\ \frac{b}{a} &= \frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\cdots \end{aligned}\right\} \; b \text{ Summanden} \tag{31}$$

Gleichung (**31**) ist besonders vorteilhaft bei maschineller Tabellierung linearer Funktionen.

5. Bruchrechnen

$$\frac{a}{a}=1 \quad (a\neq 0) \tag{32}$$

$$\frac{ma}{mb}=\frac{a}{b} \quad (m\neq 0) \tag{33}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \quad \text{(Anwendung auch von rechts nach links!)} \tag{34}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \quad \text{(Anwendung auch von rechts nach links!)} \tag{35}$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{d}\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{bd} \tag{36}$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a}{c}\times\frac{d}{b}=\frac{a}{c}:\frac{b}{d} \tag{37}$$

6. Proportion

Die Gleichung

$$a:b=c:d \tag{38}$$

gelesen: a verhält sich zu b wie c zu d, heißt Proportion. a und d sind die äußern, b und c die innern Glieder. Das Produkt der äußern ist gleich dem Produkt der innern Glieder

$$ad=bc \tag{39}$$

Stetige Proportion heißt die Gleichung

$$a:b=b:c \tag{40}$$

Nach Gleichung (**39**) ist $ac=b^2$, das heißt $b=\sqrt{ac}$ (**41**)

b wird das geometrische Mittel von a und c genannt

Ein Spezialfall stetiger Proportionen ist der in Natur und Kunst weitverbreitete «Goldene Schnitt»

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b} \quad \text{das heißt}$$

$$b=\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}=0{,}618\,034\,a \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b}=1{,}618\,034 \tag{42}$$

und die Proportion der «Normal»formate

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a/2} \quad \text{das heißt}$$

$$b=a/\sqrt{2}=0{,}707\,107\,a \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b}=1{,}414\,214 \tag{43}$$

Verhalten sich die Einzelwerte zweier einander zugeordneten Veränderlichen x, y wie

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_3}{x_3}=\cdots=k \tag{44}$$

dann ist

$$y=kx \tag{45}$$

gelesen: y ist proportional zu x im Verhältnis k. k heißt Proportionalitätskonstante. Bei positivem k vergrößert, bei negativem k verkleinert sich y proportional zum wachsenden x. [Für größer und kleiner vgl. Gleichungen (**2**) und (**3**).] Die geometrische Darstellung einer proportionalen Beziehung ergibt in einem rechtwinkligen Koordinatensystem eine Gerade, ist also eine lineare Beziehung. Umgekehrt ist eine lineare Beziehung nicht zwangsläufig eine proportionale zwischen y und x, da es viele Gerade gibt, die nicht der Gleichung (**45**) entsprechen. Zum Beispiel ist

$y = a + k\,x$ *keine* proportionale Beziehung zwischen y und x. Hier verhält sich $(y - a)$ proportional zu x.

Verhalten sich die Einzelwerte zweier einander zugeordneten Veränderlichen x, y wie

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y_1}{1/x_1} = \dfrac{y_2}{1/x_2} = \dfrac{y_3}{1/x_3} = \cdots = k \\ \text{das heißt, ist} \\ y_1 x_1 = y_2 x_2 = y_3 x_3 = \cdots = k \end{array}\right\} \quad (46)$$

dann ist

$$y = \frac{k}{x} \quad (47)$$

gelesen: y ist umgekehrt proportional zu x im Verhältnis k. Die geometrische Darstellung einer umgekehrt proportionalen Beziehung ergibt in einem rechtwinkligen Koordinatensystem eine Hyperbel. Die umgekehrt proportionale Beziehung gehört deshalb zu den nichtlinearen Beziehungen.

V. Potenzieren und Radizieren

1. Potenzieren mit ganzzahligen Exponenten

a und b seien beliebige reelle, m und r ganze positive Zahlen.

Dann gilt:

$$0^m = 0 \quad (15)$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0) \quad (16)$$

$$\lim_{n \to \infty} a^m = \begin{cases} \infty & \text{für } a > 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ 0 & \text{für } -1 < a < 1 \text{ und } a \neq 0 \\ \text{nicht konvergent} & \text{für } a \leqq -1 \end{cases} \quad (17)$$

$$a \times a \times a \times \cdots (m \text{ Faktoren}) = a^m \quad (48)$$

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \cdots (m \text{ Faktoren}) = \frac{1}{a^m} = a^{-m} \quad (a \neq 0) \quad (49)$$

$$a^m \times b^m = (a\,b)^m \quad (50)$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m = a^m\,b^{-m} \quad (b \neq 0) \quad (51)$$

$$a^m \times a^r = a^{m+r} \quad (52)$$

$$\frac{a^m}{a^r} = a^m\,a^{-r} = a^{m-r} \quad (a \neq 0) \quad (53)$$

$$(a^m)^r = (a^r)^m = a^{m\,r} \quad (54)$$

Vorzeichen: In den Gleichungen (**48**) bis (**54**) sei der resultierende *Absolutwert* der Basis gleich R, c der absolute Wert der Potenz, $2\,m$ oder $2\,m - 1$ die resultierenden geraden oder ungeraden Exponenten, dann gilt

$$(\pm R)^{2\,m} = +c \quad (55)$$

$$(\pm R)^{2\,m-1} = \pm c \quad (56)$$

2. Radizieren mit ganzzahligen Wurzelexponenten

a und b seien beliebige reelle, n und s ganze positive Zahlen, aber nicht Null. Dann gilt

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad (57)$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-\frac{1}{n}} \quad (a \neq 0) \quad (58)$$

$$\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = (a\,b)^{\frac{1}{n}} \quad (59)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (b \neq 0) \quad (60)$$

$$\sqrt[s]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[s]{a}} = a^{\frac{1}{n\,s}} \quad (61)$$

Vorzeichen: In den Gleichungen (**57**) bis (**61**) sei der resultierende *Absolutwert* der Basis gleich R, c der absolute Wert der Potenz, $2\,n$ oder $2\,n - 1$ die resultierenden geraden oder ungeraden Exponenten. Dann gilt

$$\sqrt[2n]{(+R)} = (+R)^{\frac{1}{2n}} = +c \quad (62)$$

$$\sqrt[2n]{(-R)} = (-R)^{\frac{1}{2n}} \quad \text{besitzt keine reelle Lösung} \quad (63)$$

$$\sqrt[2n-1]{(\pm R)} = (\pm R)^{\frac{1}{2n-1}} = \pm c \quad (64)$$

3. Gemischtes Potenzieren und Radizieren

a und b seien beliebige reelle, m und r ganze positive Zahlen. Auch k, n und s seien ganze positive Zahlen, aber nicht Null. Dann gilt

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (65)$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = a^{-\frac{m}{n}} \quad (a \neq 0) \quad (66)$$

$$\sqrt[kn]{a^{k\,m}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (67)$$

Zu (**67**): Achtung! Ist a negativ, so führe man zunächst alle anderen eventuell benötigten Umformungsoperationen am Exponenten durch, bevor eine Kürzung vorgenommen wird. Ist dann der resultierende Zähler im Exponenten gerade, so setze man negative a positiv und kürze danach.

$$\sqrt[n]{(a\,b)^m} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n]{b^m} = (a\,b)^{\frac{m}{n}} \quad (68)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} \quad (b \neq 0) \quad (69)$$

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[s]{a} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{s}} = a^{\frac{n+s}{n\,s}} = \sqrt[n\,s]{a^{n+s}} \quad (70)$$

$$\sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}} = a^{\frac{m\,s+n\,r}{n\,s}} = \sqrt[n\,s]{a^{m\,s+n\,r}} \quad (71)$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m\,r}{n\,s}} \quad (72)$$

Vorzeichen: In den Gleichungen (**65**) bis (**72**) sei der resultierende *Absolutwert* der Basis gleich R, c der absolute Wert der Potenz, $2\,m, 2\,n$ oder $2\,m - 1, 2\,n - 1$ die resultierenden geraden oder ungeraden Zähler und Nenner des Exponenten, dann gilt

$$\sqrt[2n]{(\pm R)^{2m}} = (\pm R)^{\frac{2m}{2n}} = (+R)^{\frac{2m}{2n}} = +c \quad (73)$$

(überall bei allfälligem Kürzen von Exponenten anwenden)

$$\sqrt[2n]{(+R)^{2m-1}} = (+R)^{\frac{2m-1}{2n}} = +c \quad (74)$$

$$\sqrt[2n]{(-R)^{2m-1}} = (-R)^{\frac{2m-1}{2n}} \quad \text{besitzt keine reelle Lösung} \quad (75)$$

$$\sqrt[2n-1]{(\pm R)^{2m}} = (\pm R)^{\frac{2m}{2n-1}} = +c \quad (76)$$

$$\sqrt[2n-1]{(\pm R)^{2m-1}} = (\pm R)^{\frac{2m-1}{2n-1}} = \pm c \quad (77)$$

VI. Logarithmen

Nach der Gleichung

$$a = c^{\log_c a} \quad (78)$$

(a = Numerus oder Antilogarithmus, c = Basis, $\log_c a$ = Logarithmus von a zur Basis c)

ist der Logarithmus von a zur Basis c definiert als Exponent, mit dem die Basis c potenziert werden muß, um a zu erhalten. Die gebräuchlichsten Basen sind 10 bei den Zehner- oder Briggsschen Logarithmen und $e = 2{,}718\,281\,8285$ bei den natürlichen Logarithmen. Im folgenden verwenden wir für die Zehnerlogarithmen die Abkürzung log, für die natürlichen Logarithmen die Abkürzung ln. Zwischen den beiden besteht die Beziehung

$$\ln a = \frac{\log a}{\log e} = 2{,}302\,585\,0930 \log a = \ln 10 \times \log a \quad (79)$$

$$\log a = \frac{\ln a}{\ln 10} = 0{,}434\,294\,4819 \ln a = \log e \times \ln a \quad (80)$$

Allgemein zur Umwandlung von Zehnerlogarithmen in andere

$$\log_c a = \frac{\log_{10} a}{\log_{10} c} \tag{81}$$

Beispiel: Gesucht Logarithmus zur Basis 2 von 20

$$\log_2 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 2} = \frac{1{,}301\,0300}{0{,}301\,0300} = 4{,}321\,928$$

Mit Logarithmen als Rechenhilfen werden Multiplikation, Division, Potenzieren und Radizieren zu Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division vereinfacht.

Da nach Gleichung (**78**) für Zehnerlogarithmen

$a = 10^{\log a}$ und $b = 10^{\log b}$

wird nach Gleichung (**52**)

$a \times b = 10^{\log a} \times 10^{\log b} = 10^{\log a + \log b}$

das heißt $\log (a \times b) = \log a + \log b$

und daraus

$(a \times b) = \text{antilog} (\log a + \log b)$

In analoger Weise lassen sich aus den Regeln des vorhergehenden Abschnittes V alle Grundregeln des Logarithmenrechnens ableiten. Die wichtigsten sind:

$$\log (a \times b) = \log a + \log b \tag{82}$$

$$\log \left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \tag{83}$$

$$\log a^b = b \log a \tag{84}$$

$$\log \sqrt[b]{a} = \frac{\log a}{b} \tag{85}$$

Da die Logarithmen nur für positive Zahlen definiert sind, führt man die Logarithmenrechnung ohne Berücksichtigung der Vorzeichen von $a, b, \ldots$ durch und versieht das Resultat nach den früher gegebenen Regeln mit dem entsprechenden Vorzeichen.

Eine logarithmische Rechnung zerfällt in drei Teile:

1. Aufsuchen der Logarithmen,
2. Rechnen mit ihnen nach den angegebenen Regeln,
3. Aufsuchen der Antilogarithmen.

1. Aufsuchen der Logarithmen

Man formt die Zahl a, zu der der Logarithmus gesucht werden soll, in ein Produkt um

$$a = 10^x \times \frac{a}{10^x} = K' \times M' \tag{86}$$

x ist durch Abzählen der Stellenzahl b links vom Komma ($|a| \geq 1$) oder durch Abzählen der Anzahl b der Nullen rechts vom Komma ($|a| < 1$) zu bestimmen. Es ist

$$x = b - 1 \quad \text{wenn } |a| \geq 1 \tag{87}$$

und

$$x = -b - 1 \quad \text{wenn } |a| < 1 \tag{88}$$

Beispiele:

a	b	x	K'	$K' \times M'$
1566,3	4	3	10^3	$10^3 \times 1{,}5663$
1,2	1	0	10^0	$10^0 \times 1{,}2$
0,12	0	−1	10^{-1}	$10^{-1} \times 1{,}2$
0,00034	−3	−4	10^{-4}	$10^{-4} \times 3{,}4$

Nach Gleichung (**82**) ist nun

$$\log a = \log (K' \times M') = \log K' + \log M' = K + M \tag{89}$$

K wird als Kennziffer, M als Mantisse des Logarithmus von a bezeichnet.

Während K dem positiven oder negativen Exponenten x von K' entspricht, muß die Mantisse in Logarithmentafeln gesucht werden. Zu diesem Zweck rundet man zunächst K' auf jene Stellenzahl, in der die Logarithmen der zur Verfügung stehenden Tafel gegeben sind. Wir rechnen im folgenden mit 4stelligen Logarithmen:

Bei $M' < 1{,}1$ runde M' auf 5 signifikante Stellen

Bei $M' \geq 1{,}1$ runde M' auf 4 signifikante Stellen

Beispiele:

$\log 1{,}0993 = ?$ $\log 1{,}5663 \approx \log 1{,}566 = ?$

Tafel auf S. 10

x	$\log x$		Zuschläge	
↓	6	9	3	6
109		0410		1
15	1931			17

$\log 1{,}0993 = 0{,}0410 + 0{,}0001 = 0{,}0411$

$\log 1{,}566 = 0{,}1931 + 0{,}0017 = 0{,}1948$

Weitere Beispiele:

a) $\log 3048 = \log (10^3 \times 3{,}048)$
$= 3 + 0{,}4829 + 0{,}0011 = 3{,}4840$

b) $\log 0{,}2130 = \log (10^{-1} \times 2{,}130)$
$= -1 + 0{,}3284 + 0 = 0{,}3284 - 1$

c) $\log 1/3048 = \log (10^{-3} \times 3{,}048^{-1})$
$= -3 - (0{,}4829 + 0{,}0011) = -0{,}4840 - 3$

d) $\log 1/0{,}2130 = \log (10^1 \times 2{,}13^{-1})$
$= 1 - 0{,}3284 = 0{,}6716$

Bei c) haben wir einen Logarithmus, bei dem außer der Kennziffer auch die Mantisse negativ ist. Man forme solche negative Mantissen sofort in positive um, indem man zur Mantisse 1 addiert und von der Kennziffer 1 subtrahiert. Zum Beispiel $-0{,}4840 - 3 = 0{,}5160 - 4$.

2. Rechnen mit Logarithmen

Man rechne nach den Regeln (**82**) bis (**85**) und bediene sich dabei folgender Anweisungen

1. Man rechne immer so, daß keine negativen Mantissen entstehen.
2. Beim Wurzelziehen aus Brüchen subtrahiere man von der Kennziffer die Differenz zwischen Wurzelexponent und Kennziffer und addiere zur Mantisse denselben Betrag (Beispiele e und f).
3. Am Schlusse der Logarithmenrechnung addiere man allfällige positive und negative Kennziffern. Die resultierende Kennziffer x ergibt dann die Anzahl b der Stellen links vom Komma ($x \geq 0$) oder die Nullenzahl rechts vom Komma ($x < 0$) nach

$$b = x + 1 \quad \text{wenn } x \geq 0 \tag{90}$$

$$b = -(x + 1) \quad \text{wenn } x < 0 \tag{91}$$

Beispiele:

a) $\log (3048 \times 0{,}2130) = \begin{array}{r} 3{,}4840 \\ +\,0{,}3284 - 1 \\ \hline 3{,}8124 - 1 \end{array} = 2{,}8124$

b) $\log (0{,}2130 : 3048) = \begin{array}{r} 0{,}3284 - 1 \\ +\,0{,}5160 - 4 \\ \hline 0{,}8444 - 5 \end{array} = 0{,}8444 - 5$

c) $\log (0{,}2130 : 0{,}000\,3281) = \begin{array}{r} 0{,}3284 - 1 \\ -\,(0{,}5160 - 4) \\ \hline 1{,}3284 - 2 \\ -\,0{,}5160 + 4 \\ \hline 0{,}8124 + 2 \end{array} = 2{,}8124$

d) $\log (0{,}2130^5) = 5 \log 0{,}2130 = 5 \times (0{,}3284 - 1)$
$= 1{,}6420 - 5 = 0{,}6420 - 4$

e) $\log\left(\sqrt[6]{0{,}2130}\right) = \dfrac{\log 0{,}2130}{6} = \dfrac{0{,}3284-1}{6} = \dfrac{5{,}3284-6}{6}$

$= 0{,}8881 - 1$

f) $\log\left(\sqrt[1{,}5]{0{,}2130}\right) = \dfrac{\log 0{,}2130}{1{,}5} = \dfrac{0{,}3284-1}{1{,}5} = \dfrac{0{,}8284-1{,}5}{1{,}5}$

$= 0{,}5523 - 1$

3. Das Aufsuchen der Antilogarithmen (der Numeri)

Das Aufsuchen der Antilogarithmen zu den Mantissen erfolgt in der Antilogarithmentafel (siehe S. 11) in gleicher Weise wie das Aufsuchen der Logarithmen in der Logarithmentafel. Man achte darauf, die beiden Tafeln in der Hast der Arbeit nicht zu verwechseln! Die Kommastelle wird nach den Gleichungen (**90**) und (**91**) bestimmt.

Beispiele: antilog 2,8124 $= 649{,}2$

antilog $(0{,}8881 - 1) = 0{,}7729$

antilog $(0{,}6420 - 4) = 0{,}0004385$

VII. Fakultät und Binomialkoeffizient

1. $n^{(r)}$

Für ganze positive r und beliebige reelle n ist das Symbol $n^{(r)}$ definiert als das Produkt

$$n^{(r)} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \tag{92}$$

wobei

$$n^{(0)} = 1 \tag{93}$$

definiert ist.

Beispiele:

a) $10^{(4)} = ?$

Es ist $(n - r + 1) = 10 - 4 + 1 = 7$. Folglich ist

$10^{(4)} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

b) $4^{(5)} = ?$

Es ist $(n - r + 1) = 4 - 5 + 1 = 0$. Folglich ist

$4^{(5)} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 0 = 0$

Aus Beispiel b) ersehen wir, daß

$$n^{(r)} = 0 \tag{94}$$

wenn $r > n$ und n eine ganze positive Zahl ist.

2. Fakultät

Die Fakultät von ganzen, positiven n, symbolisiert mit $n!$, ist definiert

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \times 2 \times 1 \tag{95}$$

wobei

$$0! = 1 \tag{96}$$

definiert ist.

$n!$ entspricht demnach $n^{(n)}$ mit der Einschränkung ganzer positiver n. Da auf den von uns behandelten Gebieten nur ganze und positive n vorkommen, kann Gleichung (**92**) geschrieben werden

$$n^{(r)} = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{97}$$

mit Gültigkeit von (**93**) und (**94**).

Logarithmen der Fakultäten von n zwischen 1 und 999 und ihrer Kehrwerte finden sich auf S. 26 und 27. Für Fakultäten von $n \geqq 1000$ verwende man die STIRLINGsche Approximation

$$n! \underset{(n\to\infty)}{\to} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \tag{98}$$

oder

$$\log n! \to 0{,}5 \times [2n(\log n - 0{,}4342944819) + \log n + 0{,}7981780] \tag{99}$$

3. Binomialkoeffizient

In allgemeiner Form ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{r}$ oder $C(n,r)$ definiert

$$\binom{n}{r} = \frac{n^{(r)}}{r!} \tag{100}$$

Für $n^{(r)}$ und $r!$ vgl. Absatz 1 und 2 dieses Abschnittes.

Da auf den von uns behandelten Gebieten nur ganze und positive n vorkommen, können wir Gleichung (**97**) in (**100**) einsetzen und erhalten

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \tag{101}$$

Aus (**93**), (**94**) und (**96**) folgt

$$\binom{n}{0} = 1 \tag{102}$$

$$\binom{0}{0} = 1 \tag{103}$$

$$\binom{n}{r} = 0 \tag{104}$$

wenn $r > n$ und n eine ganze positive Zahl ist.

Ferner ist leicht ersichtlich

$$\binom{n}{n} = 1 \tag{105}$$

Beispiel: Für $n = 9$ und $n = 10$ lassen wir r alle Werte zwischen Null und n durchlaufen.

						$n/2$					
r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$n=9$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
$n=10$	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						$n/2$					

Man ersieht aus diesem Beispiel: Bei wachsendem r steigen die Werte von $\binom{n}{r}$ bis $n/2$ und fallen danach symmetrisch wieder ab:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \tag{106}$$

Der Median fällt bei ungeraden n zwischen die zwei höchsten Werte der Folge, bei geraden n auf den höchsten Wert.

Binomialkoeffizienten für n zwischen Null und 39 und für r zwischen Null und 15 finden sich auf S. 25. Logarithmen der Binomialkoeffizienten für n zwischen 2 und 100 und r zwischen Null und $n/2$ finden sich auf S. 70–77. Für $101 \leqq n \leqq 999$ berechne man nach Gleichung (**101**) mit den Logarithmen der Fakultäten und ihrer Kehrwerte auf S. 26 und 27.

VIII. Reihen

Die Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ einer Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ mit bestimmter Gesetzmäßigkeit wird Reihe genannt.

1. Arithmetische Reihe 1. Ordnung

Bei ihr ist die Differenz d zweier aufeinanderfolgenden Glieder gleich:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

Die einzelnen Glieder sind somit

a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_n
a_1	$(a_1 + d)$	$(a_1 + 2d)$	$\ldots$	$a_1 + (n-1)d$

(**107**)

Die Summe der n ersten Glieder ist

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \tag{108}$$

Als Spezialfall von (**108**) sei die Summe der natürlichen Zahlenfolge $1, 2, 3, \ldots, n$ angeführt

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (109)$$

Beispiel: Die Summe aller Zahlen von 1 bis und mit 81 ist

$(81 \times 82)/2 = 3321$

2. Geometrische Reihe

Bei einer geometrischen Reihe besteht zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern immer dasselbe Verhältnis q, die einzelnen Glieder sind somit

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 q & a_1 q^2 & \cdots & a_1 q^{n-1} \end{array} \qquad (110)$$

Die Summe der n ersten Glieder ist

$$S = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \frac{q^n-1}{q-1} \quad (q \neq 1) \qquad (111)$$

Wenn $|q| < 1$ wird nach (**17**) $q^\infty = 0$, und (**111**) wird

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \quad (|q|<1) \qquad (112)$$

Mit Gleichung (**112**) lassen sich zum Beispiel unendliche periodische Dezimalbrüche in echte Brüche verwandeln.

Beispiele:

a) $0{,}3333\dot{3} = \frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}\cdots$

$$q=\frac{1}{10} \qquad a_1=\frac{3}{10}$$

$$0{,}3333\dot{3} = \frac{3}{10}\Big/\frac{9}{10} = \frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

b) $0{,}0333\dot{3} = \frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots$

$$q=\frac{1}{10} \qquad a_1=\frac{3}{100}$$

$$0{,}0333\dot{3} = \frac{3}{100}\Big/\frac{9}{10} = \frac{3}{90}=\frac{1}{30}$$

c) $0{,}2333\dot{3} = \frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots$

Die unendliche Reihe beginnt bei 3/100, folglich $q = 1/10$, $a_1 = 3/100$ usw., wie im vorigen Beispiel. Es sind noch 2/10 dazu zu addieren.

$$0{,}2333\dot{3} = \frac{2}{10}+\frac{1}{30} = \frac{60+10}{300}=\frac{7}{30}$$

d) $0{,}123\,123\,\dot{1}\dot{2}\dot{3} = \frac{123}{1000}+\frac{123}{1\,000\,000}+\cdots$

$$q=\frac{1}{1000} \qquad a_1=\frac{123}{1000}$$

$$0{,}123\,\dot{1}\dot{2}\dot{3} = \frac{123}{1000}\Big/\frac{999}{1000} = \frac{123}{999}=\frac{41}{333}$$

3. Binomische Reihe für ganze positive n

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n \qquad (113)$$

Vorzeichen: Wenn b negativ ist, sind alle jene Glieder negativ, in denen der Exponent von b ungerade ist.

Beispiele: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$ usw.

IX. Mittelwerte

Von n positiven Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist

a) arithmetisches Mittel $m_a = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}$ (**114**)

b) geometrisches Mittel $m_g = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n}$ (**115**)

c) harmonisches Mittel $m_h = 1 : \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$ (**116**)

Ist $n = 2$, so wird

$$m_a = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad (117)$$

$$m_g = \sqrt{x_1 x_2} \qquad (118)$$

$$m_h = \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2} \qquad (119)$$

Satz von CAUCHY: $m_a \geqq m_g \geqq m_h$ (**120**)

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

X. Lösung einiger Gleichungen

Die Lösungen der Gleichungen existieren nur, wenn alle Nenner von Null verschieden sind.

Gesucht ist x.

$$ax \pm b = 0; \quad x = \mp\frac{b}{a} \qquad (121)$$

$$\frac{a}{x} \pm b = 0; \quad x = \mp\frac{a}{b} \qquad (122)$$

1. Vereinfachungen von Gleichungen höheren Grades

$$(ax \pm b)^m \pm c = 0; \quad x = \frac{\sqrt[m]{\mp c} \mp b}{a} \qquad (123)$$

$$\sqrt[n]{ax \pm b} \pm c = 0; \quad x = \frac{(\mp c)^n \mp b}{a} \qquad (124)$$

2. Gleichungen 1. Grades mit zwei Unbekannten

Gesucht sind x und y.

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad (125)$$

$$y = -\frac{(a_1 x + c_1)}{b_1} = -\frac{(a_2 x + c_2)}{b_2}$$

3. Gleichungen 1. Grades mit drei Unbekannten

Gesucht sind x, y, z.

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$$

Man bilde zunächst

$$\left.\begin{aligned} A &= c_2 a_1 - c_1 a_2 \\ B &= c_2 b_1 - c_1 b_2 \\ C &= c_2 d_1 - c_1 d_2 \\ D &= c_2 a_3 - c_3 a_2 \\ E &= c_2 b_3 - c_3 b_2 \\ F &= c_2 d_3 - c_3 d_2 \end{aligned}\right\} \quad (126)$$

dann ist

$$x = \frac{BF - CE}{AE - BD}$$

$$y = -\frac{(C + Ax)}{B} = -\frac{(F + Dx)}{E}$$

$$z = -\frac{(a_1 x + b_1 y + d_1)}{c_1} = -\frac{(a_2 x + b_2 y + d_2)}{c_2} = -\frac{(a_3 x + b_3 y + d_3)}{c_3}$$

4. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten

$$a x^2 + b x + c = 0$$

$$x_{(1,2)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \quad (127)$$

Die Größe $D = b^2 - 4ac$ heißt Diskriminante der Gleichung. Wenn

$D > 0$ ergeben sich zwei reelle Lösungen,

$D = 0$ gibt es nur eine reelle Lösung,

$D < 0$ gibt es keine reelle Lösung.

5. Häufiger gebrauchte Exponentialgleichungen

$$x = 1 - e^{-\lambda}; \quad x = 1 - \text{antilog}\,(-0{,}434\,294\,4819\,\lambda) \quad (128)$$

$$a = 1 - e^{-z}; \quad z = -2{,}302\,585\,0930 \log (1 - a) \quad [0 \leqq a \leqq 1] \quad (129)$$

Wenn in Gleichung (**129**)

$$z = \frac{a x^b \pm c}{d}; \quad \log x = \frac{\log\left(\frac{dz \mp c}{a}\right)}{b} \quad (130)$$

wenn $b = 1$, fällt auf beiden Seiten das log-Zeichen weg

$$z = \frac{a b^x \pm c}{d}; \quad x = \frac{\log\left(\frac{dz \mp c}{a}\right)}{\log b} \quad (b \neq 1) \quad (131)$$

$$z = \frac{d}{a x^b \pm c}; \quad \log x = \frac{\log\left(\frac{d/z \mp c}{a}\right)}{b} \quad (132)$$

wenn $b = 1$, fällt auf beiden Seiten das log-Zeichen weg.

$$z = \frac{d}{a b^x \pm c}; \quad x = \frac{\log\left(\frac{d/z \mp c}{a}\right)}{\log b} \quad (b \neq 1) \quad (133)$$

Die Gleichungen (**130**) bis (**133**) besitzen keine Lösung, wenn

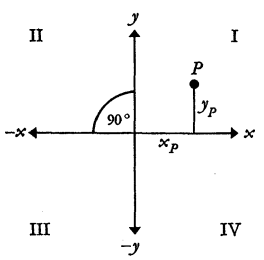
$(dz \mp c) < 0$ oder $(d/z \mp c) < 0$

Bei den Gleichungen (**130**) und (**132**) gilt dies aber nur, wenn $b \neq 1$.

Es folgen einige z-Werte [Lösungen von Gleichung (**129**)] für häufiger verwendete a.

a	$1-a$	$\log (1-a)$	$z = -\ln 10 \times \log (1-a) = -\ln (1-a)$
0,999	0,001	− 3	6,907 755 279
0,995	0,005	0,698 970 0043 − 3	5,298 317 367
0,99	0,01	− 2	4,605 170 186
0,975	0,025	0,397 940 0087 − 2	3,688 879 453
0,95	0,05	0,698 970 0043 − 2	2,995 732 274
0,90	0,10	− 1	2,302 585 093
0,85	0,15	0,176 091 2591 − 1	1,897 119 985
0,80	0,20	0,301 029 9957 − 1	1,609 437 912
0,75	0,25	0,397 940 0087 − 1	1,386 294 361
0,70	0,30	0,477 121 2547 − 1	1,203 972 804
0,65	0,35	0,544 068 0444 − 1	1,049 822 124
0,60	0,40	0,602 059 9913 − 1	0,916 290 731 9
0,55	0,45	0,653 212 5138 − 1	0,798 507 696 2
0,50	0,50	0,698 970 0043 − 1	0,693 147 180 4
0,45	0,55	0,740 362 6895 − 1	0,597 837 000 7
0,40	0,60	0,778 151 2504 − 1	0,510 825 623 7
0,35	0,65	0,812 913 3566 − 1	0,430 782 916 2
0,30	0,70	0,845 098 0400 − 1	0,356 674 944 0
0,25	0,75	0,875 061 2634 − 1	0,287 682 072 4
0,20	0,80	0,903 089 9870 − 1	0,223 143 551 5
0,15	0,85	0,929 418 9257 − 1	0,162 518 929 5
0,10	0,90	0,954 242 5094 − 1	0,105 360 515 7
0,05	0,95	0,977 723 6053 − 1	0,051 293 294 39
0,025	0,975	0,989 004 6157 − 1	0,025 317 807 98
0,01	0,99	0,995 635 1946 − 1	0,010 050 335 85
0,005	0,995	0,997 823 0807 − 1	0,005 012 541 823
0,001	0,999	0,999 565 4882 − 1	0,001 000 500 333

XI. Rechtwinkliges Koordinatensystem



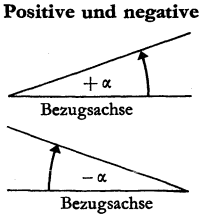
x-Achse = Abszissenachse
y-Achse = Ordinatenachse
I, II, III, IV = Quadranten
x_P und y_P = Koordinaten des Punktes P
x_P = Abszisse des Punktes P
y_P = Ordinate des Punktes P

Vorzeichen der Koordinaten eines Punktes in den 4 Quadranten

Quadrant	x	y
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

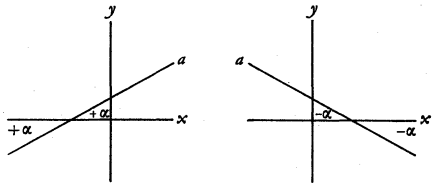
XII. Winkel, Winkelfunktionen, Arcusfunktionen

1. Positive und negative Winkel



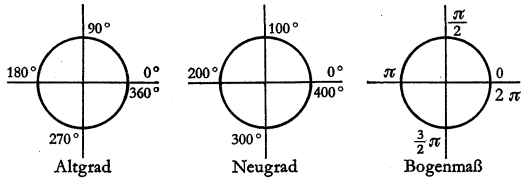
Eine Drehung im *Gegen*uhrzeigersinn wird als Drehung im positiven, eine Drehung im Uhrzeigersinn als solche im negativen Sinn definiert. Analog wird ein Winkel, dessen Messung von der Bezugsachse aus in positiver bzw. negativer Richtung erfolgt, positiv oder negativ genommen.

Als Steigungswinkel einer Geraden a wird in der Regel der *spitze* Winkel bezeichnet, den die Gerade mit der x-Achse bildet.



2. Winkelmaße

Die Grundlage für alle Winkelmaße bildet der Umfang eines um den Schnittpunkt der Winkelhalbgeraden gezogenen Kreises. Dieser wird in 360 gleiche Teile geteilt (altes Gradmaß, heute noch das üblichste) oder in 400 Teile (neues Gradmaß) oder mit seinem eigenen Kreisradius gemessen (Bogen- oder Radiantenmaß). Da der Umfang eines Kreises genau das (2π)-fache seines Radius beträgt, werden bei Angaben im Bogenmaß die Winkel oft als Bruchteile oder Mehrfache von π gekennzeichnet. Das Bogenmaß des Winkels α wird Arcus α (arc α) genannt.



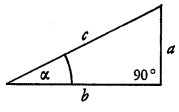
Gradmaß	0	1	30°	57° 17′45″	60°	90°	180°	270°	360°
Bogenmaß	0	0,01745	$\frac{\pi}{6}$	1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Vgl. auch den Abschnitt Winkel unter Maßeinheiten, S. 180.

3. Winkelfunktionen (trigonometrische Funktionen)

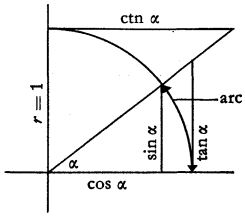
(ohne Secans und Cosecans)

Definitionen im rechtwinkligen Dreieck
(gelten nur für spitze Winkel zwischen 0 und 90°)



$$\left.\begin{aligned}\text{Sinus } \alpha &= \sin\alpha = \frac{a}{c}\\ \text{Cosinus } \alpha &= \cos\alpha = \frac{b}{c}\\ \text{Tangens } \alpha &= \tan\alpha = \frac{a}{b}\\ \text{Cotangens } \alpha &= \operatorname{ctn}\alpha = \frac{b}{a}\end{aligned}\right\} \quad (134)$$

(Tangens wird auch mit tg, Cotangens mit ctg und cot abgekürzt)



Darstellung der Winkelfunktionen am Einheitskreis
(Kreis mit Radius = 1)

Vorzeichen in den 4 Quadranten

Funktion	Quadrant I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
ctn	+	−	+	−

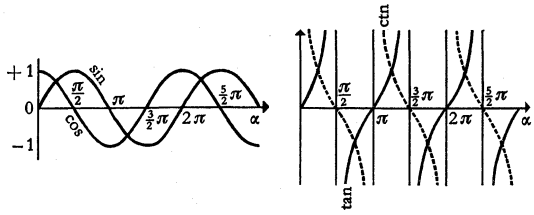
(135)

Variationsbereich der Winkelfunktionen in den 4 Quadranten

Funktion	Quadrant I	II	III	IV
sin	0 bis 1	1 bis 0	0 bis −1	−1 bis 0
cos	1 bis 0	0 bis −1	−1 bis 0	0 bis 1
tan	0 bis ∞	−∞ bis 0	0 bis ∞	−∞ bis 0
ctn	∞ bis 0	0 bis −∞	∞ bis 0	0 bis −∞

(136)

Verlauf der Winkelfunktionen



Funktionen negativer Winkel

$$\left.\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha\\ \cos(-\alpha) &= +\cos\alpha\\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \operatorname{ctn}(-\alpha) &= -\operatorname{ctn}\alpha\end{aligned}\right\} \quad (137)$$

Umformung von Funktionen stumpfer Winkel in solche spitzer Winkel

	$90° \pm \alpha$	$180° \pm \alpha$	$270° \pm \alpha$	$n^*(360°) \pm \alpha$
sin	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
tan	$\mp\operatorname{ctn}\alpha$	$\pm\tan\alpha$	$\mp\operatorname{ctn}\alpha$	$\pm\tan\alpha$
ctn	$\mp\tan\alpha$	$\pm\operatorname{ctn}\alpha$	$\mp\tan\alpha$	$\pm\operatorname{ctn}\alpha$

* n = ganze positive Zahl

(138)

Beispiel: $\sin 125° = \cos 35°$

Beziehungen der Winkelfunktionen unter sich

Funktion	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\operatorname{ctn}\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctn}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctn}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctn}^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\tan\alpha$	$\frac{1}{\operatorname{ctn}\alpha}$
$\operatorname{ctn}\alpha$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	$\operatorname{ctn}\alpha$

(139)

Vorzeichen der Quadratwurzel: Es wird durch den Quadranten bestimmt, in welchen der Winkel hineinreicht. Bestimmung des Vorzeichens in den Quadranten siehe **(135)**.

Funktionen des halbierten und des doppelten Winkels

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad (140)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \tag{141}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\sin\alpha}} \tag{142}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{143}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{144}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \tag{145}$$

Vorzeichen: Dort, wo ein $\pm$ steht, wird das Vorzeichen durch den Quadranten bestimmt, in den der *gesuchte* Winkel hineinreicht. Bestimmung des Vorzeichens in den Quadranten siehe (**135**).

Beziehungen zwischen den Funktionen zweier Winkel

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \tag{146}$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{147}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} \tag{148}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{149}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{150}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{151}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{152}$$

$$\tan\alpha\pm\tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \tag{153}$$

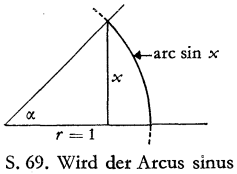
$$\sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) \tag{154}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) \tag{155}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) \tag{156}$$

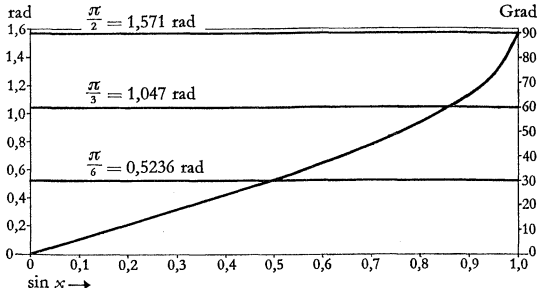
4. Arcusfunktionen

Die Arcus- oder zyklometrischen (Kreisbogen messenden) Funktionen sind die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen. Wir benötigen nur die Arcus-sinus-Funktion, die zur Stabilisierung der Streuung der Binomialverteilungen gebraucht wird.



Arcus sinus x, abgekürzt $\sin^{-1}x$ oder arc sin x, bedeutet das Bogen- oder Gradmaß jenes Winkels α, dessen Sinus $= x$ ist. Eine Arcus-sinus-Tafel im Bogenmaß, Bereich $0 \leqq x \leqq 1$, findet sich auf S. 69. Wird der Arcus sinus im Gradmaß gesucht, so sind die Werte der Tafel mit $180/\pi = 57{,}295\,779\,513$ zu multiplizieren.

Verlauf der Funktion arc sin x im Bereich $0 \leqq x \leqq 1$



XIII. Hyperbolische Funktionen

Wir benötigen nur die Funktion Tangens hyperbolicus z ($\tanh z$) und ihre Umkehrfunktion, Area Tangens hyperbolicus r (Ar tanh r oder $\tanh^{-1} r$), zur Transformation des Korrelationskoeffizienten r.

Sie sind definiert

$$\tanh z = r = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} \tag{157}$$

$$\tanh^{-1} r = z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} = 1{,}151\,292\,55\,\log_{10}\frac{1+r}{1-r} \tag{158}$$

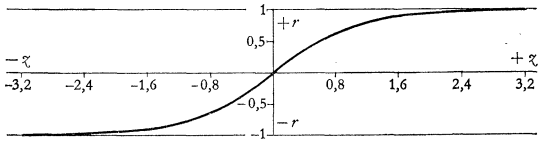
Wir benötigen nur zwei Beziehungen

$$\tanh(-z) = -\tanh z \tag{159}$$

$$\tanh^{-1}(-r) = -\tanh^{-1} r \tag{160}$$

Der Variationsbereich von $\tanh z$ ist -1 bis $+1$ für z von $-\infty$ bis $+\infty$.

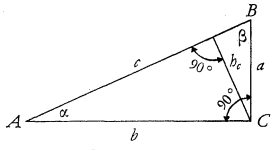
Verlauf der Funktion $\tanh z$ im Bereich $-3{,}2 \leqq 2 \leqq +3{,}2$.



Tafeln für $\tanh z$ bzw. $\tanh^{-1} r$ finden sich auf S. 64 und 65 bzw. 62.

XIV. Einige geometrische Berechnungen

1. Rechtwinkliges Dreieck ABC



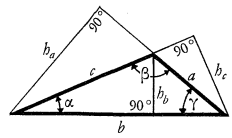
a, b = Katheten
c = Hypotenuse
h_c = Höhe auf Hypotenuse

Gegeben	Gesucht	Lösungen	
β	α	$= 90° - \beta$	(161)
a, b	α	$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	(162)
	c	$= \frac{a}{\sin\alpha}$	(163)
		$= \frac{b}{\cos\alpha}$	(164)

Gegeben	Gesucht	Lösungen	
a, b	c	$= \pm\sqrt{a^2 + b^2}$	(165)
	b_c	$= a\cos\alpha$	(166)
		$= b\sin\alpha$	(167)
		$= \frac{a\,b}{c}$	(168)
	Fläche A	$= \frac{a\,b}{2}$	(169)
a, c	α	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	(170)
	b	$= c\cos\alpha$	(171)
		$= \pm\sqrt{c^2 - a^2}$	(172)
	b_c	$= a\cos\alpha$	(173)
	Fläche A	$= \frac{a\,c\cos\alpha}{2}$	(174)
b, c	α	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	(175)
	a	$= c\sin\alpha$	(176)
		$= \pm\sqrt{c^2 - b^2}$	(177)
	b_c	$= b\sin\alpha$	(178)
	Fläche A	$= \frac{b\,c\sin\alpha}{2}$	(179)
a, α	b	$= \frac{a}{\tan\alpha}$	(180)
	c	$= \frac{a}{\sin\alpha}$	(181)
	b_c	$= a\cos\alpha$	(182)
	Fläche A	$= \frac{a^2}{2\tan\alpha}$	(183)
c, α	a	$= c\sin\alpha$	(184)
	b	$= c\cos\alpha$	(185)
	b_c	$= \frac{c\sin 2\alpha}{2}$	(186)
	Fläche A	$= \frac{c^2\sin 2\alpha}{4}$	(187)
c, b_c	α	$\sin 2\alpha = \frac{2\,b_c}{c}$	(188)
	a	$= \frac{b_c}{\cos\alpha}$	(189)
	b	$= \frac{b_c}{\sin\alpha}$	(190)
	Fläche A	$= \frac{c\,b_c}{2}$	(191)

2. Schiefwinkliges Dreieck

Anmerkung. Da im schiefwinkligen Dreieck keine Seite bevorzugt ist, ergeben sich weitere richtige Formeln, wenn man a, b, c usw. zyklisch vertauscht. Wenn in einer der Gruppen in irgendeiner Formel ein Buchstabe vertauscht wurde, so sind in allen andern Formeln der Gruppe die Buchstaben zu vertauschen, entsprechend dem Schema:



Einstufige Vertauschung	Zweistufige Vertauschung
$a \to b$	$a \to c$
$b \to c$	$b \to a$
$c \to a$	$c \to b$
$\alpha \to \beta$	$\alpha \to \gamma$
$\beta \to \gamma$	$\beta \to \alpha$
$\gamma \to \alpha$	$\gamma \to \beta$
$h_a \to h_b$	$h_a \to h_c$

(192)

Höhen und Flächen

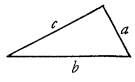
$$h_a = b\sin\gamma \quad (193)$$

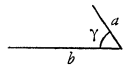
$$= c\sin\beta \quad (194)$$

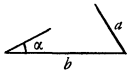
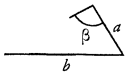
$$= a\,\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha} \quad (195)$$

$$\text{Fläche } A = \frac{a\,h_a}{2} \quad (196)$$

Gegeben	Gesucht	Lösungen	
$\beta + \gamma$	α	$180° - (\beta + \gamma)$	(197)
$\sin\alpha$	$\sin(\beta+\gamma)$	$= \sin\alpha$	(198)
$\cos\alpha$	$\cos(\beta+\gamma)$	$= -\cos\alpha$	
$\tan\alpha$	$\tan(\beta+\gamma)$	$= -\tan\alpha$	
a, b, c	α	$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$	(199)
	h_a	$= b\sin\gamma$	(200)
		$= \frac{2A}{a}$	(201)
	Fläche A	$= \frac{b\,c\sin\alpha}{2}$	(202)
		$= \pm\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	(203)
		wobei $s = \frac{a+b+c}{2}$	
a, b, γ	α	$\tan\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}$	(204)
	c	$= \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$	(205)
		$= \pm\sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma}$	(206)
	h_a	$= b\sin\gamma$	(207)
	h_b	$= a\sin\gamma$	(208)
	Fläche A	$= \frac{a\,b\sin\gamma}{2}$	(209)

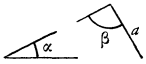




Gegeben	Gesucht	Lösungen	
a, b, α 	β	$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$	(210)
	c	$= \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$	(211)
		$= b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin\alpha}$	(212)
	h_a	$= b\sin\gamma$	(213)
	h_b	$= a\sin\gamma$	(214)
	h_c	$= b\sin\alpha$	(215)
	Fläche A	$= \frac{b}{2}\sin\alpha \times (b\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2\sin\alpha})$	(216)
a, b, β 	α	$\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b}$	(217)
	c	$= \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$	(218)
	h_a	$= b\sin\gamma$	(219)
	h_b	$= a\sin\gamma$	(220)
	h_c	$= a\sin\beta$	(221)
	Fläche A	$= \frac{a}{2}\sin\beta \times (a\cos\beta \pm \sqrt{b^2 - a^2\sin\beta})$	(222)

Anmerkung: Bei dieser Gruppe [gegeben zwei Seiten und anliegender Winkel, Gleichungen (**210**) bis (**216**) und (**217**) bis (**222**)] gilt folgendes:

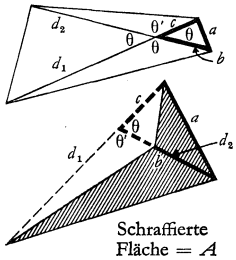
	(**210**) bis (**216**)	(**217**) bis (**222**)
Lösung nur möglich,		
wenn	$b\sin\alpha \leqq a$	$a\sin\beta \leqq b$
Ist	$b\sin\alpha = a$	$a\sin\beta = b$
so ist	$\beta = 90°$	$\alpha = 90°$
Ist	$b\sin\alpha < a$ und $a < b$	$a\sin\beta < b$ und $b < a$
so ergeben sich zwei Lösungen:		
	β_1 und $\beta_2 = 180° - \beta_1$	α_1 und $\alpha_2 = 180° - \alpha_1$
Ist	$b\sin\alpha < a$ und $a \geqq b$	$a\sin\beta < a$ und $b \geqq a$
so gibt es keine Lösung.		

a, β, γ	b	$= \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$	(223)
	c	$= \frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$	(224)
(Wenn zwei Winkel gegeben sind, ist immer auch der dritte gegeben!)	h_a	$= \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$	(225)
	h_b	$= a\sin\gamma$	(226)
	h_c	$= a\sin\beta$	(227)
 $\gamma = 180 - (\alpha+\beta)$	Fläche A	$= \frac{a^2}{2} \times \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$	(228)

3. Vierecke

Allgemein: Die Fläche jedes beliebigen Viereckes läßt sich aus den Diagonalen und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel θ oder $\theta' = 180° - \theta$ errechnen:

Beliebiges Viereck



Schraffierte Fläche $= A$

$$\sin\theta = \sin\theta' = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (229)$$

wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ den halben Umfang des durch die beiden Diagonalen und die Seite a begrenzten Dreieckes bedeutet. Es kann ein beliebiges Dreieck gewählt werden. Die mit b, c benannten Seiten müssen aber den Winkel θ oder θ' immer *einschließen*.

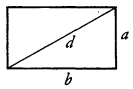
$$\text{Fläche } A = \frac{d_1 d_2 \sin\theta}{2} \quad (230)$$

Quadrat

$$d = a\sqrt{2} = 1{,}414214\,a \quad (231)$$

$$\text{Fläche } A = a^2 \quad (232)$$

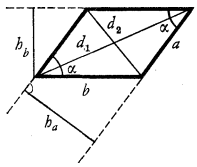
Rechteck



$$d = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (233)$$

$$\text{Fläche } A = a\,b \quad (234)$$

Parallelogramm



$$d_1, d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab\cos\alpha} \quad (235)$$

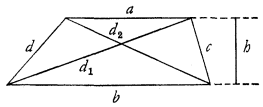
$$= \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2a\sqrt{b^2 - h_a^2}} \quad (236)$$

$$h_a = b\sin\alpha \quad (237)$$

$$h_b = a\sin\alpha \quad (238)$$

$$\text{Fläche } A = a\,h_a = b\,h_b = a\,b\sin\alpha \quad (239)$$

4. Trapezoid



a, b parallele, c, d nicht parallele Seiten, d_1 = Diagonale zwischen den Schnittpunkten von d, b und von a, c.

$$d_1 = \sqrt{a\,b + \frac{a\,c^2 - b\,d^2}{a-b}} \quad (240)$$

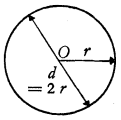
$$d_2 = \sqrt{a\,b + \frac{a\,d^2 - b\,c^2}{a-b}} \quad (241)$$

$$h = \frac{2}{a-b} \times \sqrt{s(s-a+b)(s-c)(s-d)} \quad (242)$$

wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$

$$\text{Fläche } A = \frac{(a+b)\,h}{2} \quad (243)$$

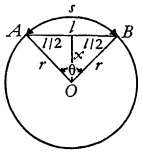
5. Kreis



Umfang $c = 2r\pi = 6{,}2831853\,r$ **(244)**
$= 3{,}14159265\,d$

Fläche $A = r^2\pi = 3{,}14159265\,r^2$ **(245)**
$= 0{,}78539816\,d^2$

Kreissektor



Winkel θ zwischen den Radien r

$$\cos\theta = 1 - \frac{l^2}{2r^2} \quad \textbf{(246)}$$

oder

$$\theta = 180° - 2\arcsin(x/r) \quad \textbf{(247)}$$

Länge der Sehne

$$l = 2r\sin\frac{\theta}{2} \quad \textbf{(248)}$$

Länge des Kreisbogens s

$$s = \frac{r\pi\theta}{180} = 0{,}017453293\,r\theta \quad \textbf{(249)}$$

Fläche A_{Se} des Sektors

$$A_{Se} = \frac{r^2\pi\theta}{360} = 0{,}0087266463\,r^2\theta \quad \textbf{(250)}$$

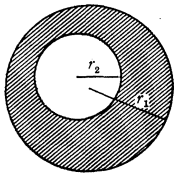
Fläche des Dreieckes OAB

$$A_{\triangle} = \frac{r^2\sin\theta}{2} \quad \textbf{(251)}$$

Fläche des Kreissegmentes AsB

$$A_{Sg} = \frac{r^2\pi\theta}{360} - \frac{r^2\sin\theta}{2} \quad \textbf{(252)}$$
$$= 0{,}008726463\,r^2 \times (\theta - 57{,}2957795\sin\theta)$$

Kreisring

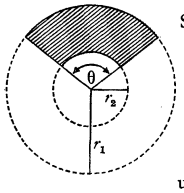


(Die zwei Begrenzungskreise müssen nicht konzentrisch sein)

Schraffierte Fläche A

$$A = \pi(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) \quad [r_1 \geqq r_2] \quad \textbf{(253)}$$
$$= 3{,}14159265\,(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$$

Kreisringsegment (konzentrisches)



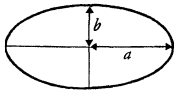
Schraffierte Fläche A

$$A = \frac{\pi\theta}{360}(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)\,[r_1 \geqq r_2] \quad \textbf{(254)}$$

$$\frac{\pi}{360} = 0{,}00872664626$$

Für den Winkel θ siehe Gleichungen **(246)** und **(247)**

6. Ellipse

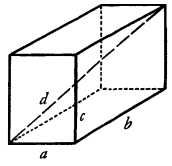


Umfang $\sim 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ **(255)**
$\sim 4{,}443\sqrt{a^2+b^2}$

Fläche $A = ab\pi = 3{,}14159265\,ab$ **(256)**

XV. Einige stereometrische Berechnungen

1. Quader (alle Kanten stehen senkrecht aufeinander)

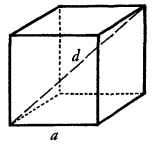


Oberfläche
$A = 2(ab + bc + ca)$ **(257)**

Raumdiagonale
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ **(258)**

Volumen
$V = abc$ **(259)**

Beim Würfel werden die Gleichungen **(257)** bis **(259)**

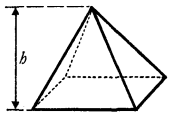


$A = 6a^2$ **(260)**

$d = a\sqrt{3} = 1{,}732051\,a$ **(261)**

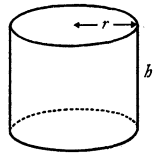
$V = a^3$ **(262)**

2. Pyramide (beliebige Grundfläche)



Volumen
$V = \frac{h}{3}A_G$ **(263)**
(A_G = Grundfläche)

3. Kreiszylinder (gerader)

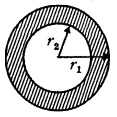


Fläche des Mantels
$A_M = 2r\pi h = 6{,}2831853\,rh$ **(264)**

Ganze Oberfläche
$A = 2r\pi(r + h)$
$= 6{,}2831853\,r(r + h)$ **(265)**

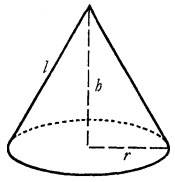
Volumen
$V = r^2\pi h = 3{,}14159265\,r^2 h$ **(266)**

Beim Hohlzylinder ist



$V_{Hz} = (r_1^2 - r_2^2)\pi h \quad [r_1 \geqq r_2]$ **(267)**
$= 3{,}14159265\,(r_1^2 - r_2^2)h$

4. Kreiskegel (gerader)

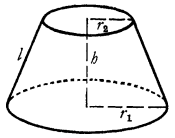


Fläche des Mantels
$A_M = r\pi l = 3{,}14159265\,rl$ **(268)**
(l = Mantellinie $= \sqrt{r^2 + h^2}$)

Ganze Oberfläche
$A = r\pi(r + l)$ **(269)**
$= 3{,}14159265\,r(r + l)$

Volumen
$V = \frac{1}{3}r^2\pi h = 1{,}04719755\,r^2 h$ **(270)**

Kegelstumpf (gerader, Deckfläche parallel zur Grundfläche)

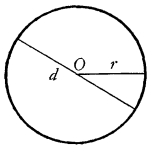


Fläche des Mantels
$A_M = \pi l(r_1 + r_2)$ **(271)**
$= 3{,}14159265\,l(r_1 + r_2)$

Ganze Oberfläche
$A = \pi[r_1(r_1 + l) + r_2(r_2 + l)]$ **(272)**

Volumen
$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$ **(273)**
$= 1{,}04719755\,h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

5. Kugel



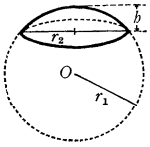
Oberfläche

$$A = 4r^2\pi = \pi d^2 \quad (274)$$
$$= 12{,}566\,3706\, r^2 = 3{,}141\,592\,65\, d^2$$

Volumen

$$V = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{\pi d^3}{6} \quad (275)$$
$$= 4{,}607\,669\,23\, r^3 = 0{,}523\,598\,78\, d^3$$

Kugelsegment



Oberfläche des Mantels

$$A_M = \pi(r_2^2 + h^2) = 2r_1\pi h \quad (276)$$

Ganze Oberfläche

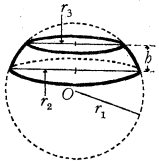
$$A = \pi(2r_2^2 + h^2) \quad (277)$$

Volumen

$$V = \frac{\pi h}{6}(3r_2^2 + h^2) = \frac{\pi h^2}{3}(3r_1 - h) \quad (278)$$

($\pi = 3{,}141\,592\,65$; $\pi/6 = 0{,}523\,598\,78$; $\pi/3 = 1{,}047\,197\,55$)

Kugelzone (ausgeschnitten von zwei parallelen Ebenen im Abstand h voneinander)



Oberfläche des Mantels

$$A_M = 2\pi r_1 h = 6{,}283\,1853\, r_1 h \quad (279)$$

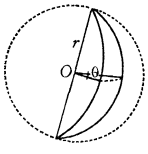
Ganze Oberfläche

$$A = \pi(r_2^2 + 2r_1 h + r_3^2) \quad (280)$$

Volumen

$$V = \frac{\pi h}{6}(3r_2^2 + 3r_3^2 + h^2) \quad (281)$$
$$= 0{,}523\,598\,78\, h\,(3r_2^2 + 3r_3^2 + h^2)$$

Kugelkeil



Volumen

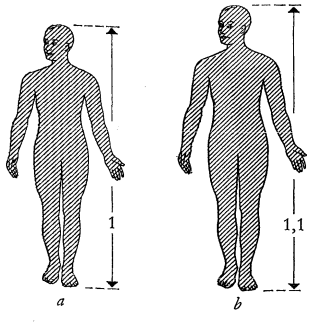
$$V = \frac{\pi r^3 \theta}{270} = 0{,}011\,635\,528\, r^3\theta \quad (282)$$

[für θ vgl. **(246)** und **(247)**]

(θ = Winkel zwischen den durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebenen, die den Keil herausschneiden.)

6. Ähnliche Körper

Sie verhalten sich der Oberfläche nach wie die Quadrate, dem Inhalt nach wie die Kuben entsprechender Längen. (283)



Das heißt

b ist 10 % größer,

hat 21 % mehr Oberfläche und

33 % mehr Gewicht.

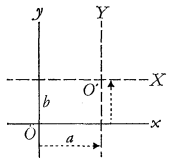
XVI. Einige Formeln der analytischen Geometrie

1. Transformationen am rechtwinkligen Koordinatensystem

Die transformierten Koordinaten werden mit C, die transformierten Variablen mit X, Y bezeichnet, die nicht transformierten Koordinaten und Variablen mit c, x, y. Der Einfachheit halber werden die Transformationen im I. Quadranten demonstriert (vgl. Abschnitt XI), die Formeln sind aber allgemeingültig.

a) Parallelverschiebung

Der Koordinatenursprung O soll nach O' verschoben werden. Die Koordinaten von O' sind im nicht transformierten System a in x-Richtung und b in y-Richtung.



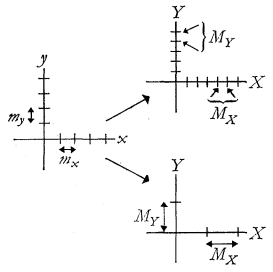
Transformation $c \to C$

$$X = x - a \quad (284)$$
$$Y = y - b$$

Transformation $C \to c$

$$x = a + X \quad (285)$$
$$y = b + Y$$

b) Lineare Maßstabsänderung



Transformation $c \to C$

$$X = \frac{M_X}{m_x}x \quad (286)$$
$$Y = \frac{M_Y}{m_y}y$$

Transformation $C \to c$

$$x = \frac{m_x}{M_X}X \quad (287)$$
$$y = \frac{m_y}{M_Y}Y$$

c) Parallelverschiebung und lineare Maßstabsänderung

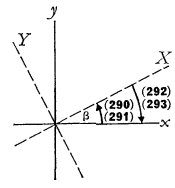
Transformation $c \to C$

$$X = \frac{M_X}{m_x}(x - a)$$
$$Y = \frac{M_Y}{m_y}(y - b) \quad (288)$$

Transformation $C \to c$

$$x = a + \frac{m_x}{M_X}X$$
$$y = b + \frac{m_y}{M_Y}Y \quad (289)$$

d) Drehung des Koordinatensystems



Transformation $c \to C$

$$X = x\cos\beta + y\sin\beta \quad (290)$$
$$Y = y\cos\beta - x\sin\beta$$

oder

$$X = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}(x + y\tan\beta)$$
$$Y = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}(y - x\tan\beta) \quad (291)$$

Transformation $C \to c$

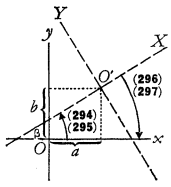
$$x = X\cos\beta - Y\sin\beta \quad (292)$$
$$y = X\sin\beta + Y\cos\beta$$

oder

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}(X - Y\tan\beta)$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}(Y + X\tan\beta) \quad (293)$$

e) Drehung des Koordinatensystems und Parallelverschiebung

Transformation $c \rightarrow C$



$$X = (x-a)\cos\beta + (y-b)\sin\beta \qquad (294)$$
$$Y = (y-b)\cos\beta - (x-a)\sin\beta$$

oder

$$X = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}[x - a + (y-b)\tan\beta] \qquad (295)$$
$$Y = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}[y - b - (x-a)\tan\beta]$$

Transformation $C \rightarrow c$

$$x = a + X\cos\beta - Y\sin\beta \qquad (296)$$
$$y = b + Y\cos\beta + X\sin\beta$$

oder

$$x = a + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}(X - Y\tan\beta) \qquad (297)$$
$$y = b + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}(Y + X\tan\beta)$$

2. Die Gerade

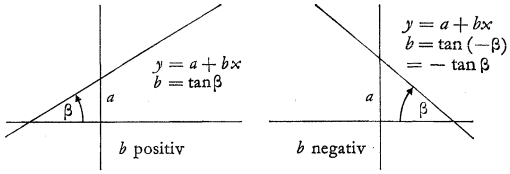
Allgemeine Gleichung:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (298)$$

Steigungsgleichung

$$y = a + bx \quad \text{oder} \quad x = \frac{y-a}{b} \qquad (299)$$

a = Interzept auf der y-Achse, b = Tangens des Steigungswinkels β = Steigungsmaß der Geraden. Zu beachten: $b = \tan\beta$ ist nur unter der Voraussetzung richtig, daß auf beiden Koordinatenachsen die gleiche Einheit abgetragen ist.



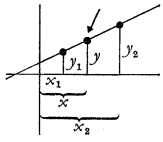
Spezialfälle

$x = a$ ist die Gleichung einer Parallelen zur y-Achse (300)

$y = c$ ist die Gleichung einer Parallelen zur x-Achse (301)

Eine Gerade steht senkrecht auf einer andern Geraden mit Steigungsmaß b, wenn ihr Steigungsmaß $-1/b$ beträgt. (302)

Gerade durch zwei Punkte mit den Koordinaten x_1, y_1; x_2, y_2



$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (303)$$

Diese Formel braucht man zur linearen Interpolation.

Beispiel: Tafelwerte:

x	y
110	83,83
120	95,66

Gesucht: der y-Wert für $x = 116$

Lösung: $y = 83{,}83 + \frac{95{,}66 - 83{,}83}{120 - 110}(116 - 110) = 90{,}93$

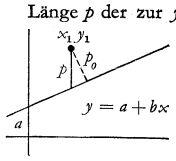
Gerade mit dem Steigungsmaß b durch einen Punkt x_1, y_1

$$y = y_1 + b(x - x_1) \qquad (304)$$

Gerade durch den Ursprung und einen Punkt x_1, y_1

$$y = \frac{y_1}{x_1}x \qquad (305)$$

Länge p der zur y-Achse parallel verlaufenden Strecke zwischen einem Punkt x_1, y_1 und der Geraden $y = a + bx$

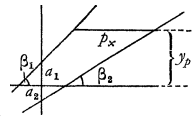


$$p = y_1 - a - bx_1 \qquad (306)$$

Kürzester (orthogonaler) Abstand p_0 zwischen einem Punkt und der Geraden $y = a + bx$

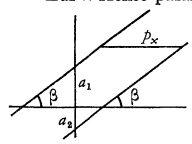
$$p_0 = \frac{y_1 - a - bx_1}{\sqrt{1+b^2}} \qquad (307)$$

Zur x-Achse paralleler Abstand p_x in Schnitthöhe y_p zwischen zwei Geraden $y = a_1 + b_1x$ und $y = a_2 + b_2x$



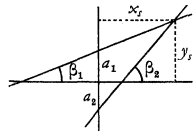
$$p_x = \left| \frac{y_p - a_1}{b_1} - \frac{y_p - a_2}{b_2} \right| \qquad (308)$$

Zur x-Achse paralleler Abstand p_x zwischen zwei Parallelen $y = a_1 + bx$ und $y = a_2 + bx$ [Spezialfall von (308): $b_1 = b_2$]



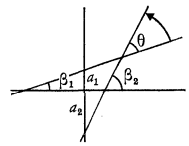
$$p_x = \left| \frac{a_1 - a_2}{b} \right| \qquad (309)$$

Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden $y = a_1 + b_1x$ und $y = a_2 + b_2x$



$$x_s = \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}$$
$$y_s = \frac{b_1a_2 - b_2a_1}{b_1 - b_2} \qquad (310)$$

Winkel θ zwischen zwei Geraden mit den Steigungen b_1 und b_2

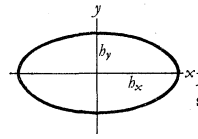


$$\tan\theta = \frac{b_1 - b_2}{b_1b_2 + 1} \qquad (311)$$

Unter dem Winkel θ wird derjenige positive Winkel verstanden, um den man die erste Gerade drehen muß, damit sie mit der zweiten einschließlich der Richtung zusammenfällt. Zu beachten: Gleichung (311) ist nur unter der Voraussetzung richtig, daß auf beiden Koordinatenachsen die gleiche Einheit abgetragen ist.

3. Die Ellipse

Hauptachsengleichung (angepaßt an späteren Gebrauch)



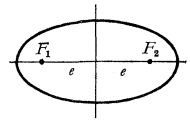
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2 \qquad (312)$$

a und b bestimmen das Verhältnis der Halbachsen zueinander und damit die Gestalt der Ellipse.

Bezeichnet man mit b_x die große, mit b_y die kleine Halbachse, so wird (312)

$$\frac{x^2}{b_x^2} + \frac{y^2}{b_y^2} = 1 \quad \begin{cases} b_x^2 = c^2a^2 \\ b_y^2 = c^2b^2 \end{cases} \qquad (313)$$

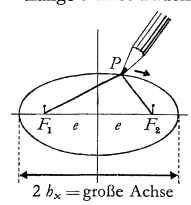
Abstand der Brennpunkte F_1 und F_2



$$2e = 2\sqrt{b_x^2 - b_y^2} \qquad (314)$$

e wird lineare Exzentrizität genannt.

Länge s eines Fadens vom Brennpunkt F_1 zum Punkte P auf der Kurve und von dort zum Brennpunkt F_2 (= Summe s der Brennstrahlen nach einem Punkte der Kurve)



$$s = 2b_x = \text{große Achse} \qquad (315)$$

Fadenkonstruktion der Ellipse nach (315), wobei der Abstand e nach (314) bestimmt wird.

Schrägstehende Ellipsen und entsprechende Koordinatentransformationen sowie weitere Kurven zweiten Grades werden später im Text, soweit benötigt, kurz besprochen. Flächeninhalt und Umfang der Ellipse siehe die Gleichungen (255) und (256).

Es ist unmöglich, auf den uns zur Verfügung stehenden wenigen Seiten eine ausführliche Anleitung zu den zahlreichen statistischen Tafeln zu geben, die in die 6. Auflage der *Wissenschaftlichen Tabellen* neu aufgenommen worden sind.

Wir beschränken uns im folgenden auf das Grundsätzliche, das ein Nichtmathematiker braucht, um einfache statistische Aufgaben zu lösen.

Einleitung

Statistik als angewandte Wahrscheinlichkeitsrechnung ist überall dort erforderlich, wo Resultate von Handlungsabläufen zu beurteilen sind, die zwar gewissen Grundgesetzen gehorchen, daneben aber auch noch durch unbekannte Faktoren, durch den «Zufall», modifiziert werden. In den empirischen Wissenschaften, den exakten wie den biologischen, dürfte dies überall zutreffen, im weiteren Sinne auch bei den abstrakten Wissenschaften:

On peut même dire, à parler en rigueur, que presque toutes nos connaissances ne sont que probables; et dans le petit nombre des choses que nous pouvons savoir avec certitude, dans les sciences mathématiques elles-mêmes, les principaux moyens de parvenir à la vérité, l'induction et l'analogie, se fondent sur les probabilités... (De Laplace, 1820)[1].

Das Mißtrauen, das der Statistik von medizinischer Seite oft entgegengebracht wird, gründet sich einerseits auf den bekannten Satz «mit Statistik läßt sich alles beweisen» und andererseits auf den Umstand, daß die Mathematik beim durchschnittlich eher intuitiv handelnden Arzt nicht besonders beliebt ist. Sicherlich zu Unrecht, ist doch die Statistik einer der lebendigsten Zweige der Mathematik und in ihren Grundzügen zur Orientierung und Selbstkontrolle leicht erlernbar. In diesem Zusammenhange sei nur daran erinnert, daß jede Diagnose das Resultat einer bewußt oder unbewußt durchgeführten Wahrscheinlichkeitsrechnung darstellt.

Das diskreditierende Schlagwort der alles beweisenden Statistik ist eine Folge ihrer falschen Anwendung sowie fehlerhafter oder zu weit gehender Interpretation. Statistik ist eine Methode wie jede andere wissenschaftliche Methode. Als solche besitzt sie eo ipso keine Beweiskraft. Andererseits ist sie die einzige Methode, welche die Beurteilung zufallsbeeinflußter (stochastischer) Größen nach soliden, reproduzierbaren, auf logisch-mathematischen Überlegungen beruhenden Regeln erlaubt. Weit eher gilt deshalb der zitierte Satz im umgekehrten Sinne, indem *ohne statistische Kenntnisse projektierte und verwertete Untersuchungen keine Beweiskraft besitzen.* Man vergegenwärtige sich, wie das menschliche Urteil stark von unterbewußten Wünschen und von der selbst beim ärgsten Pessimisten tief verankerten Tendenz beeinflußt wird, die eigenen Chancen höher einzuschätzen. Selbst der Vorsichtigste kann durch diese psychologischen Faktoren fehlgeleitet werden, wenn er sich nicht durch eine geeignete Selbstkontrolle davor schützt:

Le sentiment par lequel l'homme s'est placé longtemps au centre de l'univers, en se considérant comme l'objet spécial des soins de la nature, porte chaque individu à se faire le centre d'une sphère plus ou moins étendue, et à croire que le hasard a pour lui des préférences. Soutenus par cette opinion, les joueurs exposent souvent des sommes considérables à des jeux dont ils savent que les chances leur sont contraires. Dans la conduite de la vie, une semblable opinion peut quelquefois avoir des avantages; mais le plus souvent elle conduit à des entreprises funestes. Ici, comme en tout, les illusions sont dangereuses et la vérité seule est généralement utile.

Un des grands avantages du Calcul des Probabilités est d'apprendre à se défier des premiers aperçus. Comme on reconnaît qu'ils trompent souvent lorsqu'on peut les soumettre au calcul, on doit en conclure que sur d'autres objets il ne faut s'y livrer qu'avec une circonspection extrême (De Laplace, 1820)[1].

So hat denn auch «der Wunsch als Vater des Gedankens», getarnt als «nach unserer Erfahrung», «unserer Ansicht», «unserer Überzeugung» usw. und mit einigen Prozentzahlen untermauert, einiges auf seinem Gewissen, wenn er auch als Ansporn, Neues zu suchen, unentbehrlich sein mag. Man denke an die unzähligen besseren Behandlungsmethoden, Medikamente usw., die nach einem enthusiastischen Aufschwung sang- und klanglos wieder im Dunkeln verschwinden.

Es wäre manchem Forscher viel vergebliche Mühe und Zeit erspart geblieben, wenn er seine Hypothesen und Entdeckungen vor der Publikation einer statistischen Prüfung unterzogen hätte. Diese Erkenntnis ist in den letzten Jahren sichtlich Allgemeingut geworden, und die Zusammenarbeit zwischen klinischer Medizin und Statistik ist schon sehr eng.

Damit entsteht eine andere Gefahr, die nicht übersehen werden darf. Man neigt im allgemeinen dazu, die Bedeutung eines neuerworbenen Forschungsinstrumentes zu überschätzen, besonders dann, wenn seine Handhabung noch ungeläufig und mühsam ist. Man stellt allzusehr auf die mit ihm gewonnenen Resultate ab, wobei Selbstkritik, Abschätzung der richtigen Proportionen, Überprüfung der experimentellen Resultate unterlassen oder zu leicht genommen werden. Einen solchen Dispens gibt die Statistik selbstverständlich nicht. Mit zunehmender Erfahrung wird der Anfänger im Gegenteil bemerken, daß das statistische Gedankengut ihn vorsichtiger, aber auch intuitiver gemacht hat.

1. Einleitende Definitionen*

Zufallsbeeinflußte Experimente lassen sich gedanklich mit einer Urnenoperation vergleichen, wie sie zum Beispiel eine Lotterieziehung darstellt: Eine Urne sei mit Kugeln gefüllt, die durch die Zahlen 0, 1, 2, . . ., 9 gekennzeichnet sind. Vor Beginn der Ziehungen wird der Urneninhalt gut durchgemischt. Der Spieler, der die Kugeln der Urne entnimmt, soll auf die Auswahl keinen Einfluß ausüben können.

Auf Grund dieses Schemas bezeichnen wir

- das Durchmischen des Urneninhaltes als *Verzufälligen* (randomisation) des experimentellen Ausgangsmaterials; (316)
- die die Kugeln kennzeichnenden Zahlen 0, 1, 2, . . ., 9 als *Merkmale;* (317)
- die Gesamtheit aller Kugeln in der Urne als Grundgesamtheit oder *Bevölkerung* (population); (318)
- einen Zug als *Versuch;* (319)
- N Versuche als *zufälliges Stichprobensammeln* (random sampling); (320)
- das Ergebnis eines Versuches, wenn zum Beispiel die Zahl 5 gezogen wird, als *zufälliges Ereignis* 5; (321)
- das Ergebnis von N Versuchen als *zufällige Stichprobe* (random sample) des Umfanges N, kurz als Stichprobe N; (322)
- die Reihenfolge der Ereignisse als *zufällige Folge* [in unserem Beispiel sind dies zufällig angeordnete Zahlen oder *Zufallszahlen* (random numbers)]; (323)
- die relative Häufigkeit der Merkmale in der Bevölkerung als die *Wahrscheinlichkeit* dieser Merkmale, gezogen zu werden; (324)
- die relative Häufigkeit der Merkmale in der Stichprobe als *Schätzung* der Wahrscheinlichkeit dieser Merkmale; (325)
- die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten auf die verschiedenen Merkmale als Wahrscheinlichkeitsverteilung, kurz als *Verteilung.* (326)

Auf einzelne dieser Begriffe wird später noch näher eingegangen werden.

2. Bevölkerung und Stichprobe

Eine Bevölkerung ist endlich oder unendlich, wenn die Versuche (Ziehungen) endlich oder unendlich viele Male wiederholt werden können. (327)

Eine endliche Bevölkerung, das heißt eine Urne mit einer endlichen Anzahl Kugeln, läßt sich durch einen Kunstgriff in eine unendliche verwandeln: Man legt die Kugel nach jedem Zuge wieder in die Urne zurück. Eine solche Urnenoperation nennt man *Stichprobensammeln mit Zurücklegen* (sampling with replacement). (328)

Einer unendlichen Bevölkerung lassen sich unendlich viele Stichproben entnehmen, die zum Beispiel alle den gleichen Umfang N haben. Die Gesamtheit aller dieser Stichproben nennen wir Bevölkerung aller Stichproben, des Umfanges N, kurz *Stichprobenbevölkerung* N, und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung *Stichprobenverteilung* N. (329)

Eine unendliche Stichprobenbevölkerung läßt sich auch bei Stichproben aus einer endlichen Bevölkerung ähnlich wie in (328) erzeugen: Man legt die erste Stichprobe gesamthaft wieder in die Urne zurück, zieht eine zweite Stichprobe des gleichen Umfanges, legt auch diese wieder (330)

* Der Mathematiker wird verstehen, wenn wir eine Darstellung wählen, die dem Nichtmathematiker intuitiv leichter verständlich ist als eine streng mathematische.

zurück usw. *Alle Stichprobenbevölkerungen können deshalb als unendlich angesehen werden:* eines der grundlegenden Konzepte der mathematischen Statistik. (330)

Maßzahlen, wie Mittelwert und Streuung, die sich auf die Bevölkerung beziehen, bezeichnet man als *Parameter,* ihr Gegenstück in der Stichprobe als *Statistiken* (statistics). (331)

Symbole, die sich auf die Bevölkerung beziehen, zeichnen wir durch **fette** Schrift aus, wenn eine Unterscheidung zwischen Stichproben- und Bevölkerungssymbolen angebracht ist. Ausnahmen bilden die Symbole für Mittelwert und Streuung: μ und σ^2 beziehen sich auf die Bevölkerung, $\bar{x}$ und s^2 auf die Stichprobe. (332)

3. Merkmal und Ereignis

Merkmale sind gestapelte (mögliche) Ereignisse in der Urne, Ereignisse gezogene Merkmale außerhalb der Urne. Wo keine Verwechslungsgefahr besteht, verwenden wir deshalb das Wort «Ereignis» auch für «Merkmal». So sprechen wir zum Beispiel von der «Bevölkerung der Ereignisse rot und schwarz» usw. (333)

Ist A ein Ereignis, so nennt man das Nichteintreffen von A sein *komplementäres Ereignis,* von uns geschrieben Nicht-A. Beispiele: Erfolg oder Mißerfolg, lebend oder tot, 6 oder Nicht-6 beim Würfeln usw. (334)

Das Komplementärereignis Nicht-A ist vielfach ein Ereignis B. Anstatt eines Knaben kann ein Mädchen geboren werden. Solche Ereignisse nennt man *einander ausschließende Ereignisse,* geschrieben A oder B oder auch A, B. A oder Nicht-A in (**334**) sind somit per definitionem einander ausschließende Ereignisse. (335)

Gleichzeitig eintreffende Ereignisse lassen sich wie *aufeinanderfolgende* Ereignisse behandeln. Treffen die Ereignisse $A, B, C, \ldots$ gleichzeitig oder nacheinander ein, so schreiben wir: A und B und $C \ldots$ oder auch $ABC \ldots$ (336)

Trifft ein Ereignis A unter der Bedingung ein, daß das Ereignis B eingetroffen ist [oder gleichzeitig mit eintrifft, vgl. (**336**)], so nennt man A ein *bedingtes Ereignis,* geschrieben $A|B$, gelesen Ereignis A unter der Bedingung B. B kann mehrere Bedingungen enthalten. (337)

Ein Ereignis, das aus verschiedenen Ereignissen zusammengesetzt ist, nennt man ein *zusammengesetztes Ereignis.* (338)

Qualitative Merkmale können durch Zahlen gekennzeichnet werden, wie zum Beispiel 1 für Erfolg, 0 für Mißerfolg. (339)

Sind die Ereignisse an sich schon Zahlen, so bezeichnen wir sie mit x, wenn sich nicht, wie bei einigen Stichprobenverteilungen, schon andere Symbole eingebürgert haben. (340)

Durchläuft x (in einem endlichen Intervall) nur endlich viele Zahlen, so spricht man von einer *diskreten Zufallsveränderlichen* oder *-variablen.* x ändert sich in diesem Fall *sprunghaft.* Beispiele: 0, 1, 2, 3, ... Erfolge; 25, 26, 27, ... Atemzüge usw. (341)

Bedeuten die Zahlen 1, 2, 3, ... den kleinsten, den zweitkleinsten, den drittkleinsten Wert usw., so spricht man von einer (nach Größe) geordneten oder *rangierten Folge.* Bei einer solchen kann der *genaue* Zahlenwert, der den Rängen «der kleinste», der «zweitkleinste» usw. zugrunde liegt, unbekannt sein. Beispiel 1: Man kann eine Menschengruppe nach Körpergröße in einer Reihe ordnen, ohne die genauen Körperlängen zu kennen. (342)

Durchläuft x in einem Intervall alle unendlich vielen Zahlen dieses Intervalls, so spricht man von einer *stetigen* Zufallsveränderlichen oder -variablen. x ändert sich in diesem Falle *kontinuierlich.* Beispiele stetiger Zufallsvariablen sind Länge, Fläche, Volumen, Gewicht, Temperatur, Zeit, Konzentrationen usw., das heißt Variablen, die *gemessen* werden können. (343)

In Wirklichkeit bestehen stetige Zufallsveränderliche nur in der Vorstellung, weil alle Meßwerte gerundete Zahlen darstellen. Wenn zum Beispiel bei einer Waage das Milligramm das kleinste Meßintervall ist, so wird man die gewogenen Gewichte auf das nächstliegende Milligramm auf- oder abrunden. x kann sich somit nur noch sprunghaft von Milligramm zu Milligramm ändern. Wir nennen eine solche Variable eine *gekörnte Veränderliche:* Gekörnte Variablen sind an sich stetige Veränderliche, die durch Rundung in diskrete umgewandelt wurden. (344)

In einer Stichprobe aus zwei oder mehr Versuchen kann bei diskreten Veränderlichen der gleiche Wert zwei- oder mehrmals vorkommen, bei stetigen Variablen ist dies ein fast unmögliches Ereignis [vgl. (**352**)], das aber um so häufiger eintreffen kann, je gröber sie gekörnt sind. Vgl. (**344**). (345)

Kommen in einer Stichprobe einer gekörnten Variablen zwei oder mehr gleiche Werte vor, so nennt man diese Werte *Bindungen* (ties) oder spricht von gebundenen Werten. Vgl. (**344**) und (**345**). (346)

4. Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit, zusammengesetzte Ereignisse

In einer Gruppe von N Individuen seien x weiblichen und $N-x$ männlichen Geschlechtes. x und $N-x$ sind die *absoluten,* x/N und $(N-x)/N$ die *relativen Häufigkeiten* der Frauen und Männer dieser Gruppe. Wenn wir im folgenden von Häufigkeiten sprechen, so sind damit immer die relativen Häufigkeiten gemeint. (347)

Die relative Häufigkeit, multipliziert mit 100, wird *prozentuale Häufigkeit* genannt. Beispiel 2: Bei 81 Operationen sind 3 Todesfälle eingetreten. Die prozentuale Häufigkeit beträgt $(3/81) \times 100 = 3{,}7\%$. (348)

Man findet die prozentuale Häufigkeit für N zwischen 2 und 100 und für beliebige $x \leqq N$ in der Kolonne 100 p_x (Kolonne 2) der Tafeln auf S. 85–98. Für obiges Beispiel siehe S. 93, $N = 81$, $x = 3$.

Wir symbolisieren Wahrscheinlichkeiten mit folgenden Symbolen:
«Wahrscheinlichkeit» allgemein ..... Prob
Wahrscheinlichkeiten einander ausschließender Ereignisse ..... $\dot{\boldsymbol{P}}$
Wahrscheinlichkeiten zweier komplementärer Ereignisse ..... $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$ (349)

Später verwenden wir noch die Symbole α und $\boldsymbol{P}$ [vgl. (**378**) und (**379**)].

In (**324**) definierten wir die *Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit eines Merkmals* [oder Ereignisses, vgl. (**333**)] *in der Bevölkerung.* Aus dieser Definition lassen sich unmittelbar ableiten: (**350**) bis (**355**).

Jede Wahrscheinlichkeit ist eine Zahl zwischen Null und Eins.
$0 \leqq \text{Prob} \leqq 1$ (350)

Ein unmögliches Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit Null, ein sicheres Ereignis die Wahrscheinlichkeit Eins. *Der umgekehrte Schluß ist aber nicht zulässig,* es gilt vielmehr: (351)

Ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit Null ist ein *fast* unmögliches Ereignis, ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit Eins ist ein *fast* sicheres Ereignis. Beispiel 3: Eine Urne enthalte alle natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \infty$. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Zuge zum Beispiel die Zahl 1960 zu ziehen, ist $1/\infty = 0$. Trotzdem besteht die Möglichkeit, diese Zahl zu ziehen, da sie in der Bevölkerung enthalten ist. (352)

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten *aller* einander ausschließenden, aus *einer* Bevölkerung stammenden Ereignisse $E_0, E_1, \ldots, E_T$ ist gleich Eins:

$$\text{Prob}\,(E_0 \text{ oder } E_1 \text{ oder } \ldots E_T) = \dot{\boldsymbol{P}}_0 + \dot{\boldsymbol{P}}_1 + \cdots + \dot{\boldsymbol{P}}_T = 1$$

wobei T = Total aller einander ausschließenden Ereignisse, und [vgl. (**335**)]

$$\text{Prob}\,(E \text{ oder Nicht-}E) = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = 1$$ (353)

Als Folgerung von (**353**) ergibt sich: Eine Bevölkerung mit vielen einander ausschließenden Ereignissen läßt sich in verschiedener Weise in eine Bevölkerung mit zwei komplementären Ereignissen umformen. (354)

Es ist zum Beispiel

$$\text{Prob}\,[\underbrace{(E_0 \text{ oder } E_1)}_{=E} \text{ oder } \underbrace{(E_2 \text{ oder } \dots E_T)}_{=\text{Nicht-}E}]$$
$$= (\underbrace{\dot{\boldsymbol{P}}_0 + \dot{\boldsymbol{P}}_1}_{=\boldsymbol{p}}) + (\underbrace{\dot{\boldsymbol{P}}_2 + \cdots + \dot{\boldsymbol{P}}_T}_{=\boldsymbol{q}})$$

wobei T = Total aller einander ausschließenden Ereignisse.

Beispiel 4 zu (**354**). Bei einem «wahren» Würfel sei die Wahrscheinlichkeit einer Zahl, geworfen zu werden, gleich 1/6. Die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu werfen, ist 1/6, eine Nicht-6 (= 1 oder 2 oder ... 5) zu werfen, 5/6. Die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl (= 2 oder 4 oder 6) zu werfen, ist $1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$, eine ungerade Zahl zu werfen, ebenfalls 1/2.

Als Folgerung von (**353**) ergibt sich:

Die Wahrscheinlichkeit, daß von den einander ausschließenden Ereignissen $A, B, \dots$ entweder das Ereignis A oder das Ereignis B oder ... eintrifft, ist gleich der Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten, *sofern die Ereignisse aus ein und derselben Bevölkerung stammen.* (**355**)

$$\text{Prob}\,(A \text{ oder } B \text{ oder} \dots) = \dot{\boldsymbol{P}}_A + \dot{\boldsymbol{P}}_B + \cdots$$

Beispiel 5 zu (**355**). *Richtige Anwendung.* Die Wahrscheinlichkeit der 85jährigen, an Pneumonie zu sterben, sei 0,2, an Karzinom zu sterben, ebenfalls 0,2. Die Wahrscheinlichkeit der 85jährigen, entweder an Pneumonie oder an Karzinom zu sterben, ist dann $0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$.

Beispiel 6 zu (**355**). *Falsche Anwendung.* Die Sterbewahrscheinlichkeit der 85jährigen sei 0,5, der 86jährigen 0,6. Es ist falsch, zu sagen: «Die Wahrscheinlichkeit eines 85jährigen, entweder mit 85 oder mit 86 Jahren zu sterben, ist 1,1.» Hier würde uns schon die Wahrscheinlichkeit von 1,1, die es nach (**350**) nicht geben darf, auf einen Fehler hinweisen. Bei einer Wahrscheinlichkeit von 0,4, wie beim Beispiel 5, hätten wir den Fehler wohl übersehen. Er liegt darin, daß wir Wahrscheinlichkeiten einander ausschließender Ereignisse aus *verschiedenen* Bevölkerungen, jener der 85jährigen und jener der 86jährigen, addiert haben.

Die Wahrscheinlichkeit zweier gleichzeitiger oder aufeinanderfolgender Ereignisse A und B ist gleich der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B unter der Bedingung A, oder gleich der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung B. Über bedingte Ereignisse siehe (**337**). (**356**)

$$\text{Prob}\,(A \text{ und } B) = \text{Prob}\,(A) \times \text{Prob}\,(B\,|\,A)$$
$$= \text{Prob}\,(B) \times \text{Prob}\,(A\,|\,B)$$

Beispiel 7 zu (**356**). Eine Urne enthalte N Kugeln, wovon x rote und $N - x$ weiße. Man sammle eine Stichprobe von zwei Kugeln *ohne Zurücklegen.* Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) zwei rote, b) eine rote und eine weiße Kugel zu ziehen?

a) Die Wahrscheinlichkeit einer roten Kugel beim 1. Zug ist x/N. Die bedingte Wahrscheinlichkeit einer roten Kugel beim 2. Zug, nachdem beim 1. Zug schon eine rote Kugel gezogen und damit aus der Urne entfernt worden ist, ist $(x-1)/(N-1)$. Die Wahrscheinlichkeit, zwei rote Kugeln zu ziehen, ist somit

$$\text{Prob (rot und rot)} = \frac{x}{N} \times \frac{x-1}{N-1}$$

b)
$$\text{Prob (rot und weiß)} = \frac{x}{N} \times \frac{N-x}{N-1}$$
$$= \frac{N-x}{N} \times \frac{x}{N-1} = \text{Prob (weiß und rot)}$$

Beispiel 8 zu (**356**). Wir sammeln aus der gleichen Urne wie in Beispiel 7 eine gleich große Stichprobe, aber *mit Zurücklegen.* Die Fragestellung bleibt die gleiche.

a) Die Wahrscheinlichkeit einer roten Kugel beim 1. Zug ist wiederum x/N. Weil wir die Kugel wieder zurücklegen, bleibt die Wahrscheinlichkeit, beim 2. Zug eine rote Kugel zu ziehen, gleich groß:

$$\text{Prob (rot und rot)} = \frac{x}{N} \times \frac{x}{N}$$

b)
$$\text{Prob (rot und weiß)} = \frac{x}{N} \times \frac{N-x}{N}$$
$$= \frac{N-x}{N} \times \frac{x}{N} = \text{Prob (weiß und rot)}$$

Wir sehen in Beispiel 7, daß die Wahrscheinlichkeiten sich mit jedem Zug ändern, das heißt, jeder folgende Zug ist vom vorhergegangenen *abhängig.* Wir sprechen in einem solchen Fall von *abhängigen Versuchen* und *abhängigen Ereignissen.* Anders in Beispiel 8, wo die Züge sich gegenseitig nicht beeinflussen. Die Versuche und Ereignisse sind *unabhängig.*

Wir merken uns: Beim Stichprobensammeln ohne Zurücklegen, das heißt aus *endlichen* Bevölkerungen, sind die Versuche und Ereignisse voneinander *abhängig,* beim Stichprobensammeln mit Zurücklegen, das heißt aus *unendlichen* Bevölkerungen, sind sie *unabhängig.* (**357**)

Man bezeichnet zwei gleichzeitige oder aufeinanderfolgende Ereignisse als stochastisch *abhängige* Ereignisse, wenn in (**356**) die bedingte und die absolute Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses *ungleich* groß sind, das heißt, wenn (**358**)

$$\text{Prob}\,(A\,|\,B) \neq \text{Prob}\,(A) \quad \text{oder} \quad \text{Prob}\,(B\,|\,A) \neq \text{Prob}\,(B)$$

Man bezeichnet zwei gleichzeitige oder aufeinanderfolgende Ereignisse als stochastisch *unabhängige* Ereignisse, wenn in (**356**) die bedingte und die absolute Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses *gleich* groß sind, das heißt, wenn (**359**)

$$\text{Prob}\,(A\,|\,B) = \text{Prob}\,(A) \quad \text{oder} \quad \text{Prob}\,(B\,|\,A) = \text{Prob}\,(B)$$

Aus (**356**) und (**359**) ist abzuleiten: Man bezeichnet die Ereignisse A und B als stochastisch voneinander unabhängig, wenn die Wahrscheinlichkeit für ihr gleichzeitiges oder aufeinanderfolgendes Eintreffen gleich dem Produkt ihrer Wahrscheinlichkeiten ist: (**360**)

Wenn $\text{Prob}\,(A \text{ und } B) = \text{Prob}\,(A) \times \text{Prob}\,(B)$
dann sind A und B voneinander stochastisch unabhängig

In (**358**) bis (**360**) sind «abhängig» und «unabhängig» mit der Einschränkung «stochastisch» verknüpft. Dies ist eine Vorsichtsmaßnahme des Statistikers. *In* (**358**) *bis* (**360**) *schließt man nämlich auf Grund eines mathematischen Resultates auf einen Tatbestand.* Liegt letzterer ganz im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung, so sind die Schlüsse «abhängig» und «unabhängig» voll gültig, wie etwa in Beispiel 7 und 8 von (**356**). Extrapoliert man aber solche Schlüsse über den mathematischen Bereich hinaus auf physikalische, chemische, physiologische usw. Tatbestände, so wird die Einschränkung «stochastisch» notwendig, weil die Begriffe «abhängig» und «unabhängig» *kausal* nicht unbedingt zutreffen müssen. Stochastisch unabhängige Ereignisse können realiter sehr wohl abhängig sein. *Der Schluß «unabhängig» legt nur tatsächliche Unabhängigkeit der Ereignisse nahe.* Man wird ihn akzeptieren, wenn die physischen Umstände nicht dagegen sprechen. *Andererseits wird man ihn dann als Beweis ansehen,* wenn auf Grund des physischen Tatbestandes Unabhängigkeit *vorausgesetzt* wurde und die mathematische Behandlung zum *gleichen* Ergebnis kam. Aus diesem Grunde sollte man sich (**360**) auch in umgekehrter Richtung einprägen: (**361**)

Sind A und B voneinander unabhängige Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit für ihr gleichzeitiges oder aufeinanderfolgendes Eintreffen gleich dem Produkt ihrer Wahrscheinlichkeiten: (**362**)

$$\text{Prob}\,(A \text{ und } B) = \text{Prob}\,(A) \times \text{Prob}\,(B)$$
wenn A und B voneinander unabhängig sind

Beispiel 9 zu (**362**). Eine Urne enthalte die beiden Ereignisse + oder − mit den Wahrscheinlichkeiten 1/2. Wir sammeln Stichproben mit Zurücklegen, somit sind die Ereignisse nach (**357**) voneinander unabhängig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 5-, 6-, 7mal das Pluszeichen hintereinander zu ziehen? Die Wahrscheinlichkeiten sind $(1/2)^5$, $(1/2)^6$, $(1/2)^7$, somit 0,03125, 0,015625, 0,0078125.

Beispiel 10 zu (**362**). Eine Urne mit unendlicher Bevölkerung enthalte die Ereignisse A oder B mit den Wahrscheinlichkeiten $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse AA, AB, BA, BB in zwei Zügen?

Ereignis	Wahrscheinlichkeit		
AA	$p \times p$	$= p^2$	$= p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2 = 1^2 = 1$, wie es nach (**353**) sein soll
AB	$p \times q$	$= 2pq$	
BA	$q \times p$		
BB	$q \times q$	$= q^2$	

In $p^2 + 2pq + q^2$ stellen die einzelnen Glieder die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* für die Ereignisse AA, AB und BB dar, sofern wir auf die Reihenfolge des Ereignisses AB keinen Wert legen. Damit haben wir eine *Stichprobenverteilung* [vgl. (**329**)] gefunden für Stichproben des Umfanges 2 aus Urnen mit unendlicher Bevölkerung, den komplementären Merkmalen A oder B und den Wahrscheinlichkeiten p und q. Intuitiv merkt man aus diesem Beispiel, wie es für Stichproben mit 3, 4, ... Zügen weitergehen wird: die Stichprobenverteilungen werden sich als binomische Entwicklungen von $(p+q)^3$, $(p+q)^4$, ... nach (**113**) darstellen lassen. Vgl. Binomialverteilung, Abschnitt 20.

5. Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung

In Beispiel 10 zu (**362**) fanden wir eine einfache, in der Praxis wichtige Stichprobenverteilung, die später noch besprochen wird. Hier wollen wir nur einige Begriffe an Hand einer solchen Verteilung einführen.

Gegeben sei die unendliche Bevölkerung mit den Ereignissen $x = 0, 1, 2, \ldots, 10$ und den Wahrscheinlichkeiten $\dot{P}_x$:

x	$\dot{P}_x = f(x)$	$\sum_0^{x=k} \dot{P}_x = F(x)$
0	0,0010	0,0010 $= \dot{P}_0$
1	0,0098	0,0108 $= \dot{P}_0 + \dot{P}_1$
2	0,0439	0,0547 $= \dot{P}_0 + \dot{P}_1 + \dot{P}_2$
3	0,1172	0,1719 $= \dot{P}_0 + \dot{P}_1 + \dot{P}_2 + \dot{P}_3$
4	0,2051	0,3770 usw.
5	0,2460	0,6230
6	0,2051	0,8281
7	0,1172	0,9453
8	0,0439	0,9892
9	0,0098	0,9990
10	0,0010	1,0000

In Kolonne $\dot{P}_x = f(x)$ sind die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ usw. notiert:

Dies ist nach (**326**) die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* für die Ereignisse $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ usw., symbolisiert mit $f(x)$. (**363**)

In Kolonne $\sum_0^{x=k} \dot{P}_x = F(x)$ sind die Wahrscheinlichkeiten $\dot{P}_x$ fortlaufend summiert, das heißt, es sind die Wahrscheinlichkeiten für $x = 0$, $x = 0$ oder 1, $x = 0$ oder 1 oder 2 usw. Dies ist die *kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung* von x, symbolisiert mit $F(x)$. (**364**)

Graphisch dargestellt, ergibt sich folgendes Bild:

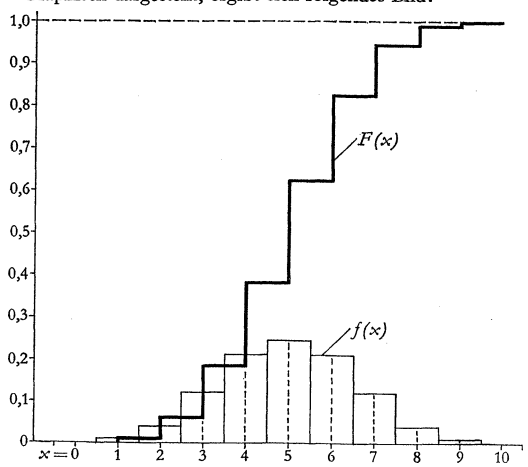


Abb. 1 Auf der Abszisse ist x, auf der Ordinate sind die Wahrscheinlichkeiten $f(x)$ und $F(x)$ abgetragen.

Da x eine diskrete Veränderliche ist [vgl. (**341**)], sind die Verteilungen $f(x)$ und $F(x)$ treppenförmige Linienzüge:

Eine diskrete Zufallsvariable hat auch eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung. (**365**)

Die Wahrscheinlichkeiten sind von x abhängig, das heißt, *jedem x-Wert ist eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zugeordnet:* $f(x)$ und $F(x)$ sind *Funktionen* von x und werden aus diesem Grunde mit f und F symbolisiert (vielfach werden auch die griechischen Buchstaben φ und Φ als Symbole verwendet). Die Zuordnung der Wahrscheinlichkeiten kann durch eine mathematische Formel oder durch irgendeine andere Art erfolgen. (**366**)

In Abbildung 1 sind die Wahrscheinlichkeiten $f(x)$ und $F(x)$ als gebrochene Linienzüge dargestellt. Diese Darstellung wurde gewählt, um die Ähnlichkeit zwischen diskreten und stetigen Verteilungen (vgl. Abb. 8) besser hervortreten zu lassen. In der Tat könnte obige Darstellung jene einer *gekörnten* Verteilung sein [vgl. (**344**)], bei der x auf ganze Zahlen gerundet wurde. In diesem Fall würden zum Beispiel alle Ereignisse zwischen 4,5 und 5,5 als Ereignis 5 genommen. Wir werden deshalb im folgenden für diskrete Verteilungen eine andere Darstellung bevorzugen, die deutlich zeigt, daß die Ereignisse x *diskret* sind:

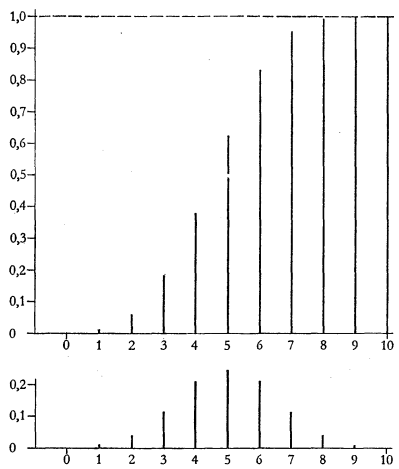


Abb. 2

Wir kommen noch einmal auf die kumulierte Verteilung $F(x)$ zurück, die die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse $x = 0$, $x = 0$ oder 1, $x = 0$ oder 1 oder 2 usw. gibt. Für $x = 0$ oder 1 werden wir von nun an $x = 0, 1$ einsetzen. Prob $(x = 0, 1)$ kann auch gelesen werden Prob $(x \leqq 1)$. Eine weitere Lesart ist Prob $(x < 2, 3, \ldots, N)$, gleichbedeutend mit Prob $(x < 2)$.

Allgemein gilt für diskrete Verteilungen

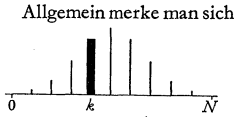
Prob $(x < k+1)$, wenn Prob $(x \leqq k)$ oder Prob $(x < k)$, wenn Prob $(x \leqq k-1)$

und Prob $(x > k-1)$, wenn Prob $(x \geqq k)$ oder Prob $(x > k)$, wenn Prob $(x \geqq k+1)$ (**367**)

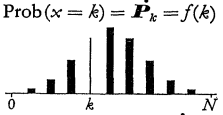
Die Verteilung $F(x)$ erzeugt somit mit wachsendem k fortlaufend die Wahrscheinlichkeiten für $x \leqq k$ bzw. $x < k+1$. (**368**)

Anderseits erzeugt die von N an in Richtung Null kumulierte Verteilung $\sum_{x=k}^{N} \dot{P}_x$ mit fallendem k fortlaufend die Wahrscheinlichkeiten $x \geqq k$ bzw. $x > k-1$. (**369**)

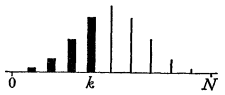
Allgemein merke man sich für diskrete Verteilungen



$$\text{Prob}(x = k) = \dot{P}_k = f(k) \qquad (370)$$



$$\text{Prob}(x \neq k) = 1 - \dot{P}_k = 1 - f(k) \qquad (371)$$



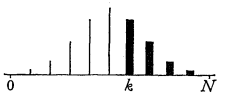
$$\text{Prob}(x \leqq k) = \text{Prob}(x < k+1) \tag{372}$$

$= \sum_{0}^{k} \dot{\boldsymbol{P}}_x$, günstigste Formel, wenn $k \leqq N/2$ (a)

$= 1 - \sum_{k+1}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x$, günstigste Formel, wenn $k \geqq N/2$ (b)

$= F(x)$, günstigste Formel, wenn $F(x)$ gegeben (c)

$= 1 - \sum_{k+1}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x$, günstigste Formel, wenn $\sum_{x}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x$ gegeben (d)



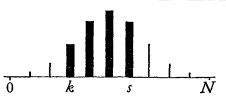
$$\text{Prob}(x \geqq k) = \text{Prob}(x > k-1) \tag{373}$$

$= 1 - \sum_{0}^{k-1} \dot{\boldsymbol{P}}_x$, günstigste Formel, wenn $k \leqq N/2$ (a)

$= \sum_{k}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x$, günstigste Formel, wenn $k \geqq N/2$ (b)

$= 1 - F(k-1)$, günstigste Formel, wenn $F(x)$ gegeben (c)

$= \sum_{k}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x$, günstigste Formel, wenn $\sum_{x}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x$ gegeben (d)



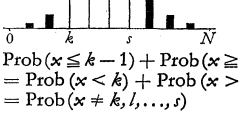
$$\left.\begin{aligned}&\text{Prob}(k \leqq x \leqq s) = \text{Prob}(x = k, l, \ldots, s)\\ &= \text{Prob}(k-1 < x < s+1)\end{aligned}\right\} \tag{374}$$

$= \sum_{k}^{s} \dot{\boldsymbol{P}}_x$, günstigste Formel, wenn $s - k \leqq N/2$ (a)

$= 1 - \sum_{0}^{k-1} \dot{\boldsymbol{P}}_x - \sum_{s+1}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x$, günstigste Formel, wenn $s - k \geqq N/2$ (b)

$= F(s) - F(k-1)$, günstigste Formel, wenn $F(x)$ gegeben (c)

$= \sum_{k}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x - \sum_{s+1}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x$, günstigste Formel, wenn $\sum_{x}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x$ gegeben (d)



$$\left.\begin{aligned}&\text{Prob}(x \leqq k-1) + \text{Prob}(x \geqq s+1)\\ &= \text{Prob}(x < k) + \text{Prob}(x > k)\\ &= \text{Prob}(x \neq k, l, \ldots, s)\end{aligned}\right\} \tag{375}$$

$= 1 - \sum_{k}^{s} \dot{\boldsymbol{P}}_x$, günstigste Formel, wenn $s - k \leqq N/2$ (a)

$= \sum_{0}^{k-1} \dot{\boldsymbol{P}}_x + \sum_{s+1}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x$, günstigste Formel, wenn $s - k \geqq N/2$ (b)

$= 1 - F(s) + F(k-1)$, günstigste Formel, wenn $F(x)$ gegeben (c)

$= 1 - \sum_{k}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x + \sum_{s+1}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x$, günstigste Formel, wenn $\sum_{x}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x$ gegeben (d)

In (**370**) bis (**375**) ist angegeben, welche der Formeln (a) bis (d) jeweils die günstigste ist. In der Regel wird man die $\dot{\boldsymbol{P}}_x$ selbst errechnen müssen, dann rechne man weiter mit den Formeln (a) oder (b). Unseres Wissens existiert eine ausführliche Tabellierung von $\sum_{x}^{m} \dot{\boldsymbol{P}}_x$ nur für die POISSON-Verteilung[2], von $\sum_{x}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x$ nur für die Binomialverteilung[3, 4]. Ist man im Besitze dieser Tafeln, so rechnet man mit den Formeln (b) bzw. (d). Sowohl in [2] wie in [4] ist auch $f(x)$ tabelliert.

Beispiel 11. Wir errechnen nach (**370**) bis (**375**) mit den Formeln (a) oder (b) die Wahrscheinlichkeiten für $k = 2$ und $s = 8$ mit den am Anfang dieses Abschnittes gegebenen Werten der Verteilung $f(x)$.

(**370**): $\text{Prob}(x = 2) = \dot{\boldsymbol{P}}_2 = 0{,}0439$

(**371**): $\text{Prob}(x \neq 2) = 1 - \dot{\boldsymbol{P}}_2 = 0{,}9561$

(**372**): $\text{Prob}(x \leqq 2) = \dot{\boldsymbol{P}}_0 + \dot{\boldsymbol{P}}_1 + \dot{\boldsymbol{P}}_2 = 0{,}0547$
[nach Formel (a), weil $k < N/2$]

(**373**): $\text{Prob}(x \geqq 2) = 1 - (\dot{\boldsymbol{P}}_0 + \dot{\boldsymbol{P}}_1) = 0{,}9892$
[nach Formel (a), weil $k < N/2$]

(**374**): $\text{Prob}(2 \leqq x \leqq 8) = \text{Prob}(x = 2, 3, \ldots, 8)$
$= 1 - (\dot{\boldsymbol{P}}_0 + \dot{\boldsymbol{P}}_1) - (\dot{\boldsymbol{P}}_9 + \dot{\boldsymbol{P}}_{10}) = 0{,}9784$
[nach Formel (b), weil $s - k > N/2$]

(**375**): $\text{Prob}(x \neq 2, 3, \ldots, 8) = (\dot{\boldsymbol{P}}_0 + \dot{\boldsymbol{P}}_1) + (\dot{\boldsymbol{P}}_9 + \dot{\boldsymbol{P}}_{10}) = 0{,}0216$
[nach Formel (b), weil $s - k > N/2$]

Beispiel 12. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis «x mindestens gleich 1»? Bei Formulierungen wie «mindestens», «höchstens» usw. konsultiere man S. 132. Wir finden dort, daß «x mindestens gleich 1» gleichbedeutend ist mit «x gleich 1 oder größer». Wir rechnen folglich nach (**373** a) und erhalten:

$\text{Prob}(x \geqq 1) = 1 - \dot{\boldsymbol{P}}_0 = 0{,}9990$

Beispiel 13.

Vertrauensgrenzen und Signifikanzschranken

(Vgl. dazu die Abschnitte 8 und 9).

A. *Einseitige Signifikanzschranken*

Gegeben sei α, wobei $0 < \alpha \leqq 0{,}5$. Bestimme x_l und x_r derart, daß

$$\left.\begin{aligned}&\text{Prob}(x \leqq x_l) = \boldsymbol{P}_l = \sum_{0}^{x_l} \dot{\boldsymbol{P}}_x \leqq \alpha \quad \text{und}\\ &\text{Prob}(x \leqq x_l + 1) = \sum_{0}^{x_l+1} \dot{\boldsymbol{P}}_x > \alpha\end{aligned}\right\} \tag{376}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{Prob}(x \geqq x_r) = \boldsymbol{P}_r = \sum_{x_r}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x \leqq \alpha \quad \text{und}\\ &\text{Prob}(x \geqq x_r - 1) = \sum_{x_r-1}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x > \alpha\end{aligned}\right\} \tag{377}$$

Für $\alpha = 0{,}10$ erhalten wir $x_l = 2$ und $x_r = 8$, für $\alpha = 0{,}025$ erhalten wir $x_l = 1$ und $x_r = 9$.

An Hand dieses Beispieles bezeichnen wir

– α als *postulierte* oder *nominelle, einseitige Irrtums-* oder *Signifikanzwahrscheinlichkeit.* (**378**)

– $\boldsymbol{P}$ als *tatsächliche, einseitige Irrtums-* oder *Signifikanzwahrscheinlichkeit,* und zwar $\boldsymbol{P}_l$ als *linke (untere)* und $\boldsymbol{P}_r$ als *rechte (obere),* wobei $\boldsymbol{P}_l$ und $\boldsymbol{P}_r \leqq \alpha$. (**379**)

– x_l als *linke (untere)*, x_r als *rechte (obere) Signifikanzschranke* (**380**)

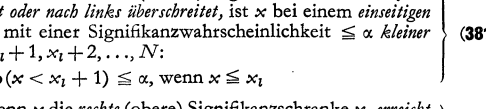


Abb. 3 Einseitige Signifikanzschranken diskreter Verteilungen.

und merken uns

– wenn x die *linke* (untere) Signifikanzschranke x_l *erreicht oder nach links überschreitet,* ist x bei einem *einseitigen Test* mit einer Signifikanzwahrscheinlichkeit $\leqq \alpha$ *kleiner* als $x_l + 1, x_l + 2, \ldots, N$:
$\text{Prob}(x < x_l + 1) \leqq \alpha$, wenn $x \leqq x_l$ (**381**)

– wenn x die *rechte* (obere) Signifikanzschranke x_r *erreicht oder nach rechts überschreitet,* ist x bei einem *einseitigen Test* mit einer Signifikanzwahrscheinlichkeit $\leqq \alpha$ *größer* als $x_r - 1, x_r - 2, \ldots, N$:
$\text{Prob}(x > x_r - 1) \leqq \alpha$, wenn $x \geqq x_r$ (**382**)

– daß die Regeln (**381**) und (**382**) für *alle* Signifikanzschranken *diskreter* Verteilungen gelten, die in den *Wissenschaftlichen Tabellen* tabelliert sind. Andernorts trifft man auch Signifikanzschranken diskreter Verteilungen, die *nach außen überschritten* werden müssen, um zum Beispiel der Vorschrift $\boldsymbol{P}_l \leqq \alpha$ zu genügen. (**383**)

– daß die *tatsächliche* Signifikanzwahrscheinlichkeit $\boldsymbol{P}$ bei *diskreten* Verteilungen in der Regel *kleiner,* bei kleinem N oft erheblich kleiner ist als die *nominelle* α. Bei wachsendem (**384**)

N verkleinert sich dieser Unterschied rasch. (Im Beispiel 13 sind bei $\alpha = 0{,}10$ bzw. 0,025 die entsprechenden $\boldsymbol{P} =$ 0,0547 bzw. 0,0108. Die tatsächliche Signifikanzwahrscheinlichkeit beträgt in diesem Falle nur etwa 50% der nominellen.) (384)

Wir bezeichnen ferner

– den Bereich zwischen x_l und N bzw. zwischen Null und x_r als *einseitigen Vertrauensbereich.* (385)

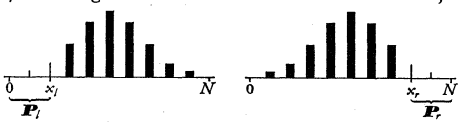


Abb. 4 Einseitige Vertrauensbereiche diskreter Verteilungen.

– x_l bzw. x_r als *einseitige Vertrauensgrenzen,* wenn die andere Grenze bei N bzw. Null liegt. (386)

– die Wahrscheinlichkeit $1 - \boldsymbol{P}_l \geqq 1 - \alpha$ und $1 - \boldsymbol{P}_r \geqq 1 - \alpha$ als *einseitige Vertrauenswahrscheinlichkeit (einseitiger Vertrauenskoeffizient):*

$$\text{Prob}(x_l < x \leqq N) = 1 - \boldsymbol{P}_l = 1 - \sum_{0}^{x_l} \dot{\boldsymbol{P}}_x \geqq 1 - \alpha \qquad (387)$$

$$\text{Prob}(0 \leqq x < x_r) = 1 - \boldsymbol{P}_r = 1 - \sum_{x_r}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x \geqq 1 - \alpha \qquad (388)$$

und ersehen aus (**380**) und (**386**), daß Signifikanzschranken und Vertrauensgrenzen mathematisch nach dem gleichen Prinzip bestimmt werden. (389)

B. *Zweiseitige Signifikanzschranken*

Werden für eine diskrete Verteilung eine linke und eine rechte Signifikanzschranke gemeinsam nach den Vorschriften (**376**) und (**377**) bestimmt, so wird für beide zusammen $\boldsymbol{P}_l + \boldsymbol{P}_r \geqq 2\alpha$. (390)

Man bezeichnet in diesem Falle

– 2α als *postulierte* oder *nominelle zweiseitige Irrtums-* oder *Signifikanzwahrscheinlichkeit.* (391)

– $\boldsymbol{P}_l + \boldsymbol{P}_r$ als *tatsächliche zweiseitige Signifikanzwahrscheinlichkeit* [beachte dazu (**384**)], wobei bei symmetrischen Verteilungen $\boldsymbol{P}_l = \boldsymbol{P}_r$, bei unsymmetrischen Verteilungen $\boldsymbol{P}_l \neq \boldsymbol{P}_r$, obschon beide den Vorschriften (**376**) und (**377**) genügen (vgl. Abb. 5). (392)

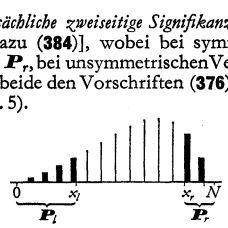


Abb. 5 Zweiseitige Signifikanzschranken diskreter (unsymmetrischer) Verteilungen.

– x_l und x_r beide zusammen als *zweiseitige* (möglichst wahrscheinlichkeitssymmetrische) Signifikanzschranken, kurz *Signifikanzschranken,* (393)

und merken uns

– wenn x *eine der beiden* Signifikanzschranken x_l oder x_r *erreicht oder nach außen überschreitet,* so ist x bei einem *zweiseitigen* Test mit einer Signifikanzwahrscheinlichkeit $\leqq 2\alpha$ *ungleich* $x_l + 1, x_l + 2, \ldots, x_r - 1$:
$\text{Prob}(x \neq x_l + 1, x_l + 2, \ldots, x_r - 1) \leqq 2\alpha$,
wenn $x \leqq x_l$ oder $x \geqq x_r$. (394)

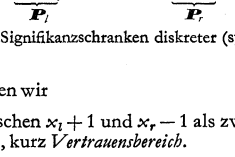


Abb. 6 Zweiseitige Signifikanzschranken diskreter (symmetrischer) Verteilungen.

Ferner bezeichnen wir

– den Bereich zwischen $x_l + 1$ und $x_r - 1$ als zweiseitigen Vertrauensbereich, kurz *Vertrauensbereich.* (395)

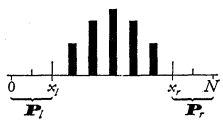


Abb. 7 Zweiseitiger Vertrauensbereich diskreter Verteilungen.

– x_l und x_r als zweiseitige Vertrauensgrenzen, kurz *Vertrauensgrenzen,* und merken uns noch einmal, daß Signifikanzschranken und Vertrauensgrenzen mathematisch nach dem gleichen Prinzip bestimmt werden. (396)

– die Wahrscheinlichkeit $1 - \boldsymbol{P}_l - \boldsymbol{P}_r \geqq 1 - 2\alpha$ als tatsächliche zweiseitige Vertrauenswahrscheinlichkeit, kurz als *Vertrauenswahrscheinlichkeit (Vertrauenskoeffizient):*

$$\text{Prob}(x_l < x < x_r) = 1 - \boldsymbol{P}_l - \boldsymbol{P}_r$$
$$= 1 - \sum_{0}^{x_l} \dot{\boldsymbol{P}}_x - \sum_{x_r}^{N} \dot{\boldsymbol{P}}_x \geqq 1 - 2\alpha \qquad (397)$$

6. Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung

Ein Vergleich zwischen den Abbildungen 1 und 8 zeigt die Ähnlichkeit zwischen diskreten und stetigen Verteilungen. Wenn man die zu Beginn des letzten Abschnittes gegebene Verteilung für zunehmende N ausrechnet, werden die Treppenstufen von $f(x)$ und $F(x)$ immer feiner, und schließlich entsteht bei nach Unendlich strebendem N eine kontinuierliche Kurve wie in Abbildung 8. Wir werden später noch darauf zurückkommen.

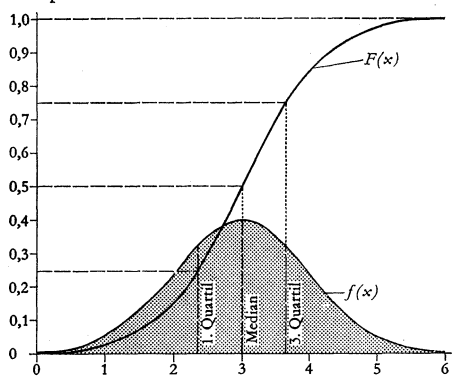


Abb. 8 Auf der Abszisse ist x, auf der Ordinate sind die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ und die Wahrscheinlichkeit $F(x)$ abgetragen.

In den in Abbildung 8 gezeigten Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist x eine *stetige* Zufallsveränderliche [vgl. (**343**)]; es gibt somit unendlich viele Ereignisse x, und es wird

$$\text{Prob}(x = k) = 1/\infty = 0 \qquad (398)$$

Aus (**398**) kann abgeleitet werden:

$$\text{Prob}(x \leqq k) = \text{Prob}(x < k) + \text{Prob}(x = k) = \text{Prob}(x < k) + 0$$

und merken uns deshalb für die Praxis

Bei *stetigen* Verteilungen kann (mit einem Fehler in der Größe Null)
$\text{Prob}(x \leqq k)$ als $\text{Prob}(x < k)$ } geschrieben oder
$\text{Prob}(x \geqq k)$ als $\text{Prob}(x > k)$ } gelesen werden (399)

War bei der diskreten Verteilung die Einzelwahrscheinlichkeit Prob $(x = k)$ auf $f(x)$ abzulesen, so gilt dies bei stetigen Verteilungen nicht mehr:

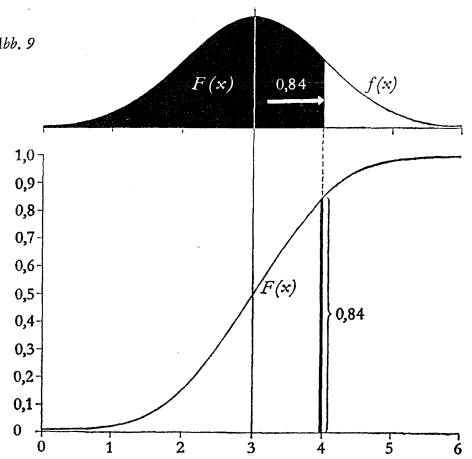
$f(x)$ verkörpert bei einer stetigen Verteilung die an der Stelle x herrschende *Wahrscheinlichkeitsdichte.* (400)

Die kumulierte Verteilung $F(x)$ hat andererseits bei stetigen Verteilungen die gleiche Bedeutung wie bei diskreten: Sie gibt die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse $x \leqq k$, die aber im Gegensatz zu diskreten Verteilungen gleichwertig sind mit den Ereignissen $x < k$ [vgl. (**399**)]. (401)

Bei der diskreten Verteilung war $F(x)$ eine *Summe* von Einzelwahrscheinlichkeiten [vgl. (**372**)]. Bei stetigen Verteilungen ist $F(x)$ ein *Integral:* (402)

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$
das heißt, $F(x)$ entspricht dem Inhalt der Fläche zwischen Abszisse und der Kurve $f(x)$ von $-\infty$ bis x: **(402)**

Abb. 9



Der gesamte Flächeninhalt zwischen der Abszisse und der Kurve $f(x)$ von $-\infty$ bis $+\infty$ beträgt 1 [vgl. **(353)**]:
$F(\infty) = 1;\ F(-\infty) = 0$ **(403)**

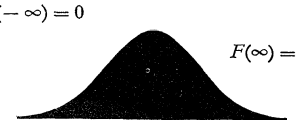


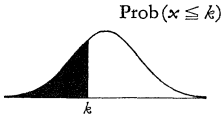
Abb. 10

Die den Gleichungen **(370)** bis **(375)** analogen Gleichungen für stetige Verteilungen sind:

$\text{Prob}(x = k) = 0$, vgl. dazu **(352)** **(398)**

$\text{Prob}(x \neq k) = 1$, vgl. dazu **(352)** **(404)**

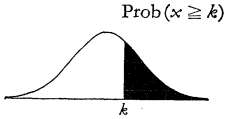
$\text{Prob}(x \leqq k) = \text{Prob}(x < k)$ **(405)**



$= \int_{-\infty}^{k} f(x)\,dx = F(k)$ (a)

$= 1 - \int_{k}^{\infty} f(x)\,dx$ (b)

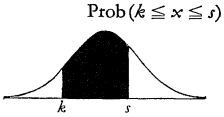
$\text{Prob}(x \geqq k) = \text{Prob}(x > k)$ **(406)**



$= 1 - \int_{-\infty}^{k} f(x)\,dx = 1 - F(k)$ (a)

$= \int_{k}^{\infty} f(x)\,dx$ (b)

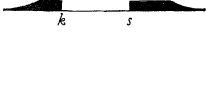
$\text{Prob}(k \leqq x \leqq s) = \int_{-\infty}^{s} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{k} f(x)\,dx$
$= F(s) - F(k)$ **(407a)**



$= 1 - \int_{-\infty}^{k} f(x)\,dx - \int_{s}^{\infty} f(x)\,dx$ (b)

$= \int_{k}^{s} f(x)\,dx$ (c)

$\text{Prob}(x < k) + \text{Prob}(x > s) = \text{Prob}(x \neq k \text{ bis } s)^*$
$= 1 - \int_{-\infty}^{s} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{k} f(x)\,dx$
$= 1 - F(s) + F(k)$ **(408)**



$= \int_{-\infty}^{k} f(x)\,dx + \int_{s}^{\infty} f(x)\,dx$ (a)

$= 1 - \int_{k}^{s} f(x)\,dx$ (b)

* $\text{Prob}(x \neq k \text{ bis } s)$ werden wir an Stelle des mathematisch korrekten Ausdruckes $\text{Prob}(x < k) + \text{Prob}(x > s)$ im folgenden benutzen, weil er die Bedeutung des Ausdruckes mit *einem* Wort aussagt (ungleich) und ähnlich formuliert ist wie **(375)**.

Zu **(405)** bis **(408)** vgl. **(399)**: $\text{Prob}(k \leqq x \leqq s)$ ist beispielsweise gleichbedeutend mit $\text{Prob}(k < x \leqq s)$, $\text{Prob}(k \leqq x < s)$ und $\text{Prob}(k < x < s)$.

Die numerischen Werte für verschiedene Integrale in **(405)** bis **(408)** sind für die wichtigsten Verteilungen in unseren Tafeln zu finden. Wir werden bei den einzelnen Verteilungen darauf zurückkommen. In den Beispielen dieses Abschnittes berechnen wir Wahrscheinlichkeiten der Normalverteilung und nennen die Abszisse x Abweichung c. Auf S. 28 ist $F(c)$ in der rechten Spalte (Abweichung → Integral) tabelliert, das heißt, dort sind zu *gegebenen Abweichungen c die gesuchten Wahrscheinlichkeiten* $F(c)$ zu finden. In der linken Spalte (Integral → Abweichung) sind für *gegebene Wahrscheinlichkeiten die gesuchten Abweichungen c* tabelliert. In dieser Spalte ist somit die Abweichung c eine Funktion von $F(c)$, genannt das Quantil c (vgl. Abschnitt 10 E: Quantile). Eine solche Funktion nennt man *Umkehrfunktion*. Tafeln von Umkehrfunktionen sind bequem, aber nicht unbedingt notwendig, da man entsprechende Werte auch aus Tafeln der Grundfunktion interpolieren kann.

Beispiel 14. Man berechne für die Normalverteilung mit Form (a) von **(405)** bis **(408)** die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für $k = -1{,}65$ und $s = 1{,}96$.

In der rechten Spalte der Tafel auf S. 28 finden wir $F(-1{,}65) = 0{,}049\,47$ und $F(1{,}96) = 0{,}975\,00$ und erhalten

(405): $\text{Prob}(c \leqq -1{,}65) = 0{,}049\,47$

(406): $\text{Prob}(c \geqq -1{,}65) = 1 - 0{,}049\,47 = 0{,}950\,53$

(407): $\text{Prob}(-1{,}65 \leqq c \leqq 1{,}96) = 0{,}975\,00 - 0{,}049\,47 = 0{,}925\,53$

(408): $\text{Prob}(c \neq -1{,}65 \text{ bis } 1{,}96) = 1 - 0{,}975\,00 + 0{,}049\,47 = 0{,}074\,47$

Beispiel 15. Gegeben sind die Wahrscheinlichkeiten $F(c) = 0{,}001$ und 0,995. Gesucht sind die Abweichungen c. In der linken Spalte der Tafel auf S. 28 finden wir $c = -3{,}0902$ und 2,5758. Ohne zu interpolieren, hätten wir der rechten Spalte dafür die Werte 3,09 und 2,58 entnehmen können.

Beispiel 16.

Vertrauensgrenzen und Signifikanzschranken

(Vgl. dazu die Abschnitte 8 und 9)

A. *Einseitige Signifikanzschranken*

Gegeben sei α, wobei $0 < \alpha \leqq 0{,}5$. Bestimme x_l und x_r derart, daß

$\text{Prob}(x < x_l) = \boldsymbol{P}_l = \int_{-\infty}^{x_l} f(x)\,dx = F(x_l) = \alpha$ **(409)**

$\text{Prob}(x > x_r) = \boldsymbol{P}_r = \int_{x_r}^{\infty} f(x)\,dx = 1 - \int_{-\infty}^{x_r} f(x)\,dx$
$= 1 - F(x_r) = \alpha$ **(410)**

Aus **(410)** ergibt sich $F(x_r) = 1 - \alpha$ **(411)**

Bei der Normalverteilung erhalten wir für $\alpha = 0{,}025$ aus der Tafel auf S. 28, linke Spalte, $x_l = -1{,}96$ und $x_r = 1{,}96$.

Die Namen für die in **(408)** und **(409)** definierten Symbole α, $\boldsymbol{P}_l$, $\boldsymbol{P}_r$, x_l und x_r sind dieselben wie in **(378)**, **(379)** und **(380)**.

Wir merken uns aber, daß im Gegensatz zu den diskreten [vgl. **(384)**] bei stetigen Verteilungen tatsächliche und nominelle Signifikanzwahrscheinlichkeit gleich groß sind. Wir machen deshalb bei stetigen Verteilungen keinen Unterschied mehr zwischen tatsächlicher und nomineller Signifikanzwahrscheinlichkeit und sprechen nur von *der* Signifikanzwahrscheinlichkeit, wobei wir die Symbole $\boldsymbol{P}$ und α synonym verwenden. **(412)**

Ähnlich wie für diskrete Verteilungen gilt:

Wenn x die *linke* (untere) Signifikanzschranke x_l *erreicht oder nach links überschreitet*, ist x bei einem *einseitigen* Test mit einer Signifikanzwahrscheinlichkeit $\leqq \alpha$ *kleiner* als x_l.
$\text{Prob}(x < x_l) \leqq \alpha$, wenn $x \leqq x_l$ **(413)**

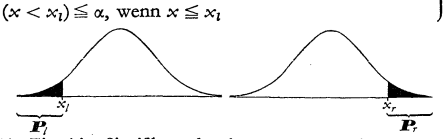


Abb. 11 Einseitige Signifikanzschranken stetiger Verteilungen.

Wenn x die *rechte* (obere) Signifikanzschranke x_r *erreicht oder nach rechts überschreitet*, ist x bei einem *einseitigen* Test mit einer Signifikanzwahrscheinlichkeit $\leqq \alpha$ *größer* als x_r.
$\text{Prob}(x > x_r) \leqq \alpha$, wenn $x \geqq x_r$ **(414)**

Wir bezeichnen ferner

– den Bereich zwischen x_l und ∞ bzw. zwischen $-\infty$ und x_r als *einseitigen Vertrauensbereich.* (415)

Abb. 12 Einseitige Vertrauensbereiche stetiger Verteilungen.

– x_l bzw. x_r als *einseitige Vertrauensgrenzen,* wenn die andere Grenze bei ∞ bzw. bei $-\infty$ liegt, und merken uns, daß auch bei stetigen Verteilungen Signifikanzschranken und Vertrauensgrenzen mathematisch nach dem gleichen Prinzip bestimmt werden. (416)

B. *Zweiseitige Signifikanzschranken*

Werden für eine stetige Verteilung eine linke und eine rechte Signifikanzschranke gemeinsam nach den Vorschriften (**409**) und (**410**) bestimmt, so wird für beide zusammen $\boldsymbol{P}_l + \boldsymbol{P}_r = 2\boldsymbol{P} = 2\alpha$. (417)

In diesem Falle bezeichnen wir

– $2\boldsymbol{P} = 2\alpha$ als *zweiseitige Irrtums-* oder *Signifikanzwahrscheinlichkeit.* (418)

– x_l und x_r beide zusammen als *zweiseitige* Signifikanzschranken, kurz als *Signifikanzschranken,* (419)

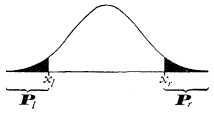


Abb. 13 Zweiseitige Signifikanzschranken stetiger Verteilungen.

und merken uns

– wenn x *eine der beiden* Signifikanzschranken x_l oder x_r *erreicht oder nach außen überschreitet,* so ist x bei einem *zweiseitigen* Test mit einer Signifikanzwahrscheinlichkeit $\leqq 2\alpha$ *ungleich* x_l bis x_r: (420)

$$\text{Prob}\,(x \neq x_l \text{ bis } x_r) \leqq 2\alpha$$

Ferner bezeichnen wir

– den Bereich zwischen x_l und x_r als *zweiseitigen* Vertrauensbereich, kurz als *Vertrauensbereich.* (421)

Abb. 14 Zweiseitiger Vertrauensbereich stetiger Verteilungen.

– x_l und x_r als *zweiseitige* (wahrscheinlichkeitssymmetrische) *Vertrauensgrenzen,* kurz als *Vertrauensgrenzen* (confidence limits). (422)

– die Wahrscheinlichkeit $1 - 2\boldsymbol{P} = 1 - 2\alpha$ als zweiseitige Vertrauenswahrscheinlichkeit, kurz als *Vertrauenswahrscheinlichkeit (Vertrauenskoeffizient):* (423)

$$\text{Prob}\,(x_l \leqq x \leqq x_r) = 1 - 2\boldsymbol{P}$$
$$= 1 - \int_{-\infty}^{x_l} f(x)\,dx - \int_{x_r}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{x_l}^{x_r} f(x)\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{x_r} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x_l} f(x)\,dx = F(x_r) - F(x_l) = 1 - 2\alpha$$

7. Schätzungen

Die Merkmale einer Bevölkerung sind uns in der Regel bekannt, der Typus der Verteilung nicht immer, die Parameter der Verteilung sehr selten. Wir sind dann darauf angewiesen, die Verteilung bzw. deren Parameter an Hand von Stichproben zu schätzen. Es liegt nahe, Schätzungen nach den gleichen Vorschriften aus der Stichprobe zu berechnen, wie sie für die Berechnung des betreffenden Parameters bei der Bevölkerung gelten. Diese Schätzungsmethode wird häufig angewendet, ist aber nicht die einzige und führt nicht immer zu den besten Schätzungen. Wir müssen hier leider davon absehen, auf allgemeine Schätzmethoden, wie zum Beispiel die Maximum Likelihood nach R. A. Fisher, näher einzugehen, weil sie nur mit höheren* mathematischen Kenntnissen verstanden werden können. In der Praxis sind sie auch nicht unbedingt notwendig, weil für die meisten vorkommenden Fälle die Schätzformeln bekannt sind.

7 A. Erwartungswert und Bias

Gegeben sei die Stichprobe des Umfanges N. Aus ihr wird irgendein Parameter P geschätzt.

Es ist nun eine Erfahrungstatsache, daß wenn weitere gleichartige Schätzungen aus Stichproben des *gleichen* Umfanges gemacht werden, der Mittelwert dieser Schätzungen gegen einen festen Wert, den *Erwartungswert* der betreffenden Schätzung, konvergiert, wenn die Anzahl der Stichproben ins Unendliche vergrößert wird (vgl. Abb. 15). (424)

Die in (**424**) erwähnte Konvergenz ist aber nicht die übliche im mathematischen Sinne, es ist eine *Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit* oder *stochastische Konvergenz,* das heißt, *«die Wahrscheinlichkeit, daß ...» konvergiert gegen Eins oder Null* [vgl. (**427**)].

Stimmt der Erwartungswert einer Schätzung mit dem Parameter überein, so spricht man von einer *biasfreien* (erwartungstreuen) Schätzung. Ist dies nicht der Fall, so hat die Schätzung einen *Bias.* (425)

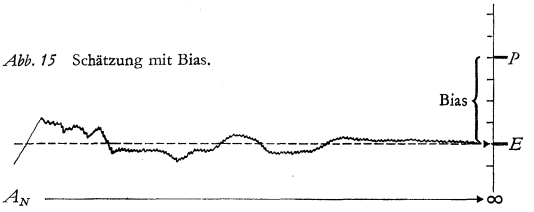


Abb. 15 Schätzung mit Bias.

---- Größe der Erwartungswerte für eine Schätzung aus Stichproben des Umfanges N

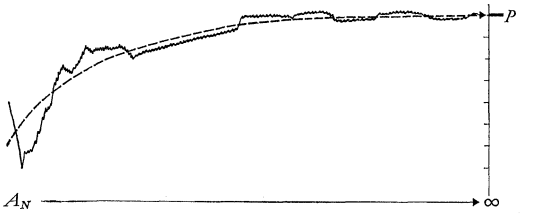
Schätzung

P Parameter

E Erwartungswert

A_N Anzahl der Stichproben des Umfanges N

Der Bias kann vom Stichprobenumfang abhängig sein. Er ist dann in der Regel bei kleinen Stichproben größer und strebt gegen Null, wenn der Stichprobenumfang N gegen Unendlich strebt. Solche Schätzungen nennt man *asymptotisch biasfrei* (vgl. Abb. 16). (426)



---- Größe der Erwartungswerte für eine Schätzung aus Stichproben des Umfanges N

Schätzung

P Parameter

Abb. 16 Asymptotisch biasfreie Schätzung.

Der oben beschriebene Bias ist ein mathematischer, das heißt, er ist der Schätzung inhärent. Die Größe dieses «internen» Bias ist bekannt und kann durch entsprechende Korrekturen beseitigt werden. Eine Schätzung kann aber auch mit einem nichtmathematischen, «externen» Bias behaftet sein, der durch experimentelle Meß- oder Beurteilungsfehler oder durch nichtzufälliges Stichprobensammeln oder durch beides zusammen verursacht wurde. Dieser Bias ist nicht so harmlos wie der mathematische, weil er sich in den seltensten Fällen in seinem Ausmaß und seiner Richtung erkennen und damit eliminieren läßt. Externer Bias läßt sich nur durch sorgfältige Planung der Experimente (experimental design) verhüten. Wir verweisen auf die diesbezügliche Literatur.

* Vom Nichtmathematiker aus gesehen.

Werden Schätzungen vorgenommen, um damit in Signifikanztesten *Unterschiede zwischen Stichproben* festzustellen, dann beeinflußt ein eventueller Bias das Resultat in jenen Fällen *nicht*, wenn die verglichenen Stichproben mit *demselben* Bias behaftet sind, das heißt, wenn sie unter identischen Bedingungen gesammelt wurden. Dazu gehört selbstverständlich auch die mathematische Forderung, daß *alle zu vergleichenden Schätzungen nach ein und derselben Vorschrift errechnet wurden.*

7 B. Konsistenz

Ähnlich wie in (**424**) zeigt die Erfahrung, daß Schätzungen bei wachsendem Stichprobenumfang in der Regel einem festen Wert, dem Erwartungswert *unendlich großer* Stichproben, zustreben.

(**427**)

(a) Bleibt ein Parameter mit wachsendem Stichprobenumfang N *konstant*, so gilt
$\text{Prob}(|\text{Schätzung minus Erwartungswert}| < \varepsilon) \to 1$
$(\varepsilon > 0)$, wenn der Stichprobenumfang $N \to \infty$

(b) Für Parameter, die sich mit wachsendem Stichprobenumfang N proportional zu N, N^2 usw. vergrößern, gilt (a) auch, wenn der Absolutwert der Differenz Schätzung minus Erwartungswert durch N, N^2 usw. dividiert wird.

(**427**) wird gelesen: Die Wahrscheinlichkeit, daß der Absolutwert der Differenz aus Schätzung und ihrem Erwartungswert eine beliebig kleine Zahl ε nicht übersteigt, strebt gegen Eins, wenn der Stichprobenumfang N gegen Unendlich strebt. Dies ist das sogenannte (schwache) *Gesetz der großen Zahl.*

Schätzungen, die (**427**), das heißt dem Gesetz der großen Zahl, gehorchen, nennt man *konsistent.*

7 C. Wirksamkeit

Schätzungen werden aus zufälligen Ereignissen errechnet, sind folglich selbst *zufällige Veränderliche* und schwanken deshalb von Stichprobe zu Stichprobe innerhalb eines gewissen, vom Stichprobenumfang abhängigen Bereiches um ihren Erwartungswert herum: sie *streuen.* Es ist klar, daß die Präzision der Schätzung mit der Breite dieses Schwankungsbereiches, das heißt mit der Größe der Standardabweichung (standard deviation) bzw. mit deren Quadrat, der Varianz (variance), zu- oder abnimmt.

Die Schätzung mit der *kleinsten* Varianz bezeichnet man als *wirksamste Schätzung.* Die Varianz der wirksamsten Schätzung, sofern eine solche für einen gegebenen Parameter überhaupt existiert, läßt sich nach der Ungleichung von RAO[5]-CRAMÉR[6] berechnen (wir verzichten hier auf die Wiedergabe dieser Ungleichung und verweisen auf [5] und [6]).

(**428**) Wir definieren als *wirksamste Schätzung* jene biasfreie Schätzung eines Parameters, die der Ungleichung von RAO-CRAMÉR genügt, und bezeichnen eine solche Schätzung als 100%ig wirksam.

(**429**) Schätzungen, die die Bedingung (**428**) für jeden Stichprobenumfang erfüllen, existieren selten. Es gibt nun aber Schätzungen, die, wenn der Stichprobenumfang gegen Unendlich strebt, der Bedingung (**428**) genügen. Solche Schätzungen bezeichnet man als *asymptotisch wirksamste Schätzungen* (mit einer asymptotischen Wirksamkeit von 100%).

(**430**) Asymptotisch wirksamste Schätzungen nach (**429**) eignen sich für χ^2-Teste, andere nicht.

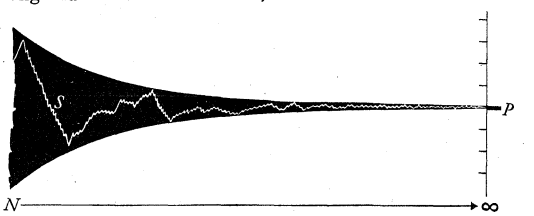
(**431**) (**430**) muß insofern modifiziert werden, als Schätzungen, die der Ungleichung von RAO-CRAMÉR asymptotisch genügen, gar nicht immer existieren. Man muß sich dann damit behelfen, von allen Schätzungen, deren Existenz uns bekannt ist, die asymptotisch wirksamste für χ^2-Teste zu benutzen, obschon ihre asymptotische Wirksamkeit nach (**429**) nicht 100% beträgt.

In der Regel verkleinert sich die Standardabweichung einer Schätzung absolut oder relativ (zur Größe der Schätzung) mit wachsendem Stichprobenumfang (vgl. Abb. 17):

(**432**)

(a) Bleibt ein Parameter mit wachsendem Stichprobenumfang *konstant*, so konvergiert die Standardabweichung seiner Schätzung mit wachsendem Stichprobenumfang N in der Größenordnung $1/\sqrt{N}$ stochastisch gegen Null.

(b) Für Parameter, die sich mit wachsendem Stichprobenumfang N proportional zu N, N^2 usw. *vergrößern*, gilt (a) auch, wenn man Parameter, Schätzung und ihre Varianz durch N, N^2 usw. dividiert.



Standardabweichung
S Schätzung
P Parameter

Abb. 17

(**433**) Beträgt die Wirksamkeit der Schätzung A 100%, die der Schätzung B des gleichen Parameters 75%, so bedeutet das, daß bei Anwendung der Methode B der Stichprobenumfang (100:75)mal = 4/3mal so groß sein muß, um eine Schätzung gleicher Präzision zu erhalten wie unter der Anwendung der Methode A [unter der Voraussetzung, daß (**432**) gilt].

(**434**) Man kann somit durch Vergrößern der Stichprobe eine weniger wirksame Schätzung auf die gleiche Präzision bringen wie eine wirksamere,
oder umgekehrt kann für eine bestimmte Präzision der Stichprobenumfang kleiner sein, wenn man eine wirksamere Schätzmethode verwendet (vgl. Abb. 18).

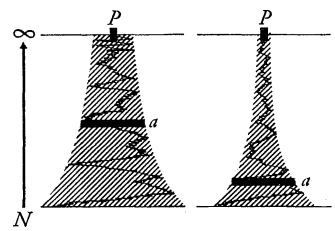


Abb. 18 a = Präzision der Schätzung.

Welche Methode soll man verwenden, wenn zur Schätzung eines Parameters mehrere Formeln zur Verfügung stehen? Jene, die zur wirksamsten Schätzung führt, aber vielleicht bedeutend mehr Rechenarbeit erfordert, oder jene, die leichter und somit schneller zu rechnen ist? Nach der Theorie gibt es nur eine Wahl: die wirksamste Schätzung. In der Praxis sieht es allerdings anders aus, denn neben mathematischen beeinflussen mit Recht auch praktische Anforderungen unsere Überlegungen.

(**435**) Man verwende die wirksamste aller bekannten Schätzungen eines Parameters,

- wenn die Versuche im Vergleich zur numerischen Auswertung kostspielig sind [vgl. (**434**)],
- wenn die Versuche nicht mehr wiederholt werden können,
- wenn χ^2-Teste geplant sind,
- wenn das Resultat möglichst präzis und informativ sein soll,
- wenn von anderer Seite üblicherweise wirksamste Schätzungen für gleiche Untersuchungen verwendet wurden (man verdirbt sich dann nicht die Möglichkeit gegenseitiger Vergleiche und Signifikanzteste).

(**436**) Wenn keine Überlegungen nach (**435**) dagegen sprechen, verwende man weniger wirksame Schnellschätzungen,

- wenn die numerische Auswertung teurer ist als die Versuche [vgl. (**434**)],
- wenn die Präzision der Schätzung für den vorgesehenen Zweck genügt,

– wenn die Versuche zur Vororientierung schnell überprüft werden sollen,
– für Routineuntersuchungen,
– zur Nachkontrolle wirksamerer Schätzungen, deren Berechnung viele Fehlermöglichkeiten aufweist. } (436)

7 D. Erschöpfende Schätzungen

Eine Schätzung oder eine Kombination von Schätzungen, die in einem gegebenen Falle *alle Informationen* liefert, die überhaupt möglich sind, nennt man *erschöpfend.* (437)

Unter Information stelle man sich (ungefähr) den Kehrwert der Varianz vor. (438)

Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß, ähnlich wie beim Bias, die Streuung einer Schätzung von experimentellen Bedingungen abhängig ist und durch entsprechende Planung der Versuche verkleinert werden kann.

Nachtrag: Die Bezeichnungen konsistent (consistent), wirksam (efficient) und erschöpfend (sufficient) gehen sämtliche auf R. A. FISHER zurück. Nach ihm ist aber «efficient» für jene Schätzungen zu reservieren, die wir oben als für χ^2-Teste geeignete Schätzungen bezeichnet haben [vgl. (**430**) und (**431**)].

8. Vertrauens- und Toleranzgrenzen

8 A. Vertrauensgrenzen stetiger und diskreter Verteilungen

Dieser Unterabschnitt setzt die Kenntnis der Beispiele 13 und 16 der Abschnitte 5 und 6 voraus.

Mit der Schätzung eines Parameters haben wir noch nicht viel gewonnen, weil beispielsweise bei einer stetigen Verteilung, wie (**398**) zeigt, die Wahrscheinlichkeit, daß Schätzung [x in (**398**)] und Parameter [k in (**398**)] übereinstimmen, gleich Null ist. Mehr sagen uns zwei aus der Stichprobe zu errechnende Werte x_l und x_r, die mit *großer Wahrscheinlichkeit* den Parameter zwischen sich einschließen. Solche Grenzen nennt man *Vertrauensgrenzen.* Die damit im Zusammenhang stehenden Bezeichnungen und mathematischen Definitionen finden sich in den Beispielen 13 und 16 der Abschnitte 5 und 6.

Für die von uns verwendeten Vertrauensgrenzen gilt:

Unsere Vertrauensgrenzen sind identisch mit den *confidence limits* nach J. NEYMAN[7–9]. (439)

Vertrauensgrenzen beziehen sich auf einen *Parameter,* der als *Konstante* vorausgesetzt wird. (440)

Vertrauensgrenzen sind *Schätzungen* und als solche *zufällige Veränderliche,* und zwar sind sowohl die *Lage der Grenzen* als auch die *Breite des Vertrauensbereiches* zufällige Veränderliche (vgl. Abb. 19). (441)

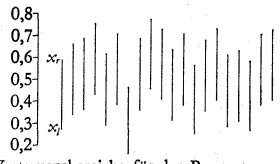


Abb. 19 95%-Vertrauensbereiche für den Parameter p einer binomialverteilten Bevölkerung, berechnet aus 20 Stichproben des Umfanges 40.

Wirksamere Schätzungen ergeben bei gegebenem Stichprobenumfang *engere* Vertrauensbereiche als weniger wirksame. (442)

Analog zu (**432**) verengert sich der Vertrauensbereich absolut oder relativ (zur Größe der Schätzung) mit wachsendem Stichprobenumfang:

Bleibt ein Parameter mit wachsendem Stichprobenumfang *konstant,* so konvergieren in der Größenordnung $1/\sqrt{N}$ die Vertrauensgrenzen stochastisch gegen den Parameter, die Breite des Vertrauensbereiches gegen Null (vgl. Abb. 20). (a)

Für Parameter, die sich mit wachsendem Stichprobenumfang N proportional zu N, N^2 usw. *vergrößern,* gilt (a) auch, wenn man den Parameter und seine Vertrauensgrenzen durch N, N^2 usw. dividiert. (b)

(443)

Vertrauensgrenzen sind wie folgt zu interpretieren [beachte dazu (**456**)]: Wenn sehr viele (unendlich viele) Stichproben des *gleichen Umfanges* aus der *gleichen, stabilen Bevölkerung* erhoben und jedesmal die Vertrauensgrenzen berechnet werden, so werden diese Grenzen

(einseitige Vertrauensbereiche)

– in durchschnittlich $\geqq 100\,(1-\alpha)\%$ aller Fälle* den wahren Wert des Parameters einschließen (a)

oder (gleichwertige Interpretation)

– in durchschnittlich $\leqq 100\,\alpha\%$ aller Fälle* den wahren Wert des Parameters *nicht* einschließen, (b)

(zweiseitige Vertrauensbereiche)

– in durchschnittlich $\geqq 100\,(1-2\,\alpha)\%$ aller Fälle* den wahren Wert des Parameters einschließen (c)

oder (gleichwertige Interpretation)

– in durchschnittlich $\leqq 100\,(2\,\alpha)\%$ aller Fälle* den wahren Wert des Parameters *nicht* einschließen, und zwar wird in durchschnittlich $\leqq 100\,\alpha\%$ aller Fälle* x_l (die untere Grenze) *über* dem Parameter und in durchschnittlich $\leqq 100\,\alpha\%$ aller Fälle* x_r (die obere Grenze) *unter* dem Parameter liegen. (d)

(444)

Üblicherweise wird auf medizinisch-biologischen Gebieten die Vertrauenswahrscheinlichkeit 0,95, seltener 0,99 verwendet, das heißt, α (einseitige Bereiche) oder $2\,\alpha$ (zweiseitige Bereiche) ist gleich 0,05, seltener 0,01. (445)

Formeln zur Berechnung der Vertrauensbereiche für verschiedene Parameter werden später von Fall zu Fall gegeben.

Besteht der Zweck einer statistischen Untersuchung in der Abschätzung eines Parameters, sollten immer auch die entsprechenden Vertrauensgrenzen bestimmt werden: Mit Vertrauensgrenzen besitzt eine Schätzung, das heißt das Resultat einer Untersuchungsreihe, eine informative Vertrauenswürdigkeit, ohne Vertrauensgrenzen ist letztere gleich Null. Gestützt auf unsere Tafeln, ist mit der Berechnung der Vertrauensgrenzen nur ein *kleiner* zusätzlicher oder gar *kein* Rechenaufwand verbunden.

Nachtrag: Auf R. A. FISHER geht der Begriff der *fiducial limits* zurück, die logisch etwas anderes darstellen als die *confidence limits* nach J. NEYMAN. Da die *fiducial limits* exakt nur bei stetigen Verteilungen und bei diskreten Verteilungen nur dann angenähert bestimmt werden können, wenn der Stichprobenumfang groß ist, verwenden wir die *confidence limits,* bei denen keine solchen Einschränkungen bestehen.

8 B. Toleranzgrenzen stetiger Verteilungen

Grenzen für einen Prozentsatz der Bevölkerung nennt man Toleranzgrenzen. (446)

Den Prozentsatz der Bevölkerung symbolisieren wir mit $100\,\beta_p\%$, Vertrauenswahrscheinlichkeiten (Vertrauenskoeffizienten) im Zusammenhang mit Toleranzgrenzen mit β_t. (447)

(**441**) und (**442**) gelten auch für Toleranzgrenzen. (448)

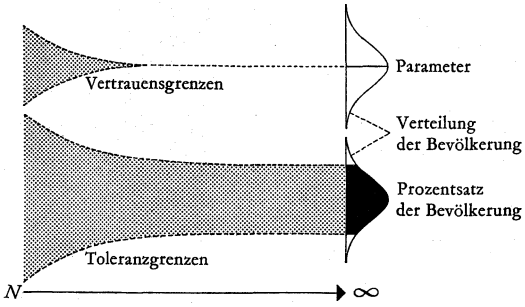


Abb. 20 Konvergenz von Vertrauens- und Toleranzgrenzen.

* Das «größer»- oder «kleiner»-Zeichen steht für diskrete, das Gleichheitszeichen für stetige Verteilungen.

Analog zu (**443**) konvergieren auch Toleranzgrenzen stochastisch mit wachsendem Stichprobenumfang, aber *nicht gegen einen, sondern gegen zwei* Grenzparameter, die jenen Quantilen der Bevölkerung entsprechen, zwischen denen sich der Prozentsatz der Bevölkerung befindet, auf den die Toleranzgrenzen bezogen sind. Der zwischen den Toleranzgrenzen liegende Toleranzbereich strebt somit *nicht gegen Null,* sondern gegen einen *festen Wert* (vgl. Abb. 20). (**449**)

Toleranzgrenzen können wie Vertrauensgrenzen ein- oder zweiseitig sein. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf zweiseitige Toleranzgrenzen, wobei

$$\beta_p = 1-2\alpha, \text{ und } \alpha \text{ (links)} = \alpha \text{ (rechts)} = \int_{-\infty}^{x_l} f(x)\,dx = \int_{x_r}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Man unterscheidet Toleranzgrenzen mit und ohne Vertrauenswahrscheinlichkeit β_t. Sie sind wie folgt zu interpretieren [beachte dazu (**456**)]:

(**450**)

Toleranzgrenzen ohne Vertrauenswahrscheinlichkeit. Wenn sehr viele (unendlich viele) Stichproben des *gleichen Umfanges* aus der *gleichen, stabilen Bevölkerung* erhoben und jedesmal die Toleranzgrenzen berechnet werden, so werden diese Grenzen

(a) – *durchschnittlich* 100 β_p% der Bevölkerung einschließen

oder (gleichwertige Interpretation)

(b) – durchschnittlich 100 $(1-\beta_p)$% der Bevölkerung *nicht* einschließen, und zwar werden durchschnittlich 100 α% der Bevölkerung *unter* der linken (unteren) und 100 α% *über* der rechten (oberen) Grenze liegen.

(**451**)

Toleranzgrenzen mit Vertrauenswahrscheinlichkeit β_t. Wenn sehr viele (unendlich viele) Stichproben des *gleichen Umfanges* aus der *gleichen, stabilen Bevölkerung* erhoben und jedesmal die Toleranzgrenzen berechnet werden, so werden diese Grenzen in durchschnittlich 100 β_t% aller Fälle *mindestens* 100 β_p% der Bevölkerung einschließen.

(**452**)

Die in unseren Tafeln (S. 44, Spalte A) enthaltenen Toleranzfaktoren für Toleranzbereiche ohne Vertrauenswahrscheinlichkeit [Interpretation (**450**)] gelten für *normalverteilte* Bevölkerungen. Diese Toleranzbereiche sind identisch mit den Vertrauensgrenzen für die Differenz zwischen dem Mittelwert einer Stichprobe und einer späteren Einzelbeobachtung[10].

(**453**)

Toleranzbereiche *mit* Vertrauenswahrscheinlichkeit [Interpretation (**450**)] sind breiter als jene *ohne* Vertrauenswahrscheinlichkeit, wie es intuitiv zu erwarten ist. Beide Bereiche konvergieren aber mit wachsendem Stichprobenumfang zum Grenzbereich von (**449**).

Formeln zur Bestimmung von Toleranzbereichen normalverteilter Bevölkerungen finden sich auf S. 170.0.

Von erheblicher Bedeutung sind in medizinisch-biologischen Gebieten die Toleranzgrenzen zur Bestimmung von *Normalbereichen.* Bis jetzt wurden diese allerdings nur selten exakt nach den Vorschriften für Toleranzgrenzen berechnet*. Gestützt auf unsere Tafeln, ist die exakte Berechnung aber nur in den wenigsten Fällen mit einem zusätzlichen Rechenaufwand verbunden:

(**454**)

Man bestimme deshalb Normalbereiche nach den Vorschriften für Toleranzgrenzen, und zwar

(a) *Normalbereiche* generell als Toleranzbereiche *ohne* Vertrauenswahrscheinlichkeit [mit Interpretation (**449**)] für einen Prozentsatz der Bevölkerung 100 β_p% = 95% [vgl. (**452**)].

(b) Für besondere Zwecke (in der Regel industrielle, zum Beispiel in Fällen, wo der Ausschuß möglichst klein gehalten werden soll) Toleranzbereiche *mit* Vertrauenswahrscheinlichkeit β_t [mit Interpretation (**451**)].

Nachtrag: «normal»

(**455**)

Oben haben wir das Wort «normal» in «normalverteilt» und «Normalbereich» in zweierlei Sinn verwendet.

In «normalverteilt» ist «normal» lediglich ein konventionelles Adverb: die entsprechende Verteilung wird «Normalverteilung» genannt, ohne daß hier dem Wort «normal» irgendwelche tiefere Bedeutung zukäme, es sei denn, weil diese Verteilung sehr häufig und wichtig ist.

In der Bezeichnung «Normalbereich» hingegen hat das Wort «normal» seine sinngemäße Bedeutung: Der Normalbereich soll jenen Bereich darstellen, der die «Normalen» der Bevölkerung enthält. Konventionsgemäß ist dies auf medizinisch-biologischen Gebieten der 95%-Toleranzbereich ohne Vertrauenswahrscheinlichkeit [vgl. (**450**)].

8 C. Verteilungsfreie Vertrauens- und Toleranzgrenzen

(Vgl. dazu Abschnitt 10F)

(**456**)

Die Interpretationen (**444**), (**450**) und (**451**) sind nur dann korrekt, wenn die Stichprobe tatsächlich jener Bevölkerung entstammt, für deren Parameter bzw. Prozentsatz die Grenzen berechnet wurden: Die Formeln zur Berechnung dieser Grenzen sind spezifisch für die einzelnen Bevölkerungstypen.

Ist die Gestalt der Verteilung einer Bevölkerung unbekannt, was oft der Fall ist, so hat es keinen Sinn – vor allem bei *kleinen* Stichproben –, Vertrauens- und Toleranzgrenzen auf Grund von *Annahmen* über die Verteilung der Bevölkerung auszurechnen, sofern diese Annahmen nicht aus der Erfahrung, den experimentellen Umständen usw. begründet werden können.

(**457**)

In solchen Fällen bediene man sich der sogenannten *verteilungsfreien* Vertrauens- und Toleranzgrenzen, wenn solche im gegebenen Fall zur Verfügung stehen. Die Interpretationen (**444**), (**450**) und (**451**) stimmen in diesem Fall *ohne jegliche Voraussetzung über die Verteilung der Bevölkerung**, das heißt, sie stimmen für *alle* Bevölkerungen mit der einzigen Beschränkung, daß diese *stetig* sein müssen.

Verteilungsfreie Vertrauens- und Toleranzgrenzen sind *breiter* als solche, die auf Grund spezifizierter Bevölkerungen ausgerechnet werden. Dies ist intuitiv leicht verständlich, weil sie ja für die unterschiedlichsten Bevölkerungen der Interpretation (**451**) genügen müssen.

Verteilungsfreie Vertrauensgrenzen für Quantile (Median, Quartile, Perzentile usw.) für kleinere Stichproben (Umfang bis zu $N = 100$) aus stetigen Bevölkerungen können aus unseren Tafeln *ohne* Rechnung abgelesen werden. Entsprechende Anleitungen sowie Formeln zur Berechnung verteilungsfreier Vertrauens- und Toleranzgrenzen findet der Leser im Abschnitt 10F und 20.

Auf S. 128 findet sich eine Tafel «Verteilungsfreie Toleranzgrenzen», die ohne Rechnung folgendes Problem löst: Oft steht man vor der Aufgabe, zu Beginn einer Versuchsserie den Umfang einer Stichprobe festzulegen, *ohne irgendwelche Handhaben darüber zu besitzen, wie die Verteilung der Bevölkerung beschaffen sein könnte.* Einerseits sollte die Stichprobe groß genug sein, um einigermaßen repräsentativ für die Bevölkerung zu sein, andererseits sollte sie aber, um Kosten zu sparen, auch nicht zu groß sein. Dieses Problem läßt sich auf Grund der verteilungsfreien Toleranzgrenzen lösen, bzw. es *ist* in der obenerwähnten Tafel für die meisten Zwecke gelöst. Sollen die beiden Extremwerte der zukünftigen Stichprobe zum Beispiel 90% der Bevölkerung mit der großen Wahrscheinlichkeit von 0,999 zwischen sich einschließen, so ergibt die Tafel einen Stichprobenumfang von 88. Erhebt man danach eine Stichprobe des Umfanges 88, so liegen 90% der Bevölkerung mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,999 zwischen dem 1. und dem 88. Wert der Stichprobe.

9. Statistische Signifikanzteste

9 A. Einführung

Wir sind im Besitze eines «wahren» Würfels, bei dem die Wahrscheinlichkeit, die Zahl 1 oder 2 oder . . . 6 zu werfen, exakt 1/6 beträgt. Die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu werfen, ist somit exakt 0,5. Maßzahlen der Bevölkerung werden nach (**331**) als Parameter bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit 0,5 ist somit ein Parameter der Bevölkerung mit den Ereignissen «gerade Zahl»

* Bei großen Stichproben ist dies belanglos.

* Deshalb das Adjektiv «verteilungsfrei».

und «ungerade Zahl», die durch unseren wahren Würfel geliefert wird.

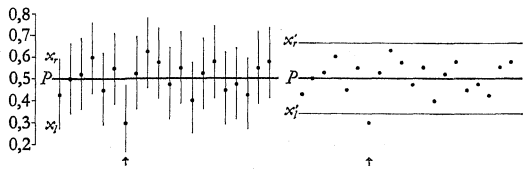


Abb. 21 95%-Vertrauensgrenzen (links) und entsprechende 5%-Signifikanzschranken (rechts) bei gegebenem Stichprobenumfang (vgl. dazu Legende von Abb. 19). Die Punkte entsprechen der Schätzung p der Wahrscheinlichkeit $\boldsymbol{p}$ (in der Abbildung als Parameter mit P bezeichnet).

Mit diesem Würfel machen wir zur Kontrolle von (**444** d) 20 Stichproben zu 40 Würfen und bestimmen bei jeder Stichprobe an Hand der geworfenen ungeraden Zahlen die in Abbildung 21, links, dargestellten 95%-Vertrauensgrenzen für den Parameter 0,5. In Übereinstimmung mit (**444** d) schließt ein Vertrauensbereich von 20 den Parameter nicht ein (vgl. Pfeil).

Nun stellen wir uns vor, wir hätten diese Vertrauensgrenzen erhalten, indem wir nicht mit *einem* uns *bekannten* Würfel *zwanzig* Stichproben, sondern mit *zwanzig* uns *unbekannten* Würfeln *je eine* Stichprobe gewürfelt hätten. Sofort würde sich der Verdacht regen, bei jenem Würfel, dessen Vertrauensbereich den Parameter 0,5 nicht einschließt, «stimme etwas nicht». Denn wir haben mit ihm ja nur eine Stichprobe gemacht, und daß gerade bei der *einen, ersten* Stichprobe jenes seltene Ereignis, das nach (**444** d) auf lange Sicht nur in 5% aller Fälle eintreten sollte, wirklich eintrifft, dagegen sträubt sich unsere auf Erfahrung basierende Intuition*. Wir erklären deshalb den verdächtigen Würfel als falsch, mit dem Vorbehalt, uns mit einer Signifikanzwahrscheinlichkeit von 0,05 zu irren.

Damit wäre das Prinzip dargelegt, das mutatis mutandis allen statistischen Testen zugrunde liegt.

9 B. Signifikanzschranken

Obiges Beispiel zeigt, daß man Signifikanzteste an Hand von Vertrauensgrenzen durchführen kann:

Bei einem Signifikanztest auf Grund von *Vertrauens- oder Toleranzgrenzen* werden 1 oder 2 *zufällig veränderliche Grenzwerte* mit einer bekannten oder hypothetischen, *konstanten Prüfgröße* verglichen (vgl. Abb. 21, links). } (**458**)

Viele Signifikanzteste werden an Hand von Signifikanzschranken durchgeführt:

Bei einem Signifikanztest auf Grund von *Signifikanzschranken* im üblichen Sinn werden 1 oder 2 *konstante Grenzwerte* mit einer *zufällig veränderlichen Prüfgröße* verglichen (vgl. Abb. 21, rechts). } (**459**)

Es ist *unerheblich,* ob Signifikanzteste an Hand von Vertrauens- und Toleranzgrenzen oder von Signifikanzschranken im üblichen Sinn durchgeführt werden: Das Resultat ist dasselbe (vgl. Abb. 21, links und rechts). Bei beiden Methoden gilt die Interpretation eines signifikanten Unterschiedes [vgl. (**381**), (**382**), (**394**), (**413**), (**414**) und (**420**)], wenn die *Prüfgröße die Grenzen berührt oder außerhalb liegt.* } (**460**)

Vertrauens- und Toleranzgrenzen sowie Signifikanzschranken sind eng miteinander verflochten:

– entweder unterscheiden sie sich nur symbolisch und sind numerisch gleich, } (a)

– oder sie unterscheiden sich formelmäßig und numerisch, die entsprechenden Formeln lassen sich jedoch ineinander überführen. } (b)

} (**461**)

Beispiel 17 zu (**461** a). Bei der Binomialverteilung sind

$\left.\begin{array}{l}\uparrow\\ \downarrow\end{array}\right\}$ $\boldsymbol{p}_l < p < \boldsymbol{p}_r$ Signifikanzschranken für p
$p_l < \boldsymbol{p} < p_r$ Vertrauensgrenzen für $\boldsymbol{p}$

wobei $\boldsymbol{p}$ Konstanten und p zufällige Veränderliche sind. Wenn $p = \boldsymbol{p}$, ist $\boldsymbol{p}_l = p_l$ und $\boldsymbol{p}_r = p_r$ (bei gleichem Stichprobenumfang).

Beispiel 18 zu (**461** b). Es ist $\bar{x}$ der Mittelwert, $s_{\bar{x}}$ die Standardabweichung des Mittelwertes einer Stichprobe aus einer normalverteilten Bevölkerung mit dem Mittelwert μ_1, t die dem Umfang der Stichprobe und der geforderten Signifikanzwahrscheinlichkeit entsprechende Signifikanzschranke der STUDENT-Verteilung:

$\left.\begin{array}{l}\uparrow\\ \downarrow\end{array}\right\}$ $\bar{x} - t s_{\bar{x}} < \mu_1 < \bar{x} + t s_{\bar{x}}$ Vertrauensgrenzen für μ_1

$-t s_{\bar{x}} < \bar{x} - \mu_1 < +t s_{\bar{x}}$ } Weder Vertrauensgrenzen noch Signifikanzschranken im üblichen Sinn (Grenzen wie Prüfgröße sind zufällige Veränderliche)

$-t < \dfrac{\bar{x} - \mu_1}{s_{\bar{x}}} < +t$ Signifikanzschranken für $\dfrac{\bar{x} - \mu_1}{s_{\bar{x}}}$

Zur Prüfung der Nullhypothese $\mu_0 = \mu_1$ eignen sich alle 3 Formeln: Man setzt an die Stelle von μ_1 den hypothetischen Vergleichsparameter μ_0 und vergleicht dessen Lage zu jener der Grenzen. Am übersichtlichsten (besonders für Anfänger) ist die oberste, am schnellsten zu rechnen die mittlere, am gebräuchlichsten die unterste Formel.

Wenn wir im folgenden im Hinblick auf (**460**) und (**461**) und die dort gegebenen Beispiele im Zusammenhang mit Signifikanztesten manchmal einfach von «Schranken» sprechen, so sind damit solche gemeint, die hinsichtlich der ins Auge gefaßten Bevölkerung den Vorschriften (**376**) und (**377**) bzw. (**409**) und (**410**) entsprechen.

Alle für Signifikanzteste geeigneten Schranken konvergieren absolut oder relativ mit wachsendem Stichprobenumfang oder bei gegebenem Stichprobenumfang mit wachsender Anzahl der Stichproben [wenn (**432**) gilt]. Für alle gilt Ähnliches, wie in (**443**) und (**449**) über Vertrauens- und Toleranzgrenzen ausgeführt wurde. } (**462**)

Als Folgerungen aus (**462**) ergeben sich:

Mit wachsendem Stichprobenumfang läßt sich ein bestehender Unterschied immer signifikanter nachweisen. } (a)

Bei einer gegebenen Signifikanzwahrscheinlichkeit lassen sich mit wachsendem Stichprobenumfang immer kleinere Unterschiede nachweisen. } (b)

Wenn tatsächlich zwischen einer aktuellen und einer hypothetischen Bevölkerung ein Unterschied besteht, der sich auf Grund kleiner Stichproben signifikant feststellen läßt, so wird die sich darauf stützende Behauptung, die aktuelle Bevölkerung *unterscheide* sich von der hypothetischen, durch größere Stichproben mit noch größerer Signifikanz (in der Regel) *bestätigt* werden (vgl. Abb. 22 a). } (c)

Wenn tatsächlich zwischen einer aktuellen und einer hypothetischen Bevölkerung ein Unterschied besteht, der sich auf Grund kleiner Stichproben *nicht* signifikant feststellen läßt, so wird die sich darauf stützende Behauptung, die aktuelle Bevölkerung sei *gleich* der hypothetischen, durch größere Stichproben (in der Regel) *widerlegt* werden (vgl. Abb. 22 b). } (d)

Wenn tatsächlich zwischen einer aktuellen und einer hypothetischen Bevölkerung *kein* Unterschied besteht, so *ließe* (Konjunktiv!) sich dies mit einiger Sicherheit erst mit sehr großen (sicher nur mit unendlich großen) Stichproben feststellen. } (e)

} (**463**)

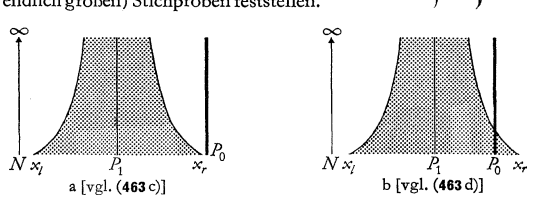


Abb. 22 P_0 ist der hypothetische, P_1 der zu prüfende Parameter, x_l und x_r sind die mit wachsendem Stichprobenumfang konvergierenden Vertrauensgrenzen von P_1.

* Nach einiger Überlegung werden wir aber zugeben müssen, daß ein solcher Fall – auch bei viel kleinerer Wahrscheinlichkeit – doch möglich wäre, denn (**444** d) macht keine Angaben darüber, *wann* ein seltenes Ereignis innerhalb einer Versuchsreihe einzutreten hat. *Solche zeitlichen Voraussagen kann man bei zufälligen Ereignissen nie machen, wenn die Versuche unabhängig sind.*

9 C. Signifikanzteste

Allgemeines

Alle statistischen Teste beruhen auf dem grundlegenden Prinzip, eine *unbekannte Bevölkerung,* der die Stichprobe entstammt, mit einer *bekannten* oder *hypothetischen Bevölkerung* zu vergleichen. **(464)**

Mit *allen* statistischen Testen können mit exakter Wahrscheinlichkeit nur Unterschiede, *nicht* aber Übereinstimmung zwischen den verglichenen Bevölkerungen festgestellt werden [vgl. dazu (**463**)]. **(465)**

Die Hypothese H_0, daß 2 Bevölkerungen übereinstimmen, wird *Nullhypothese* genannt. Wegen (**465**) wird sie in der Regel aufgestellt, um *verworfen* zu werden. **(466)**

Die Bezeichnung «Nullhypothese» erklärt sich so: P_1 symbolisiere die Bevölkerung, der die Stichprobe entstammt, P_0 die hypothetische. Wenn nun P_1 mit P_0 übereinstimmt, das heißt, wenn $P_1 = P_0$, dann ist $P_1 - P_0 =$ Null.

Führt ein statistischer Test* mit der Signifikanzwahrscheinlichkeit α oder $2\,\alpha$ zur Feststellung eines Unterschiedes zwischen den verglichenen Bevölkerungen [vgl. (**460**)], so wird die Nullhypothese verworfen und die Alternativhypothese, daß sich die Bevölkerungen unterscheiden, akzeptiert. Die Wahrscheinlichkeit, bei dieser *Entscheidung* einen *Fehler erster Art* zu machen, das heißt, die Nullhypothese abzulehnen, wenn sie richtig ist, in anderen Worten, einen Unterschied festzustellen, wenn tatsächlich keiner besteht, ist α oder $2\,\alpha$. **(467)**

Die Wahrscheinlichkeit, einen *Fehler zweiter Art* zu machen, das heißt, die Nullhypothese zu akzeptieren, wenn sie falsch ist, in anderen Worten, einen Unterschied nicht zu entdecken, wenn tatsächlich einer besteht, ist β. α und β stehen in enger Beziehung zueinander: je kleiner man α nimmt, um so größer wird β und umgekehrt. (β ist aber *nicht* $1-\alpha$ oder $1-2\,\alpha$: Wir können hier auf diese Beziehung nicht eintreten.) **(468)**

Mit wachsendem Stichprobenumfang verkleinern sich die Wahrscheinlichkeiten, einen Fehler erster oder zweiter Art zu machen. **(469)**

Kommentar zu (**468**): Wenn es darauf ankommt, einen Fehler erster Art zu vermeiden, das heißt, wenn man ganz sichergehen will, einen Unterschied nur dann zu akzeptieren, wenn er wirklich besteht, dann wähle man α oder $2\,\alpha$ klein, zwischen 10^{-2} und 10^{-6}, entsprechend dem Risiko, das man eingehen darf.

Andererseits wähle man bei Untersuchungsserien, die in der Richtung zielen, einen Unterschied zu *entdecken,* α oder $2\,\alpha$ größer, zwischen 0,2 und 0,05. Bei späteren, möglicherweise größeren Untersuchungsserien kann man die Signifikanzwahrscheinlichkeit immer noch verkleinern, um einen früher gefundenen Unterschied besser zu sichern. Aber auch dann, wenn ein Unterschied sich in größeren Stichproben nur mit einer Signifikanzwahrscheinlichkeit von 0,1 sichern ließe, ist man unter besonderen Umständen berechtigt (zum Beispiel bei lebensrettenden Medikamenten), die Nullhypothese zu verwerfen. Ein Arzt wird beispielsweise gerne das Risiko auf sich nehmen, einmal in 10 Fällen sich zu irren, ein besseres Medikament verabreicht zu haben. Unserer Ansicht nach verwendet man in medizinisch-biologischen Forschungen *zu kleine* Signifikanzwahrscheinlichkeiten.

Macht eines Testes

Die Wahrscheinlichkeit $1-\beta$, das heißt die Wahrscheinlichkeit, einen Unterschied zu entdecken, wenn tatsächlich einer besteht, wird als *Macht* (power) eines Testes bezeichnet. **(470)**

Aus (**469**) folgt, daß sich die Macht eines Testes (in der Regel) durch Vergrößern des Stichprobenumfanges steigern läßt. **(471)**

Je mehr über die zu vergleichenden Bevölkerungen *bekannt* ist, um so *mächtiger* sind die Teste, die, gestützt auf diese Kenntnisse, durchgeführt werden können (aber nicht müssen). (Man darf auch in solchen Situationen weniger mächtige Teste anwenden, wenn sie für den vorgesehenen Zweck genügen.) **(472)**

* Von nun an sprechen wir anstatt von statistischen Testen nur noch von Testen.

Kommentar zu (**472**): Je mehr die Polizei über einen Delinquenten weiß, desto wirkungsvoller (mächtiger) wird die Fahndung (in unserem Fall der Test) sein.

Die *relative* Macht verschiedener in ähnlicher Richtung zielender Teste läßt sich *nur* an Hand von *bekannten* Bevölkerungen beurteilen. **(473)**

Kommentar zu (**473**): Damit scheidet die (früher auf Grund einer gegebenen Situation berechnete) relative Macht eines Testes als Auswahlkriterium in allen jenen Situationen aus, wo man die zu vergleichenden Bevölkerungen nicht kennt. Man hüte sich in solchen Fällen, Kenntnisse durch *Annahmen* ersetzen zu wollen, die als richtig vorausgesetzt werden. Ein darauf basierendes Testresultat ist nicht vertrauenswürdig (vgl. später).

Interpretationen

[Vgl. auch (**476**)]

Besteht der Zweck einer Versuchsserie darin, die *Übereinstimmung* zwischen Bevölkerungen nachzuweisen, und wird beim entsprechenden Test *kein* signifikanter Unterschied festgestellt, so akzeptiere man die Nullhypothese so lange, als sie nicht durch weitere Experimente widerlegt wird. **(474)**

Kommentar zu (**474**): Man macht gerne den Fehler, die Übereinstimmung zwischen Bevölkerungen als bewiesen anzusehen, wenn kein signifikanter Unterschied nachzuweisen ist [vgl. dazu (**463** d und e) und Abb. 22 b].

Besteht der Zweck einer Versuchsserie darin, einen *Unterschied* zwischen Bevölkerungen nachzuweisen, und wird beim entsprechenden Test *kein* signifikanter Unterschied festgestellt, so interpretiere man: «An Hand der vorliegenden Stichprobe läßt sich (mit der verwendeten Signifikanzwahrscheinlichkeit) ein Unterschied (statistisch) nicht sichern.» **(475)**

Kommentar zu (**475**): Unrichtig wäre die Interpretation: Es besteht *kein* Unterschied [vgl. dazu (**463** d und e) und Abb. 22 b].

Einseitige und zweiseitige Teste

Wenn man von früheren Erfahrungen her oder aus hypothetischen Überlegungen die Richtung eines vermutlichen Größenunterschiedes zweier Parameter kennt oder zu kennen glaubt, dann entscheide man sich *vor* Erhebung der Stichprobe zu einem *einseitigen Test* unter Festsetzung der vermuteten Richtung des Größenunterschiedes ($A < B$ oder $A > B$) und der Signifikanzwahrscheinlichkeit α, die konventionell 0,05 oder 0,01 beträgt* [vgl. dazu Kommentar zu (**468**)]. Beim einseitigen Test wird nur eine – entweder die linke oder die rechte – Schranke gemäß der vorbestimmten Richtung des Testes geprüft, daher der Name. Einseitige Teste sind sensibler (mächtiger, more powerful) hinsichtlich der Entdeckung eines Unterschiedes als zweiseitige. Sie sind aber nur dann berechtigt, wenn über die Richtung eines eventuellen Größenunterschiedes einige, nicht aus der Stichprobe gezogene Klarheit besteht. Über die Interpretation einseitiger Teste siehe (**476**).

Interpretation einseitiger Teste** **(476)**

Geforderte Signifikanz	Lage der Prüfgröße: hypothetisch	Lage der Prüfgröße: Test	Interpretation und (in Klammer) Signifikanz: einseitig	Interpretation und (in Klammer) Signifikanz: zweiseitig
α	$x < x_l$	$x \leqq x_l$ $x > x_l$	$x < x_l$ ($\leqq \alpha$) (**475**)	keine
α	$x > x_r$	$x \geqq x_r$ $x < x_r$	$x > x_r$ ($\leqq \alpha$) (**475**)	keine

Interpretation zweiseitiger Teste**

$2\,\alpha$	ungewiß	$x \leqq x_l$ $x \geqq x_r$ $x_l < x < x_r$	$x < x_l$ ($\leqq 2\,\alpha$) $x > x_r$ ($\leqq 2\,\alpha$) (**475**) oder (**474**)	ungleich ($2\,\alpha$)

* Dient α oder 2α als Kriterium zu *Entscheiden* (Ablehnung oder Annahme der Nullhypothese), so muß dessen Größenbestimmung *unabhängig* von der zu prüfenden Stichprobe erfolgen, also *vor* deren Erhebung, wenn man mit ihr in Kontakt steht, oder *vor* Beginn der statistischen Bearbeitung, wenn man mit der Stichprobe nicht in Kontakt steht.

** Bei diskreten Verteilungen setze man $x < x_l + 1$ und $x > x_r - 1$.

Im allgemeinen wird man aber, besonders am Anfang einer Forschung, im ungewissen schweben, welche der Bevölkerungen – wenn sie sich überhaupt unterscheiden – die größere oder kleinere sein wird. Dann macht man einen *zweiseitigen Test*. Hat man am Anfang der Stichprobenerhebung die Frage «einseitiger oder zweiseitiger Test?» nicht entschieden, so bleibt nur noch der zweiseitige. Die Signifikanzwahrscheinlichkeit ist 2 α, die konventionell 0,05 oder 0,01 beträgt*, das heißt, $\alpha = 0{,}025$ oder 0,005 [vgl. dazu Kommentar zu (**468**)]. Wird der zweiseitige Test einseitig interpretiert, so ist die Signifikanzwahrscheinlichkeit dieser Interpretation trotzdem 2α!

Beachte, daß die Interpretation sich oben auf die *Prüfgröße* bezieht. Die auf diese sich stützende *reale* Interpretation kann anders lauten. (**476**) ist lediglich eine Zusammenstellung von (**381**), (**382**), (**392**), (**413**), (**414**), (**420**), (**474**) und (**475**).

Voraussetzungen, die erfüllt sein müssen

Auf Grund von (**472**) wird man in einer Situation, in der mehrere Teste zur Verfügung stehen, in der Regel jenen wählen, der die größte Macht hat. Um in dieser Richtung eine Wahl treffen zu können, muß aber nach (**473**) die Gestalt der verglichenen Bevölkerungen bekannt sein. Diesbezügliche Kenntnisse hat man möglicherweise aus *früherer Erfahrung* oder aus *hypothetischen Überlegungen* (Glücksspiele, zentraler Grenzwertsatz) gezogen, oder man kann sie bei *großen* Stichproben diesen selbst entnehmen. Bei kleineren Stichproben hingegen, besonders auf derart komplexen Gebieten wie Biologie, Medizin und Psychologie, ist die Gestalt der Bevölkerung oft unbekannt. In solchen Situationen behilft man sich dann gerne mit *Annahmen* über die Gestalt der Bevölkerung, nur um einen «mächtigeren» Test [vielleicht ist er es im konkreten Fall gar nicht, vgl. (**473**)] machen zu können. Wir wollen dies aber auf Grund der folgenden Ausführungen (möglichst) vermeiden.

Es ist mit Rücksicht auf die *Vertrauenswürdigkeit* eines statistischen Testresultates weniger gefährlich, durch Anwendung eines voraussetzungsloseren Testes, bei dem im konkreten Fall weniger oder keine Annahmen gemacht werden müssen, von den in der Stichprobe steckenden Informationen möglicherweise ein wenig zu verlieren, als einem vielleicht mächtigeren Test zuliebe Annahmen zu machen, um damit illusorische, in der Stichprobe nicht enthaltene Informationen gewinnen zu wollen. (**477**)

Wenn die Voraussetzungen nicht oder nur teilweise erfüllt sind, auf deren Boden ein Test steht, dann verändern sich die Wahrscheinlichkeiten, einen Fehler erster oder zweiter Art zu machen, in einer Weise, die schwer zu beurteilen ist. Sicher ist nur, daß diese für *erfüllte* Voraussetzungen *gültigen* Wahrscheinlichkeiten *nicht mehr exakt* oder sogar irreführend sind, wenn die Voraussetzungen nicht oder nur teilweise zutreffen. (**478**)

Man bemühe sich deshalb *gewissenhaft*, in Situationen, in denen mehrere Teste zur Verfügung stehen, zunächst jene Teste auszulesen, bei denen (möglichst) alle an sie gebundenen Voraussetzungen im konkreten Falle *wirklich* erfüllt sind. (**479**)

Es gibt oft Situationen, in denen eine Testwahl nach (**479**) unmöglich ist, weil bei keinem der zur Verfügung stehenden Teste (es ist manchmal nur einer) alle Voraussetzungen erfüllt werden können. Man interpretiere dann ein Testresultat *vorsichtig* bis sehr vorsichtig den Folgen gemäß, die nichterfüllte Voraussetzungen im konkreten Falle haben könnten. Unter solchen Umständen ist es zu empfehlen, die *Voraussetzungen, deren Erfüllung unsicher ist, namentlich zu nennen*, wie zum Beispiel: «Unter der Voraussetzung, daß die beiden Stichproben derselben normalverteilten Bevölkerung entstammen, besteht ...» (**480**)

Dem Leser wird nicht entgangen sein, wie wir von der Gestalt der Bevölkerung als einer wichtigen Voraussetzung vieler Teste ausgegangen sind, daß in (**477**) bis (**480**) aber ganz allgemein von Voraussetzungen die Rede ist. Je nach Test ist die Anzahl der Voraussetzungen und ihre «Strenge» verschieden: selbstverständlich sollten alle, nicht nur jene über die Gestalt der Bevölkerung, (möglichst) erfüllt sein. Eine dieser Bedingungen, die *allen* Testen zugrunde liegt, ist:

Alle statistischen Teste setzen *zufällige* Stichproben voraus, das heißt Stichproben, deren Erhebung in ihren Grundzügen einer Urnenoperation entspricht. Vgl. Abschnitt 1. (**481**)

(**481**) ist wohl die wichtigste Voraussetzung in der ganzen Statistik, die aber in der Praxis, besonders auf medizinisch-biologischen Gebieten, sehr schwer ganz zu erfüllen ist. Ist eine Forschungsarbeit schon bis zur statistischen Prüfung gediehen, kann man wohl etwaige nichtzufällige Stichproben noch ausscheiden, sofern eine Prüfung auf Nichtzufall im gegebenen Fall überhaupt möglich ist. Damit bewahrt man sich zwar vor einer Fehlentscheidung, die mit der Versuchsserie verbundenen Kosten und Arbeiten sind aber verloren. Man ergreife deshalb *vor* Beginn einer Forschungsarbeit alle Maßnahmen, um eine (möglichst) zufällige Stichprobe zu erhalten.

Wie geht man nun weiter vor, wenn nach (**479**) eine Gruppe von erlaubten Testen ausgelesen werden konnte? Eine allgemeingültige Anweisung in dieser Hinsicht kann nicht gegeben werden. In der Regel wird man die Prüfung mit jenen Testen beginnen, die am wenigsten Rechenaufwand erfordern und, wenn die postulierte Signifikanz nicht erreicht wird, zu mächtigeren Testen derselben erlaubten Gruppe übergehen. Ein solches Vorgehen dürfte wohl gestattet sein*, sofern man nicht in den Fehler verfällt, eine Signifikanz als doppelt oder mehrfach gesichert anzusehen, wenn zwei oder mehr Teste signifikant verlaufen. Zwischen vielen Testen bestehen nämlich Korrelationen, die selbst dem Statistiker nicht immer bekannt sind: sie prüfen teilweise gleichartig mit verschieden scharfen Instrumenten. Man wird kaum in den Fehler verfallen, wenn bei einer mikroskopischen Prüfung dasselbe Objekt mit drei verschiedenen Vergrößerungen nachgewiesen werden kann, diesen Nachweis als «dreifach gesichert» anzusehen. Ähnlich, aber nicht so leicht erkenntlich, verhält es sich bei Testen, zwischen denen Korrelationen bestehen.

Beispiel 19: Gegeben sei die Stichprobe (in zeitlicher Reihenfolge)

1 (Stunde)
− 0,7 »
0,5 »
1,1 »
3 »
1,2 »
1,4 »

Mittelwert $\bar{x} = 1{,}07$ Stunde
Median $M = 1{,}1$ Stunde

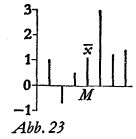


Abb. 23

bei der es sich um Differenzen von gepaarten Beobachtungen, zum Beispiel nach Verabreichung zweier Schlafmittel, handeln könnte, die am gleichen Probanden getestet wurden. Unterscheiden sich diese Differenzen von Null ($2\alpha = 0{,}05$)?

Für solche Fälle stehen uns, gestützt auf unsere Tafeln, 6 Teste zur Verfügung, wozu noch einer kommt, dessen Signifikanzschranken man im Gedächtnis behalten kann (Maximumtest):

Test	Voraussetzung über die Gestalt der Bevölkerung	Rechenaufwand
1 STUDENT (*t*-Test)	normalverteilt	der größte aller 7 Teste
2 LORD	normalverteilt	etwa ¼ von 1
3 Midrange (WALSH)	normalverteilt	kleiner als bei 2
4 WALSH	symmetrisch	etwa wie 2
5 Zeichen	keine	keiner
6 Maximum (WALTER)	keine	nur ordnen
7 WILCOXON	keine	etwa wie 2

Wenn wir nun wissen, daß die Stichprobe einer normalverteilten Bevölkerung entstammt, dann können wir *alle* 7 Teste versuchen. Der mächtigste ist in diesem Falle der STUDENT-Test, gefolgt vom LORD- und Midrange-Test, die bei so kleinen Stichproben nur wenig schwächer sind. Der WILCOXON-Test steht dem STUDENT-Test auch bei normalverteilten Bevölkerungen nicht viel nach.

Haben wir aber keine Kenntnis über die Gestalt der Bevölkerung, so werden wir nach (**479**) die Teste 5 bis 7 versuchen. Würden diese alle versagen, so bleibt uns nur noch die Interpretation (**475**).

Im obigen Beispiel ergeben diese Teste folgende Signifikanzen:

Test	Signifikanz
STUDENT	$0{,}025 \leqslant 2\alpha < 0{,}05$
LORD	$0{,}05 < 2\alpha < 0{,}1$
Midrange	$0{,}05 \approx 2\alpha$
WALSH	–
Zeichen	$0{,}05 < 2\alpha$
Maximum	$0{,}05 < 2\alpha \leqslant 0{,}1$
WILCOXON	$2\alpha < 0{,}05$

STUDENT-, WILCOXON- und Midrange-Test ergeben die geforderte Signifikanz, während alle anderen mehr oder weniger ver-

* Siehe Fußnote *, S. 158, rechte Spalte.

* Exakte Anweisungen in dieser Hinsicht sind uns unbekannt.

sagen. Man merke sich deshalb: Wenn zwei Stichproben hinsichtlich eines zwischen ihren Bevölkerungen bestehenden größenmäßigen Unterschiedes geprüft werden sollen, ist in der Regel bei normalverteilten Bevölkerungen für beliebig große Stichproben der STUDENT-Test, bei unsicherer Gestalt der Bevölkerung der WILCOXON-Test der mächtigste (der uns, gestützt auf unsere Tafeln, zur Verfügung stehenden Teste).

Vorwegnahme: In (**481**) haben wir erwähnt, daß alle Teste zufällige Stichproben voraussetzen. Eine in diese Richtung gehende Prüfung auf Grund der Iterationen (runs) um den Median zeigt nun aber mit einem $\alpha \leqq 0{,}01$ eine ausgeprägte Nichtzufälligkeit bei dieser Stichprobe. Trotz eindeutiger Signifikanz akzeptieren wir deshalb die Resultate der STUDENT- und WILCOXON-Teste lediglich als Hinweis auf einen möglicherweise bestehenden Unterschied, den wir in weiteren Experimenten noch eingehender untersuchen wollen.

« Gesunder Menschenverstand»

Unter diesem Motto seien zwei Themen kurz gestreift.

Im obigen Beispiel könnte man die Stichprobenwerte durch 10 dividieren, ohne die Signifikanz der Teste zu ändern. Wir hätten dann einen statistisch gesicherten Unterschied in der Wirkung der zwei Schlafmittel von durchschnittlich 6 Minuten, was praktisch ganz bedeutungslos wäre. Man prüfe deshalb bei statistisch gesicherten Unterschieden zunächst deren *reale* Bedeutung, bevor man sich mit «Entdeckungen» exponiert.

Oft tritt der Fall ein, daß eine Signifikanzwahrscheinlichkeit *fast,* aber nicht ganz, erreicht wird. Es sei zum Beispiel eine Signifikanz von 0,05 gefordert worden, erreicht wurde aber tatsächlich nur eine von 0,054 oder 0,06 oder ähnlich. Nun müssen wir zwar für unsere Entscheidungen eine feste Schranke als Basis beibehalten, um nicht ins uferlose abzugleiten, werden aber doch in einem solchen Fall die Interpretation entsprechend gestalten und weitere Versuche empfehlen. Erbringen nun diese wiederum nicht die postulierte Signifikanz, bleiben aber nur *wenig* darüber, so ist eine Interpretation wie «trotz zwei Versuchsserien konnte kein signifikanter Unterschied nachgewiesen werden» *fehl* am Platze. Tatsächlich weisen beide Versuchsserien eindeutig in die Richtung eines bestehenden Unterschiedes. Hier gibt es nur eines: Bei gleicher Signifikanzwahrscheinlichkeit *größere* Versuchsserien durchzuführen [vgl. (**463** b) und Abb. 22b], wenn durch Änderung der experimentellen Bedingungen die Varianz nicht verkleinert werden kann.

10. Parameter

Dieser Abschnitt beschränkt sich auf Mittelwert, Varianz und Quantile im allgemeinen. Spezielle Formeln zur Berechnung von Mittelwert und Varianz verschiedener Verteilungen werden später bei diesen gegeben.

10 A. Mittelwert und Varianz der Bevölkerung

μ_x symbolisiert den *Mittelwert,* σ_x^2 die *Varianz* einer Verteilung. Im folgenden werden wir, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, den Index x weglassen. Die Varianz wird auch mittlere quadratische Abweichung, im deutschen Sprachgebiet auch Streuung genannt. **(482)**

Die Quadratwurzel der Varianz nennt man die *Standardabweichung* σ. **(483)**

Die Varianz und die Standardabweichung des *Mittelwertes* sind σ^2/N und $\sigma/\sqrt{N}$, symbolisiert mit $\sigma_{\bar{x}}^2$ und $\sigma_{\bar{x}}$. **(484)**

Den Quotienten σ/μ nennt man den Variationskoeffizienten V. Er entspricht der mit dem Mittelwert als Einheit gemessenen Standardabweichung. V hat nur einen Sinn für *positive* x-Werte. **(485)**

Die Standardabweichung ist ein Maß der Streuung. Je kleiner sie ist, um so steiler, je größer sie ist, um so flacher ist der Kurvenverlauf der Verteilung (vgl. Abb. 25). Darauf basiert die TSCHEBYSCHEFFsche Ungleichung

$$\text{Prob}\,(|x-\mu| \geqq k\sigma) \leqq 1/k^2 = 2\alpha \quad (k>0)$$

für $1/k^2 = 2\alpha = 0{,}05$ und 0,01 ist $k \sim 4{,}5$ und $= 10$. Diese Ungleichung gilt für *beliebige* Bevölkerungen. **(486)**

10 B. Transformationen

Wird die Veränderliche x durch einen konstanten Summanden vergrößert oder verkleinert, so daß

$$X = x \pm a$$

dann ist

$$\left.\begin{aligned}\mu_X &= \mu_x \pm a\\ \sigma_X^2 &= \sigma_x^2\end{aligned}\right\}\ (a)$$

und die Rücktransformation

$$\left.\begin{aligned}\mu_x &= \mu_X \mp a\\ \sigma_x^2 &= \sigma_X^2\end{aligned}\right\}\ (b)$$

(487)

Die Varianz wird durch eine seitliche Verschiebung *nicht* beeinflußt, sie ist translationsinvariant.

Wird die Veränderliche x durch einen konstanten Faktor vergrößert oder verkleinert, so daß

$$X = ax$$

dann ist

$$\left.\begin{aligned}\mu_X &= a\mu_x\\ \sigma_X^2 &= a^2\sigma_x^2\end{aligned}\right\}\ (a)$$

und die Rücktransformation

$$\left.\begin{aligned}\mu_x &= \mu_X/a\\ \sigma_x^2 &= \sigma_X^2/a^2\end{aligned}\right\}\ (b)$$

(488)

(487) und **(488)** gelten auch für die Schätzungen $\bar{x}$ und s von μ und σ, deren Berechnung man sich damit oft erleichtern kann.

Beispiel 20.

a) Gegeben seien

x	= 145	145,5	147	147,3	Wir bilden $X = x - 145$ und erhalten
X	= 0	0,5	2	2,3	Mit diesen Werten berechnen wir μ_X und σ_X^2 und daraus

$\mu_x = \mu_X + 145 = 1{,}2 + 145 = 146{,}2$

$\sigma_x^2 = \sigma_X^2 = 1{,}26$

b) Gegeben seien

x	= 0,003 25	0,001 60	0,003 20	Wir bilden $X = 10^5 x$ und erhalten
X	= 325	160	320	Mit diesen Werten berechnen wir μ_X und σ_X^2 und daraus

$\mu_x = \mu_X/10^5 = 206 \times 10^{-5} = 0{,}002\,06$

$\sigma_x^2 = \sigma_X^2/10^{10} = 53\,158{,}5 \times 10^{-10} = 5{,}315\,85 \times 10^{-6}$

Eine Veränderliche x, deren Verteilung den Mittelwert $= 0$ und die Varianz $= 1$ hat, nennt man *normiert* oder *standardisiert.* **(489)**

Hat eine Veränderliche x den Mittelwert $\mu \neq 0$ und die Varianz $\sigma^2 \neq 1$, so ist die Veränderliche

$$X = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad (a)$$

normiert.

Aus der normierten Veränderlichen X erhält man die ursprüngliche

$$x = \sigma X + \mu \quad (b)$$

(490)

(489) und **(490)** werden in der Statistik häufig gebraucht.

10 C. Schätzungen von μ und σ auf Grund ungruppierter Stichproben

Die *wirksamste, biasfreie* Schätzung des Mittelwertes μ auf Grund einer Stichprobe mit den Werten $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ist

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} = \frac{\Sigma x}{N} \qquad \textbf{(491)}$$

$\bar{x}$ wird gelesen x quer.

Die *wirksamste, biasfreie* Schätzung der Varianz σ^2 ist

a) wenn μ bekannt

$$s^2 = \frac{\Sigma (x-\mu)^2}{N} = \frac{S_x'}{N} \quad (a)$$

b) wenn μ unbekannt

$$s^2 = \frac{\Sigma (x-\bar{x})^2}{N-1} = \frac{S_x}{N-1} \quad (b)$$

für S_x vgl. **(493)**

(492)

Die Berechnung von S_x (man merke sich dieses Symbol!) wird durch folgende Identitäten erleichtert

$$
\begin{aligned}
S_x &= \Sigma(x-\bar{x})^2 && \text{(a)}\\
&= \Sigma x^2 - N\bar{x}^2 && \text{(b)}\\
&= \Sigma x^2 - \bar{x}\,\Sigma x && \text{(c)}\\
&= \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/N && \text{(d)}\\
[&= s^2(N-1)] && \text{(e)}
\end{aligned}
\qquad \text{(493)}
$$

Die wirksamste, *asymptotisch* biasfreie Schätzung von σ ist s. Der Bias von s kann in der Praxis in der Regel vernachlässigt werden. Korrekturfaktoren zur Beseitigung dieses Bias bei Stichproben aus normalverteilten Bevölkerungen finden sich auf S. 47. **(494)**

Die wirksamste, biasfreie Schätzung von $\sigma_{\bar{x}}^2$ ist $s_{\bar{x}}^2 = s^2/N$, die wirksamste, asymptotisch biasfreie Schätzung von $\sigma_{\bar{x}}$ ist $s_{\bar{x}} = s/\sqrt{N}$. Vgl. dazu **(494)**. **(495)**

Andere Schätzungen von σ werden wir später noch kennenlernen.

Beispiel 21 zu **(491)** bis **(495)**. Gegeben sei die Stichprobe des Beispiels 19 auf S. 159.

Es ist nach Formel **(491)** $\bar{x} = 7{,}5/7 = 1{,}0714$

(493) $S_x = 15{,}35 - 8{,}0357 = 7{,}3143$

(492) $s^2 = 7{,}3143/6 = 1{,}2190$

(494) $s = \sqrt{1{,}2190} = 1{,}1041$

(495) $s_{\bar{x}} = 1{,}1041/\sqrt{7} = 0{,}4173$

Die Resultate sind nachträglich auf weniger Stellen zu runden, um zu verhüten, daß die Schätzwerte eine nicht vorhandene Präzision suggerieren.

10 D. Schätzung von μ und s^2 auf Grund gruppierter Stichproben

Gegeben die Klassen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit der für alle Klassen gleichen Klassenbreite $d = x_{i+1} - x_i$. Diese sind besetzt mit den Frequenzen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ($N = \Sigma f_i$). Dann wählt man einen vorläufigen Mittelwert $\bar{x}'$, der auf eine Klasse fällt. Nun werden die Klassen numeriert. $\bar{x}'$ erhält die Nummer $z = 0$, absteigend erhalten die Klassen die Nummer $z = -1, -2, \ldots$, aufsteigend die Nummern $z = 1, 2, \ldots$

Klassen	$\ldots(\bar{x}'-2)$	$(\bar{x}'-1)$	$\bar{x}'$	$(\bar{x}'+1)$	$(\bar{x}'+2)\ldots$
z	$\ldots -2$	-1	0	1	2 $\ldots$

Es ist dann

$$\bar{x} = \bar{x}' + d\frac{\Sigma f z}{N} \qquad \text{(496)}$$

$$s^2 = \frac{d^2}{N-1}\left(\Sigma(f z^2) - \frac{(\Sigma f z)^2}{N}\right) \qquad \text{(497)}$$

Sheppardsche Korrektur

Die SHEPPARDsche Korrektur beruht auf folgendem Umstand: Bei der Unterteilung der Einzelwerte in Klassen wird ein kleiner Fehler bezüglich der zufälligen Auswahl der Einzelwerte gemacht. Dadurch wird in die Schätzung der Varianz ein kleiner Fehler eingeschleppt, der durch Subtraktion von $k = 0{,}083\,(= 1/12)$ von der in Klasseneinheiten berechneten Varianzschätzung behoben wird (SHEPPARDsche Korrektur). Diese Korrektur ist bei der Signifikanzuntersuchung von Unterschieden entbehrlich, sonst aber zu empfehlen.

SHEPPARDsche Korrektur: $s_{\text{korr.}}^2 = s^2 - \dfrac{d^2}{12}$ **(498)**

Beispiel 22. Erythrocytendurchmesser. Klassenbreite $d = 0{,}4\,\mu$m.

Klasse	Frequenz f	Abweichung z	Frequenz mal Abweichung fz	Frequenz mal Abweichung im Quadrat $fz^2 = fz \cdot z$
5,6	5	-4	-20	80
6,0	78	-3	-234	702
6,4	144	-2	-288	576
6,8	479	-1	-479	479
$7{,}2 = \bar{x}'$	542	0	0	0
7,6	358	$+1$	$+358$	358
8,0	279	$+2$	$+558$	1114
8,4	99	$+3$	$+297$	891
8,8	15	$+4$	$+60$	240
9,2	1	$+5$	$+5$	25
	$\Sigma(f) = N = 2000$		$\Sigma(fz) = 257$	$\Sigma(fz^2) = 4467$

$$\bar{x} = 7{,}2 + 0{,}4\,\frac{257}{2000} = 7{,}251\,\mu\text{m}$$

$$s^2 = 0{,}4^2\,\frac{4467 - 33{,}0}{1999} = 0{,}4^2 \times 2{,}218;$$

$s = 0{,}4\sqrt{2{,}218} = 0{,}596\,\mu$m ohne SHEPPARDsche Korrektur

$s^2 = 0{,}4^2(2{,}218 - 0{,}0833) = 0{,}4^2(2{,}135)$;

$s = 0{,}4\sqrt{2{,}135} = 0{,}584\,\mu$m mit SHEPPARDscher Korrektur.

10 E. Quantile stetiger Verteilungen

Definition: In $p = F(x)$ nennt man x das *Quantil* (p), von uns symbolisiert mit $Q(p)$ oder x_p. Die Quantile sind somit die *Umkehrfunktion* von $F(x)$. Für Quantil wird auch das Synonym Fraktil gebraucht. Quantile sind sogenannte Lage- oder Positionsparameter. Zu $F(x)$ vgl. **(401)** und **(402)**.

Die am meisten verwendeten Quantile führen besondere Namen: **(499)**

Name	Wahrscheinlichkeit p
Quartile	$0{,}25 \times n\,(n = 1, 2, 3, 4)$
Median oder Zentralwert	0,5 (= 2. Quartil)
Dezile	$0{,}1 \times n\,(n = 1, 2, \ldots, 10)$
Perzentile	$0{,}01 \times n\,(n = 1, 2, \ldots, 100)$

Interpretation eines Quantils (p) einer stetigen Bevölkerung: $100\,p\%$ der Bevölkerung liegen unter, $100\,(1-p)\%$ über dem Quantil (p). **(500)**

Beispiel 23. Vgl. Abb. 8, Quantile und Median einer Normalverteilung.

Schätzung:

a) *Ungruppierte Stichproben.* Das Quantil $Q(p)$ einer Bevölkerung wird geschätzt, indem man das entsprechende Quantil $Q(p)$ einer daraus stammenden Stichprobe berechnet. Dies geschieht folgendermaßen: Man ordnet die Stichprobenwerte x nach ihrer Größe [vgl. **(342)**] und numeriert sie fortlaufend, wobei der kleinste Wert die Nummer 1 erhält. Diese Nummern nennt man *Ordnungszahlen* oder *Ränge* der Stichprobenwerte x. Man erhält so die Rangfolge

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_N$$

Das Quantil $Q(p)$ entspricht dann dem Stichprobenwert mit der Ordnungszahl $O(p)$:

$$O(p) = Np + 0{,}5 \text{ für } \frac{1}{N} \leqq p \leqq \frac{N-1}{N} \qquad \text{(501a)}$$

Ist $O(p)$ eine ganze Zahl, so fällt das Quantil $Q(p)$ *auf* einen der Stichprobenwerte, ist $O(p)$ ein Bruch, so liegt das Quantil $Q(p)$ *zwischen* den Stichprobenwerten mit den zu $O(p)$ benachbarten Rängen. Man interpretiere dann: das Quantil $Q(p)$ liegt zwischen x_i und x_{i+1}. Zwischen x_i und x_{i+1} interpolieren zu wollen, hätte keinen großen Sinn.

Hat die Folge der geordneten Stichprobenwerte Bindungen [vgl. **(346)**], und fällt $O(p)$ auf oder zwischen die Ordnungszahlen von gebundenen Werten, so gebe man $Q(p)$ die Größe dieser gebundenen Werte, sofern die Anzahl der betreffenden Bindungen klein ist im Vergleich zum Stichprobenumfang. Bei Stichproben mit sehr vielen Bindungen (wenige Klassen mit großen Frequenzen) hat es keinen Sinn, Quantile nach **(501a)** zu bestimmen.

Beispiel 24. Gegeben ist die rangierte Stichprobe

x:	1,75	1,76	1,76	1,77	1,78	1,79	1,80	1,81	1,82	1,84	1,86
O:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x:	1,86	1,93	1,95	2,00	2,07	2,18	2,35	2,68	3,56	4,41	
O:	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	

Gesucht werden 1. Quartil, Median und Perzentil (0,7). Es ist

$O(0{,}25) = 0{,}25 \times 21 + 0{,}5 = 5{,}75$; $Q(0{,}25)$ liegt zwischen 1,78 und 1,79

$O(0{,}5) = 0{,}5 \times 21 + 0{,}5 = 11$; $Q(0{,}5) = 1{,}86$ (beachte die Bindung)

$O(0{,}7) = 0{,}7 \times 21 + 0{,}5 = 15{,}2$; $Q(0{,}7)$ liegt zwischen 2,00 und 2,07

b) *Gruppierte Stichproben.* Gegeben die rangierten Klassen $x_1, x_2, \ldots, x_n = x_i$, der Klassenabstand $d = x_{i+1} - x_i$, die Klassenfrequenzen $f_1, f_2, \ldots, f_n = f_i$. Klassenumfang $N = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. **(501b)**

Man bilde die kumulierten Häufigkeiten $f_1 = F(1), f_1 + f_2 = F(2), f_1 + f_2 + f_3 = F(3) \ldots = F(i)$. Nun vergleicht man Np mit den $F(i)$:

Ist $Np = F(i)$, dann ist $Q(p) = x_i + \frac{1}{2}\,d$.

Liegt Np zwischen $F(i)$ und $F(i+1)$, dann liegt $Q(p)$ zwischen $x_i + \frac{1}{2}\,d$ und $x_{i+1} + \frac{1}{2}\,d$. (501 b)

10 F. Verteilungsfreie Vertrauensgrenzen für Quantile stetiger Verteilungen

(Vgl. dazu Abschnitt 8 c)

Abgesehen von ihrer Bedeutung als Umkehrfunktion von $F(x)$, sind die Quantile in der Praxis deshalb beliebt, weil einerseits ihre Schätzung $Q(p)$ mit einem minimalen Rechenaufwand* verbunden ist, und weil andererseits für den Parameter $Q(p)$ exakte Vertrauensgrenzen konstruiert werden können, ohne im Besitze irgendwelcher Kenntnisse über die Gestalt der der Stichprobe zugrunde liegenden Verteilung zu sein. Die mathematische Definition und die Berechnung verteilungsfreier Vertrauensgrenzen für Quantile wird im Abschnitt 20 gegeben.

Die Ordnungszahlen $O(p)$ für verteilungsfreie Vertrauensgrenzen für Quantile mit verschiedenen $p \leqq 0{,}5$ und Stichproben im Umfang bis $N = 100$ lassen sich direkt aus der Tafel auf S. 104 ablesen. Für den Median und Stichprobenumfänge bis $N = 1000$ findet man die Ordnungszahlen $O(p)$ in den Tafeln auf S. 105 und 106.

Man geht so vor: In den erwähnten Tafeln suche man die dem Stichprobenumfang N und der Wahrscheinlichkeit $p \leqq 0{,}5$ entsprechenden Grenzen x_l und x_r. Ist $p > 0{,}5$, so subtrahiere man es von 1 und erhält $p' = 1 - p < 0{,}5$. Dazu suche man wie oben die Grenzen x_l und x_r, die mit x'_l und x'_r symbolisiert seien. Die Ordnungszahlen $O(p)$, die die Vertrauensgrenzen in der Stichprobe lokalisieren, sind dann

wenn $p \leqq 0{,}5$, dann sind $O(p)_l$ und $O(p)_r = x_l + 1$ und x_r

wenn $p > 0{,}5$, dann sind $O(p)_l$ und $O(p)_r = N - x'_r + 1$ und $N - x'_l$ (502)

Beispiel 25. Für die Stichprobe des Beispiels 24 sind die 95%-Vertrauensgrenzen

Quantil	Ordnungszahlen		95%-Vertrauensgrenzen
1. Quartil	$1+1=2$	und 10	$1{,}76 < Q(p) < 1{,}84$
Median	$5+1=6$	und 16	$1{,}79 < Q(p) < 2{,}07$
Perzentil (0,7)	$21-12+1=10$	und $21-1=20$	$1{,}84 < Q(p) < 3{,}56$

10 G. Beziehungen zwischen Modus, Median und Mittelwert

Die Abszisse x des Maximalwertes der Verteilung $f(x)$ wird *Modus* genannt. (503)

Der Modus hat für die Praxis keine große Bedeutung. Zu $f(x)$ vgl. (**400**).

Bei *symmetrischen* stetigen Verteilungen *fallen Modus, Median und Mittelwert zusammen*, bei unsymmetrischen nicht (vgl. Abb. 31). Die Lagebeziehungen der drei Parameter untereinander lassen sich umschreiben

Median $\sim {}^2/_3$ Mittelwert $+ {}^1/_3$ Modus (504)

Wichtig für die Praxis ist vor allem die *Identität* von *Median* und *Mittelwert* bei *symmetrischen* stetigen Verteilungen: Die verteilungsfreien Vertrauensgrenzen für den Median sind bei symmetrischen stetigen Verteilungen auch solche für den Mittelwert. Daraus folgt:

Berechnet man aus einer Stichprobe die verteilungsfreien Vertrauensgrenzen für den Median sowie den Mittelwert $\bar{x}$, und berührt letzterer diese Grenzen oder liegt außerhalb, so entstammt die Stichprobe mit einer Signifikanzwahrscheinlichkeit $\leqq 2\,\alpha$ *nicht* einer symmetrischen Verteilung. (505)

Darauf beruht der Zeichentest, der einfach durchzuführen und von der Gestalt der Bevölkerung unabhängig ist.

10 H. Der Zeichentest (Sign-Test)

a) *Prüfung einer Stichprobe auf Symmetrie.* Man berechne $\bar{x}$ und rangiere die Stichprobenwerte inklusive $\bar{x}$. Dann zähle man die Anzahl $N(-)$ jener Stichprobenwerte ab, die kleiner sind als $\bar{x}$. Dann suche man in der Tafel auf den S. 105 und 106 die dem Stichprobenumfang N und der Signifikanzwahrscheinlichkeit $2\,\alpha$ entsprechenden Schranken x_l und x_r. Berührt die Zahl $N(-)$ eine dieser Schranken, oder liegt sie außerhalb, dann gilt Interpretation (**505**).

Beispiel 26. Im Beispiel 24 im Abschnitt 10 E ist $\bar{x} = 2{,}130$, $N(-) = 16$. In der Tafel auf S. 105 sind bei $N = 21$ und $2\,\alpha = 0{,}05$ die Schranken 5 — 16 zu finden. Die Stichprobe entstammt mit einer Signifikanzwahrscheinlichkeit von 0,05 *nicht* einer symmetrischen Verteilung.

b) *Prüfung von Paardifferenzen (Differenzen gepaarter Beobachtungen).* In solchen Fällen besteht die Nullhypothese darin, daß sich die Differenzen durchschnittlich von Null nicht unterscheiden, das heißt, daß gleich viele Differenzen kleiner und gleich viele größer als Null sind. Null ist somit der Median. Man zählt in solchen Situationen wie in a) die Anzahl $N(-)$, die kleiner als Null, das heißt negativ sind, in anderen Worten, man zählt die Anzahl $N(-)$ der *Minuszeichen* (daher der Name des Testes) und verfährt wie unter a).

Beispiel 27. Von 500 Paardifferenzen sind 210 negativ. Unterscheiden sich diese Differenzen durchschnittlich von Null ($2\,\alpha = 0{,}05$)? Auf S. 105 findet man für $2\,\alpha = 0{,}05$ und $N = 500$ die Schranken 227–273, der Unterschied ist somit mit der geforderten Signifikanz gesichert.

Nachtrag zu a) und b). Fällt in a) $\bar{x}$ *auf* einen der Stichprobenwerte (oder bei Bindungen auf 2, 3, ... Stichprobenwerte), oder sind in b) 1, 2, ... der Paardifferenzen gleich Null, so verringere man den Stichprobenumfang, mit dem man in die Tafel eingeht, um 1, 2, ... Mächtiger, aber mit etwas mehr Rechenarbeit verbunden, ist der WILCOXON-Test für Paardifferenzen, mit dem man bei *kleinen* Stichproben eher eine Signifikanz erreicht als mit dem Zeichentest. Vgl. dazu das Beispiel 19 auf S. 159. Bei Stichproben über 50 besteht kein großer Unterschied mehr zwischen den beiden Testen (hinsichtlich Macht; die Rechenarbeit steigt mit wachsendem Stichprobenumfang beim WILCOXON-Test rasch an). Paardifferenzen lassen sich auch sequentialanalytisch untersuchen.

11. Die Normalverteilung

Vgl. dazu Abschnitt 6. Über «normal» vgl. (**455**)

11 A. Definition und Charakteristiken

Die Normalverteilung ist eine *stetige* Verteilung. Ihre Wahrscheinlichkeitsdichte ist definiert

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (506)$$

(π und e vgl. S. 132, μ = Mittelwert, σ = Standardabweichung)

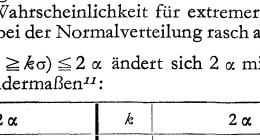


Abb. 24

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ hat die Form einer *symmetrischen* Glockenkurve, die kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung $F(x)$ die Form einer Sigmoidkurve (vgl. Abb. 8 und 9). Der Variationsbereich der Veränderlichen x erstreckt sich von $-\infty$ bis ∞, was der Normalverteilung manchmal zum «Vorwurf» gemacht wird, weil danach beispielsweise auch 3 m große und größere Menschen «möglich» sein sollten*. Das Wort «möglich» ist aber schlecht gewählt. Besser wäre der Ausdruck «fast unmöglich», weil die Wahrscheinlichkeit für extremere Abweichungen vom Mittelwert bei der Normalverteilung rasch abnimmt:

In Prob $(|x - \mu| \geqq k\sigma) \leqq 2\,\alpha$ ändert sich $2\,\alpha$ mit zunehmendem k folgendermaßen[11]: (507)

k	$2\,\alpha$	k	$2\,\alpha$
1	$3{,}173\,105 \times 10^{-1}$	6	$1{,}973\,175 \times 10^{-9}$
2	$4{,}550\,026 \times 10^{-2}$	7	$2{,}559\,625 \times 10^{-12}$
3	$2{,}699\,796 \times 10^{-3}$	8	$1{,}244\,192 \times 10^{-15}$
4	$6{,}334\,248 \times 10^{-5}$	9	$2{,}257\,177 \times 10^{-19}$
5	$5{,}733\,031 \times 10^{-7}$	10	$1{,}523\,971 \times 10^{-23}$

* Dieser Zeitgewinn wird bei großen Stichproben durch die Zeit aufgewogen, die man mit dem Rangieren der Stichprobe verliert.

* Grenzen nach Wahrscheinlichkeit, so absurd sie manchen erscheinen mögen, sind logischer als absolute. Wo sollte man zum Beispiel die absolute Grenze für Körperlängen ziehen? Bei 2 m 51, 2 m 78, 3 m 19 oder bei?

Zu (**507**) vgl. man (**486**): Nach der TSCHEBYSCHEFFschen Ungleichung ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer *beliebigen* Verteilung die Veränderliche x zum Beispiel die Grenze $\mu \pm 3\,\sigma$ erreicht, gleich $^1/_9$, bei der normalverteilten Veränderlichen nach (**507**) aber nur $\sim {}^3/_{1000}$! Andererseits stimmen diese viel engeren Grenzen *nur* dann, wenn die Bevölkerung *wirklich* normal verteilt ist. Man merke sich deshalb auch die umgekehrte Folgerung: Sollte eine Verteilung, für die die 3-σ-Grenzen als genügend angesehen werden, *nicht* normal sein, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Veränderliche x diese Grenzen erreicht, *nicht* $^3/_{1000}$, sondern vielleicht nur $^1/_9$: eine sprechende Illustration zu (**478**)!

Wie bei allen symmetrischen Verteilungen fallen bei der Normalverteilung Modus, Median und Mittelwert zusammen, ihre Ordinate ist die Symmetrieachse der Wahrscheinlichkeitsdichte [vgl. Abb. 24 und (**504**)]. Als wichtige Folgerung für die Praxis ergibt sich daraus:

Eine Stichprobe, die die Prüfung auf Symmetrie nicht besteht, entstammt mit einer Signifikanzwahrscheinlichkeit $\leqq 2\,\alpha$ *nicht* einer normalverteilten Bevölkerung. **(508)**

Besteht eine *nicht zu kleine* Stichprobe die Symmetrieprüfung [vgl. dazu (**474**)], so könnte die zugrunde liegende Bevölkerung trotzdem nicht normal sein*. Bei Signifikanztesten (vgl. S. 159, «Voraussetzungen, die erfüllt sein müssen») darf man aber in einem solchen Fall die Voraussetzung der Normalität als *fast* erfüllt betrachten. **(509)**

Der Zeichentest, mit dem wir auf Symmetrie prüfen, ist bei *kleinen* Stichproben ziemlich unempfindlich, das heißt, er wird bei kleinen Stichproben viel seltener eine bei der Bevölkerung tatsächlich bestehende Unsymmetrie entdecken als bei größeren Stichproben. Deshalb gilt (**509**) nur für *nicht zu kleine* Stichproben. Bei kleinen Stichproben verwende man deswegen Signifikanzteste – sofern solche zur Verfügung stehen –, bei denen hinsichtlich Symmetrie und Normalität keine Voraussetzungen zu erfüllen sind.

Wie (**506**) zeigt, ist die Normalverteilung durch die zwei Parameter μ und σ *vollständig* charakterisiert. Der Mittelwert bestimmt die *Lage* der Verteilung in bezug auf die x-Achse, die Standardabweichung die *Form* der Kurve: je größer σ ist, um so flacher ist der Kurvenverlauf (vgl. Abb. 25).

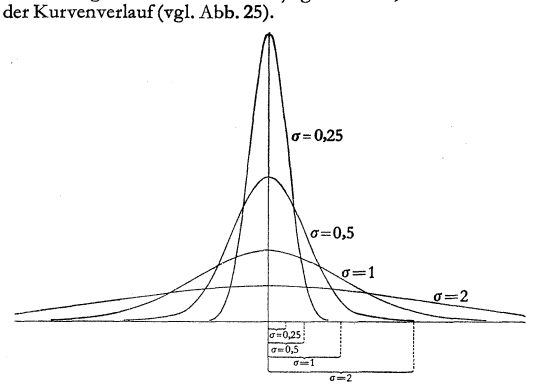
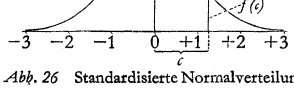


Abb. 25 Normalverteilungen mit verschiedenen Standardabweichungen.

Da μ und σ beliebige Werte annehmen können, sind unendlich viele normalverteilte Bevölkerungen möglich. Normiert man diese nach (**490**a), so werden sie *alle in eine,* die standardisierte Normalverteilung übergeführt.

11 B. Die standardisierte Normalverteilung

Setzt man nach (**490**a) $c = (x - \mu)/\sigma$, so geht (**506**) über in die *standardisierte Normalverteilung* mit *Mittelwert Null* und *Standardabweichung Eins:*



$$f(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-c^2/2} \qquad \textbf{(510)}$$

Abb. 26 Standardisierte Normalverteilung.

Aus der Symmetrie der Verteilung ergeben sich als Folgerungen bezüglich der

* Es gibt auch symmetrische Verteilungen, die nicht normal sind.

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(0) = \max f(c) = 0{,}398\,942 \qquad \textbf{(511)}$$

$$f(-c) = f(c) \qquad \textbf{(512)}$$

Wahrscheinlichkeiten

$$F(0) = \text{Prob}\,(c < 0) = \text{Prob}\,(c > 0) = \tfrac{1}{2} \qquad \textbf{(513)}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Prob}\,(c < -k) &= \text{Prob}\,(c > k) = \quad \text{(a)} \\ &= F(-k) = 1 - F(k) \quad \text{(b)} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(514)}$$

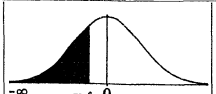
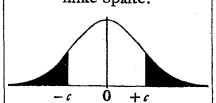
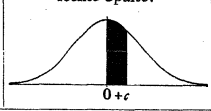
$$\text{Prob}\,(-k \leqq c \leqq 0) = \text{Prob}\,(0 \leqq c \leqq k) \qquad \textbf{(515)}$$

Quantile

$$Q(\tfrac{1}{2}) = 0 \qquad \textbf{(516)}$$

$$Q(p) = -Q(1-p) \qquad \textbf{(517)}$$

11 C. Tafeln zur standardisierten Normalverteilung (S. 28–31)

Seite	Inhalt	Spalte links	Spalte rechts
28		Umkehrfunktion des Integrals → $= \text{Quantil}\ Q(p) = c(p)$ Argument p	$\int_{-\infty}^{c} f(c)\,dc = F(c) = p(c)$ Argument c
29		Umkehrfunktion des Integrals → $= c(p')$ Argument p'	$\int_{-c}^{c} f(c)\,dc = p'(c)$ Argument c
30	linke Spalte:  rechte Spalte: 	$1 - \int_{-c}^{c} f(c)\,dc = 2P$ Argument c *	$\int_{0}^{c} f(c)\,dc = \int_{-c}^{0} f(c)\,dc$ Argument c
31	Oben: Ordinate $f(c)$, Argument c. Vgl. Abb. 26. Unten: Umkehrfunktion zu $1 - \int_{-c}^{c} f(c)\,dc$		

* Umkehrfunktion siehe S. 31

11 D. Transformation einer Normalverteilung in die standardisierte Form und umgekehrt

(Teilweise Wiederholung)

Den Satz «Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ» symbolisieren wir mit «Normalverteilung $(\mu;\sigma)$». **(518)**

Die Normalverteilung $(\mu;\sigma)$ der Veränderlichen x wird in die standardisierte Normalverteilung $(0;1)$ der Veränderlichen c transformiert und umgekehrt, indem man in (**490**) c an Stelle von X einsetzt. **(519)**

Bei dieser Transformation werden die Wahrscheinlichkeiten der transformierten Werte *nicht* verändert. Es ist

$$\text{Prob}\,(x < x_k) = \text{Prob}\,(c < c_k) \qquad \textbf{(520)}$$

Beispiel 28. Gegeben die Normalverteilung $(174;7)$. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten $x < 160$, $x > 181$ und $162 \leqq x \leqq 179$? Es ist

$$\frac{160-174}{7} = -2,\quad \frac{181-174}{7} = 1,\quad \frac{162-174}{7} \sim -1{,}71,$$

$$\frac{179-174}{7} \sim 0{,}7$$

und daraus

$\text{Prob}\,(c < -2) = F(-2) =$ aus Tafel S. 28, rechte Spalte $= 0{,}022\,75$

Prob $(c > 1)$ = vgl. (**514**a) = Prob $(c < -1)$ = Tafel wie oben = 0,158 66

Prob $(-1{,}71 \leqq c \leqq 0{,}71)$: Prob $(0 \leqq c \leqq -1{,}71)$ ist nach (**515**)
= Prob $(0 \leqq c \leqq 1{,}71)$, folglich die Gesamtwahrscheinlichkeit
= Prob $(0 \leqq c \leqq 1{,}71)$ + Prob $(0 \leqq c \leqq 0{,}71)$
= aus Tafel S. 30, rechte Spalte = 0,482 14 + 0,261 15 = 0,743 29

Beispiel 29. Gegeben die Normalverteilung des Beispiels 28. Gesucht

a) die einseitige Vertrauensgrenze x_l für $1 - \alpha_l = 0{,}95$;

b) die einseitige Vertrauensgrenze x_r für $1 - \alpha_r = 0{,}99$;

c) die zweiseitigen Vertrauensgrenzen x_l und x_r für $1 - 2\alpha = 0{,}95$.

Lösung:

Alle Vertrauensgrenzen oder Signifikanzschranken sind Quantile (α):

a) c_l ist das Quantil (α_l), wobei $\alpha_l = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$. Aus Tafel S. 28, linke Spalte, ergibt sich $c_l = -1{,}6449$ und daraus $x_l = -1{,}6449 \times 7 + 174 = 162{,}4857$;

b) c_r ist das Quantil $(1 - \alpha_r) = \mathcal{Q}(0{,}99)$. Aus Tafel S. 28, linke Spalte, ergibt sich $c_r = 2{,}3263$ und daraus $x_r = 2{,}3263 \times 7 + 174 = 190{,}2841$;

c) α ist hier $(1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025$. Da nach (**517**) das Quantil 0,025, absolut genommen, gleich dem Quantil $1 - 0{,}025 = 0{,}975$ ist, müssen wir in Tafel S. 28, linke Spalte, nur einmal das Quantil 0,025 suchen. Es ist $c = -1{,}960$ und daraus $x_l = -1{,}960 \times 7 + 174 = 160{,}28$ und $x_r = 1{,}960 \times 7 + 174 = 187{,}72$. Noch leichter findet man die zweiseitigen Grenzen bzw. die entsprechende Abweichung c in Tafel S. 30, linke Spalte. Dort geht man mit der Wahrscheinlichkeit $1 - 2\alpha$ ein und erhält unmittelbar das gesuchte c.

Zu den Beispielen 28 und 29: In der Praxis rechnet man nur mit so viel Stellen, als benötigt werden. Es ist aber besser, wenn mathematisch Ungeübte die Rechnung mit größerer Stellenzahl durchführen und erst am Schlusse der Rechnung das Resultat entsprechend auf- oder abrunden.

11 E. Die Probittransformation

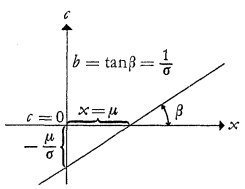


Abb. 27 a

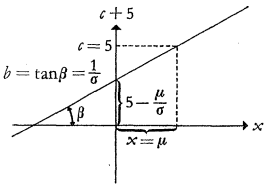


Abb. 27 b

Wenn man die standardisierte Veränderliche $(x - \mu)/\sigma$ nach (**34**) in 2 Brüche $-\mu/\sigma$ und x/σ zerlegt und $-\mu/\sigma = a$ und $1/\sigma = b$ setzt, so wird

$$c = a + bx, \text{ wobei } a = -b\mu \text{ und } b = 1/\sigma \qquad (521)$$

Nach (**299**) ist (**521**) eine *Gerade* (vgl. Abb. 27 a).

Die Gerade (**521**) geht, wenn μ und σ gegeben sind, durch den Punkt $(\mu; 0)$. Zu ihrer Konstruktion braucht man in diesem Falle nur noch *einen* weiteren Punkt nach (**521**) zu berechnen. (**522**)

Verschiebt man diese Gerade in Ordinatenrichtung um 5 Einheiten (vgl. Abb. 27 b), so ist

$$c + 5 = \text{Probit}^{12} = a + bx = 5 + b(x - \mu), \text{ wobei } a = 5 - b\mu \text{ und } b = 1/\sigma \qquad (523)$$

Die Gerade (**523**) geht, wenn μ und σ gegeben sind, durch den Punkt $(\mu; 5)$. Zu ihrer Konstruktion braucht man in diesem Falle nur noch *einen* weiteren Punkt nach (**523**) zu berechnen. (**524**)

Da Abweichungen von mehr als 5σ selten sind, verhilft die Verschiebung von (**521**) nach (**523**) dazu, daß in der Praxis der größte Teil aller Probitrechnungen im rechten oberen Quadranten durchgeführt werden können.

Wenn man nun auf der Ordinatenachse neben die lineare c- bzw. $(c + 5)$-Skala die entsprechenden $F(c)$-Werte einzeichnet, die nach (**520**) gleich groß sind wie die $F(x)$-Werte, so sieht man sofort, daß auf diese Weise die Sigmoidkurve $F(x)$ in eine Gerade transformiert werden kann. Für Probitrechnungen an Stichproben gilt deshalb:

Sind die Ordinaten- und die Abszissenskala linear eingeteilt (vgl. äußerste Skala links in Abb. 28) und werden in Ordinatenrichtung an Stelle von $F(x_p)$ die Quantile c_p oder die Probits $c_p + 5$ in Abszissenrichtung x_p abgetragen, so werden die Punkte $[x_p; c_p]$ oder $[x_p;$ Probit$]$ mit zunehmendem Stichprobenumfang stochastisch gegen eine Gerade (**521**) oder (**523**) konvergieren, sofern die zufällige Veränderliche x normal verteilt ist. (**525**)

Teilt man die Abszissenachse linear, die Ordinatenachse in Perzentile c $(0{,}01 \times n)$ oder Probits $(0{,}01 \times n)$ ein, wobei $n = 1, 2, \ldots, 100$, und schreibt die den letzteren entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $F(c)$ oder Prozentsätze $100\,F(c)\%$ als Ordinatenskala an (vgl. Abb. 28, zweitäußerste Skala links), trägt in Ordinatenrichtung $F(x_p)$ oder $100\,F(x_p)\%$, in Abszissenrichtung x_p ab, so werden die Punkte $[x_p; F(x_p)]$ oder $[x_p; 100\,F(x_p)\%]$ mit zunehmendem Stichprobenumfang stochastisch gegen eine Gerade konvergieren, sofern die zufällige Veränderliche x normal verteilt ist. (**526**)

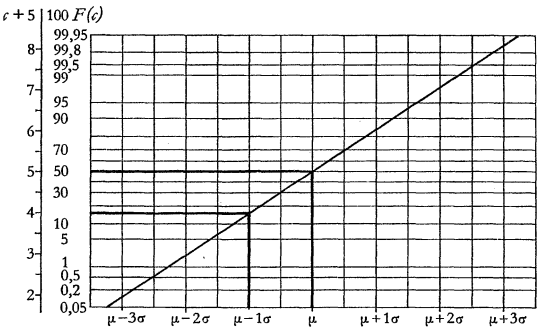


Abb. 28 Probitskala $(= c + 5)$ und Skala der Wahrscheinlichkeitspapiere.

Nach (**526**) arbeitet man mit den Wahrscheinlichkeitspapieren, nach (**525**) bei der Probittransformation. Im folgenden beschränken wir uns auf letztere, von der in weiteren Abschnitten noch Beispiele gegeben werden. Tafeln zur Probittransformation finden sich auf S. 54 und 55. Anleitungen zur Maximum-Likelihood-Schätzung der Probitgeraden in jenen Fällen, wo diese mit der Regressionsmethode geschätzt werden muß, das heißt, wenn μ und σ nicht nach (**491**) und (**492**) geschätzt werden können, siehe [13–15].

11 F. Anpassung von Normalkurven an Stichproben

Um eine Prüfung auf Nichtnormalität, sei es auf optisch-graphischem Weg oder exakt, durchführen zu können oder auch zu Illustrationszwecken, braucht man Normalkurven, die an die Stichprobe *angepaßt* (fitted) sind. Die erwähnten exakten Teste auf Nichtnormalität sind mächtiger als zum Beispiel der ebenfalls exakte Symmetrietest, weil sie die *gesamten* der Stichprobe zu extrahierenden Informationen ausnutzen, indem der *ganze* empirische Kurvenverlauf der Stichprobe mit dem angepaßten verglichen wird. Man nennt deshalb solche Teste *Anpassungsteste*. Will man die Prüfung exakt durchführen, was in unserem Fall auf einen χ^2-Test hinausläuft, so bestehen zwei Bedingungen: Die Stichprobe muß gruppiert sein, und die Parameter μ und σ müssen durch x und s nach (**491**) und (**492**) geschätzt werden [vgl. dazu die Erläuterungen zu den eben erwähnten Gleichungen und (**430**)]. *In den bei der Anpassung benötigten Gleichungen werden x und s an Stelle von μ und σ eingesetzt.*

a) *Ungruppierte Stichproben*

Bei ungruppierten Stichproben ist nur ein optischer Vergleich zwischen empirischen und angepaßten Probitwerten möglich. Aus (**499**) und (**501** a) ergibt sich

$$p_i = F(x_i) = \frac{O_i - 0{,}5}{N} \qquad (527)$$

$[O_i$ = Rang des Stichprobeneinzelwertes x_i, Abschnitt 10 E$]$

Mit (**527**) lassen sich unter weiterer Verwendung von (**523**) bis (**525**) die empirischen und angepaßten Probitwerte errechnen.

Beispiel 30. Gegeben die Stichprobe des Beispiels 24 des Abschnittes 10 E, S. 161. Der Mittelwert $\bar{x}$ ist 2,130, die Standardabweichung s ist 0,6713. Zunächst errechnen wir die $F(x_i)$-Werte nach (**527**). Es ist $F(x_1) = 0{,}5/21$, $F(x_2) = 1{,}5/21$ usf. [Man rechne nach (**31**): $0{,}5/21 + 1/21 + \cdots$.] Diese Werte werden mit 100 multipliziert und für die so erhaltenen Prozente in der Tafel S. 54 und 55 die Probits gesucht. Man erhält für $x_1, x_2, \ldots$ die empirischen Probits 3,0; 3,5; 3,8; 4,0 usw. Diese Werte trägt man nach (**525**) in Millimeterpapier ein und erhält die in Abbildung 29 gezeigte Punkteschar.

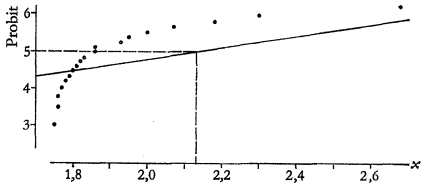


Abb. 29 Empirische Probitwerte und angepaßte Probitgerade der ungruppierten Stichprobe des Beispiels 24 im Abschnitt 10 E, S. 161.

Man sieht sofort, daß die Punkteschar systematisch von einer Geraden abweicht. Die Stichprobe stammt kaum aus einer normalverteilten Bevölkerung (was wir auf Grund des Symmetrietestes schon wußten, vgl. Abschnitt 10 H). Wenn die Stichprobe aus einer normalen Bevölkerung käme, müßten die Punkte stochastisch um die angepaßte Probitgerade schwanken, die nach (**523**) und (**524**) aus $\bar{x}$ und s an Stelle von μ und σ errechnet wurde.

b) *Gruppierte Stichproben*

Es ist

$$f(x_i) = \frac{Nd}{\sigma} f(c_i), \quad c_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \tag{528}$$

$$F(x_i + \tfrac{1}{2}d) = (\sum_1^i f_i)/N \tag{529}$$

(i = Ordnungszahl der rangierten Klassen x, $d = x_{i+1} - x_i$ = Klassenbreite, f_i = Besetzung der Klasse i)

Wenn man beide, angepaßte Wahrscheinlichkeitsdichte *und* kumulierte Verteilung, berechnen will, dann verwende man $x_i + \frac{1}{2}d$ auch in (**528**) und trage dann die berechnete Ordinate bei $x_i + \frac{1}{2}d$ ab, das heißt an der *oberen* Grenze der Klasse i. (**528**) gibt die Ordinaten für die *Mitte* der Klassen.

Beispiel 31. Gegeben die Stichprobe des Beispiels 22 des Abschnittes 10 D, S. 161, mit $\bar{x} = 7{,}251$, $s = 0{,}584$.

Berechnung der angepaßten Wahrscheinlichkeitsdichte

Der Gang der Rechnung ist folgender: Man bildet die Differenzen $x_i + \frac{1}{2}d - \bar{x}$, multipliziert diese mit $1/s$ und erhält die angepaßten c_i-Werte [auch diese Rechnung läßt sich nach (**31**) als einfache Addition durchführen]. Für diese Abweichungen c suchen wir in der Tafel S. 31, oben, die entsprechenden Ordinaten $f(c)$ [man vergleiche dazu (**512**)], multiplizieren diese mit Nd/s und erhalten damit die gesuchten Ordinaten $f(x_i + \frac{1}{2}d)$. (Vgl. Abb. 30, links.)

Tabelle 1

$x+\frac{1}{2}d$	$x+\frac{1}{2}d-\bar{x}$	$(x+\frac{1}{2}d-\bar{x})/s = c$	$f(c)$	$f(c)\times Nd/s = f(x+\frac{1}{2}d)$
5,4	− 1,851	− 3,17	0,002 62	3,6
5,8	− 1,451	− 2,48	0,018 42	25,2
6,2	− 1,051	− 1,80	0,078 95	108,2
6,6	− 0,651	− 1,11	0,215 46	295,2
7,0	− 0,251	− 0,429	0,363 87	498,5
7,4	0,149	0,255	0,386 18	529,0
7,8	0,549	0,939	0,256 71	351,7
8,2	0,949	1,62	0,107 41	147,1
8,6	1,349	2,31	0,027 68	37,9
9,0	1,749	2,99	0,004 57	6,3
9,4	2,149	3,68	0,000 46	0,6

Berechnung der empirischen Probits

Wir berechnen nach (**529**) $F(x_i + \frac{1}{2}d)$, multiplizieren mit 100 und suchen zu diesen Prozenten in der Tafel S. 54 und 55 die entsprechenden Probits. Diese tragen wir bei $x_i + \frac{1}{2}d$ als Ordinaten ab und erhalten die Punkte der Abbildung 30, rechts.

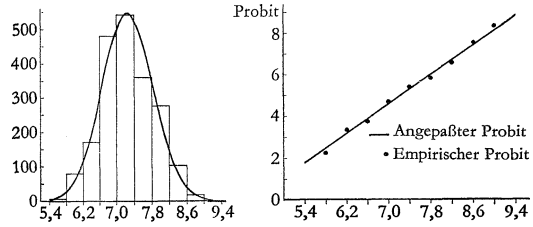


Abb. 30 Angepaßte Wahrscheinlichkeitsdichte, empirische Probits und angepaßte Probitgerade für die Stichprobe 22 in Abschnitt 10 D.

Berechnung der angepaßten Probitgeraden

Die *Konstruktion* der Probitgeraden erfolgt nach (**524**). Sie geht einmal durch den Punkt (7,25; 5). Als Abszisse des zweiten benötigten Punktes wählen wir beispielsweise $x = 5{,}4$. Nach (**523**) ist der entsprechende Probit $= 5 + 1{,}712\,(5{,}4 - 7{,}25) = 1{,}8$. Wir ziehen die Gerade durch diese zwei Punkte und sehen, daß die empirischen Probits sich eng an sie anschmiegen. Der optische Eindruck von Abbildung 30, rechts, wird uns kaum veranlassen, die Bevölkerung, aus der die Stichprobe erhoben wurde, als nicht normal verteilt anzusehen.

Wie sehr man sich dabei täuschen kann, werden wir gleich sehen.

Nachtrag. Wenn die Wahrscheinlichkeitsdichte wie oben schon berechnet wurde, erhält man die zwei Konstruktionspunkte der angepaßten Probitgeraden, indem man aus Tabelle 1 auseinanderliegende Werte der Kolonne c nimmt und dazu 5 addiert.

Exakte Prüfung auf Nichtnormalität mit dem χ^2-Test

Diese Prüfung erfolgt in unserem Falle an Hand der c-Transformation, ohne Probits. Gang der Rechnung:

1. Berechnung der angepaßten c-Werte für $x_i + \frac{1}{2}d$ nach (**521**), siehe Kolonne c in Tabelle 1. Dies sind die angepaßten c-Werte.
2. Zu den angepaßten c-Werten suchen wir in Tafel S. 28, rechts, die entsprechenden $F(c)$-Werte. Dies sind die angepaßten $F(c)$-Werte.
3. Multiplikation der angepaßten $F(c)$-Werte mit dem Stichprobenumfang N. Damit erhält man die angepaßte Verteilung der kumulierten absoluten Häufigkeiten $H(x_i + \frac{1}{2}d)$.
4. Bildung der Differenzen $H(x_{i+1} + \frac{1}{2}d) - H(x_i + \frac{1}{2}d)$. Damit erhält man die angepaßten absoluten Klassenfrequenzen f_i'.
5. Errechnung von $(f_i - f_i')^2/f_i' = \chi_i^2$.
6. Die Summe aller χ_i^2 ist die von uns gesuchte Prüfgröße χ^2 mit Freiheitsgrad $\nu = n - 2 - 1$, n = Anzahl der Klassen.

Tabelle 2

$x+\frac{1}{2}d$	$F(c)$	$F(c)\times N = H(x+\frac{1}{2}d)$	$H(x_{i+1}+\frac{1}{2}d)$ minus $H(x_i+\frac{1}{2}d) = f_i'$	f_i (vgl. S. 161)	$(f_i-f_i')^2/f_i' = \chi_i^2$
5,4	0,000 76	1,5	1,5*) =		
5,8	0,006 57	13,1	11,6 } 13,1	5	5,01
6,2	0,035 93	71,9	58,8	78	6,27
6,6	0,133 50	267,0	195,1	144	13,38
7,0	0,333 60	667,2	400,2	479	15,52
7,4	0,602 57	1205,1	537,9	542	0,03
7,8	0,826 39	1652,8	447,7	358	17,97
8,2	0,947 38	1894,8	242,0	279	5,66
8,6	0,989 56	1979,1	84,3	99	2,56
9,0	0,998 61	1997,2	18,1	15	0,53
9,4	—*	—*	2,8	1	1,16
			2000,0	2000	$\chi^2 = 68{,}09$
					$\nu = 10-2-1 = 7$

Die Signifikanzwahrscheinlichkeit 2 α des erhaltenen χ^2 (vgl. Tafel S. 36) ist bedeutend kleiner als 0,0005. Die Bevölkerung, aus der die Stichprobe stammt, ist somit bestimmt nicht normal verteilt, ganz entgegen unserem optischen Urteil auf Grund der empirischen Probits (vgl. oben).

Nachtrag. Bei obiger Berechnung sollte die Reihenfolge der Vorzeichen der Differenzen $f_i - f_i'$ inspiziert werden. + und − sollten

* Die große Abweichung 3,68 für den Wert $x = 9{,}4$ ist in unseren Tafeln nicht mehr enthalten. Dies macht nichts aus, weil wir, wie Kolonne 4 obiger Tabelle 2 zeigt, bei den äußersten Klassen die Differenzen folgendermaßen bilden: H (unterste Klasse) $= 0$ und $N - H$ (oberste Klasse).

stochastisch abwechseln und keine systematischen Zyklen zeigen. Bei genügender Klassenanzahl sollte ein Iterationstest gemacht werden. Wenn nämlich der χ^2-Test zu keiner Signifikanz führt, so kann man – bei größerer Anzahl Klassen wie oben – mit ziemlicher Bestimmtheit annehmen, die Bevölkerung sei normal verteilt, *sofern die Plus- und Minus-Iterationen stochastisch sind.* Sind sie es nicht, dann beruht der ganze χ^2-Test auf einer unsicheren Basis. (Er hat als Voraussetzung, daß die Klassen untereinander *unabhängig* sind. Systematische Vorzeichenzyklen sprechen dagegen.)

11 G. Standardabweichungen der Quantile von Stichproben aus normalverteilten Bevölkerungen

Nachstehende Formeln sind nur *asymptotisch* exakt und sollten darum nur bei *großen* Stichproben verwendet werden (je extremer die Lage des Quantils ist, um so größer sollte die Stichprobe sein). In der Praxis kann man deshalb diese Formeln nur selten verwenden. Sollen für kleine und mittlere Stichproben die Vertrauensgrenzen für Quantile bestimmt werden, so verfahre man nach den Anweisungen von Abschnitt 10 F (verteilungsfreie Vertrauensgrenzen) und berechne sie *nicht* an Hand der in untenstehenden Formeln definierten Standardabweichungen.

Es gilt asymptotisch

$$\text{Standardabweichung von } x_p = \sigma_{x_p} = \frac{1}{f(x_p)}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \qquad (530)$$

Aus (**530**) und (**506**) ergibt sich

$$\text{Standard-abweichung des Medians } x_{0,5} = \sigma_{x_{0,5}} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2N}} = 1{,}2533\,\sigma/\sqrt{N} \qquad (531)$$

Der Median ist bei der Normalverteilung identisch mit dem Mittelwert μ. Der Median einer Stichprobe ist somit auch eine Schätzung von μ. Die relative asymptotische Effizienz dieser Schätzung ist nach (**433**), (**484**) und (**531**)

$$\frac{\sigma/\sqrt{N}}{\sigma\sqrt{\pi/2N}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sim 0{,}8$$

das heißt ungefähr 80% der Schätzung von μ mittels $\bar{x}$ nach (**491**).

11 H. Die logarithmische Normalverteilung

Ihre Wahrscheinlichkeitsdichte ist definiert

$$f(x) = \frac{0{,}4343}{x \times \sigma_{\log x}} \times f(c), \qquad c = \frac{\log x - \mu_{\log x}}{\sigma_{\log x}},\ (0 < x < \infty) \qquad (532)$$

Als Schätzung von $\mu_{\log x}$ und $\sigma_{\log x}$ berechnet man nach (**491**)und (**492**) $\bar{x}_{\log x}$ und $s_{\log x}$, indem man $\log x$ an Stelle von x und $(\log x)^2$ an Stelle von x^2 einsetzt.

Die logarithmische Normalverteilung ist unsymmetrisch (linksschräg). (Vgl. Abb. 31 a.)

Es sind

$$\text{Modus} = \text{antilog}\,(\mu_{\log x} - 2{,}3026\,\sigma^2_{\log x}) \qquad (533)$$

$$\text{Median} = \text{antilog}\,\mu_{\log x} \qquad (534)$$

$$\text{Mittelwert} = \text{antilog}\,(\mu_{\log x} + 1{,}1513\,\sigma^2_{\log x}) \qquad (535)$$

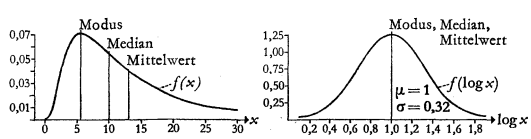


Abb. 31 a) Logarithmische Normalverteilung. b) Transformierte Form von a).

Trägt man x auf einem logarithmisch eingeteilten Abszissenmaßstab ab oder – was auf das gleiche herauskommt – $\log x$ an Stelle von x auf einem linearen Abszissenmaßstab, so wird die unsymmetrische Verteilung (**532**) in die symmetrische Normalverteilung transformiert

$$f(\log x) = \frac{1}{\sigma_{\log x}} \times f(c), \qquad c = \frac{\log x - \mu_{\log x}}{\sigma_{\log x}},\ (0 < x < \infty) \qquad (536)$$

[für $\mu_{\log x}$ und $\sigma_{\log x}$ siehe (**532**)]

Aus (**532**) und (**536**) ergibt sich

$$f(x) = \frac{0{,}4343}{x} \times f(\log x) \qquad (537)$$

Die der transformierten Veränderlichen entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichte ist somit nicht gleich groß wie die Wahrscheinlichkeitsdichte der ursprünglichen Variablen. Man beachte in Abbildung 31 die ungleichen Ordinatenmaßstäbe. Anders verhält es sich mit der kumulierten Verteilung. Es ist*

$$F(x_p) = F^*(\log x_p) = p \qquad (538)$$

und entsprechend gilt für die Quantile

$$x_p = \text{antilog}\,(\log x_p) \qquad (539)$$

und bei ungruppierten Stichproben

$$O(x_p) = O(\log x_p) \qquad (540)$$

(O = Ränge der Stichprobeneinzelwerte, vgl. Abschnitt 10 E)

Aus (**536**) und (**538**) bis (**540**) ergeben sich als Folgerungen (**541**) bis (**543**):

Wird eine unsymmetrische stetige Verteilung durch eine Transformation der Einzelwerte nach (**536**) in eine Normalverteilung übergeführt, so ist die ursprüngliche Verteilung eine logarithmische Normalverteilung. (**541**)

Ergibt die Transformation nach (**536**) Stichproben aus normalverteilten Bevölkerungen [vgl. (**508**) und Abschnitt 11 F], so lassen sich mit ihnen alle für sie geltenden *Teste* ohne weiteres durchführen. *Das Resultat dieser Teste gilt auch für die nichttransformierten Stichproben.* (**542**)

Bei *ungruppierten* Stichproben aus lognormalen Bevölkerungen, deren Einzelwerte *nicht* transformiert wurden, gelten für die Schätzung der Quantile und deren Vertrauensgrenzen die Anweisungen der Abschnitte 10 E und 10 F *ohne jede Änderung.* (**543**)

Für *gruppierte* Stichproben merke man sich: Die Transformation $x \to \log x$ darf nur mit den *Einzelwerten* durchgeführt werden. Ist eine Stichprobe in Klassen gruppiert, so muß sie zunächst wieder in eine ungruppierte Stichprobe aufgelöst werden. Für diese Einzelwerte werden die Logarithmen gesucht, und mit diesen darf wieder eine gruppierte Stichprobe gebildet werden, aber mit *äquidistanzierten logarithmischen* Klassengrenzen! Läßt sich eine gruppierte Stichprobe nicht auflösen, weil die Einzelwerte nicht notiert wurden, so ist eine logarithmische Transformation *nicht* mehr möglich. Man notiere deshalb bei Stichprobenerhebungen die Einzelwerte und gruppiere erst danach! (**544**)

In der Natur sind viele zufällige Veränderliche lognormal verteilt. Überall dort, wo die Reaktion eines Elementes auf eine gegebene Ursache sich proportional verhält zur Intensität der Ursache und zur Größe des Elementes, wird die Form der Verteilung lognormal sein. In der Praxis ist dies vor allem bei toxikologischen und ähnlichen Bio-Versuchen von Bedeutung, bei denen die Veränderliche x (Dosierung) routinemäßig logarithmisch transformiert wird.

11 I. Das Additionstheorem der Normalverteilung

Gegeben seien die stochastisch unabhängigen normalverteilten Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ mit den Mittelwerten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ und den Varianzen $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2$. Die Variable

$$x = x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_k$$

ist dann ebenfalls normalverteilt mit Mittelwert

$$\mu = \mu_1 \pm \mu_2 \pm \cdots \pm \mu_k$$

und Varianz

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2 \qquad (545)$$

* Die Quantile einer transformierten Veränderlichen sind durch die transformierten Quantile der ursprünglichen Variablen gegeben, sofern die Transformation mit einer *ansteigenden* Funktion vorgenommen wurde [$f(\log x)$ ist eine ansteigende Funktion].

Man beachte in (**545**), daß sich die Varianzen auch dann *summieren*, wenn der Mittelwert μ aus *Differenzen* gebildet wird.

11 K. Der zentrale Grenzwertsatz

Die große Bedeutung der Normalverteilung liegt darin, daß die Summe von k stochastisch unabhängigen, *beliebigen* Variablen mit wachsendem k unter ziemlich generellen Bedingungen stochastisch gegen eine Normalverteilung konvergiert mit Mittelwert

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k$$

und Varianz

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2 \qquad (546)$$

Während in (**545**) die Summe normalverteilter Veränderlicher *immer*, auch bei kleinem k, normal verteilt ist, gilt für *beliebig* verteilte Veränderliche (**546**) erst, wenn k gegen Unendlich strebt. In der Praxis ist «Unendlich» ein dehnbarer Begriff. Haben zum Beispiel die Verteilungen in (**546**) alle *dieselbe*, nicht allzu unsymmetrische Gestalt, so ist ihre Summe praktisch schon bei relativ kleinem k (50, 100, 200, ...) normal verteilt, das heißt, der Fehler ist vernachlässigbar, wenn man diese Stichprobenverteilungen mit der Normalverteilung approximiert.

Unsere Zahlentafeln zu den Stichprobenverteilungen sind so gehalten, daß Stichproben, die den von den Tafeln berücksichtigten Umfang überschreiten, praktisch als normalverteilt angesehen werden können. (**547**)

In dem von uns behandelten Stoffgebiet konvergieren mit *einer* Ausnahme *alle* Stichprobenverteilungen nach (**546**) gegen die Normalverteilung. Die Ausnahme bildet die Verteilung des Extrembereiches (selbstverständlich auch der Extremabweichungen).

12. Mit der Normalverteilung eng verbundene Verteilungen (summarisch)

12 A. Die STUDENT-Verteilung

Muß in der standardisierten *Normal*abweichung $c = (x-\mu)/\sigma$ die Standardabweichung σ durch ihre Schätzung s ersetzt werden, weil σ unbekannt und deshalb aus der Stichprobe geschätzt werden muß, dann hat die standardisierte Veränderliche

$$t_\nu = \frac{x-\mu}{s_\nu}\ ;\ s_\nu \text{ unabhängig von } x \qquad (548)$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(t|\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\nu\pi}}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} \qquad (549)$$

wobei $\Gamma(x/2) = (x/2-1)!$ =
$(x/2-1)(x/2-2)\ldots 3\times 2\times 1$, wenn x eine gerade Zahl;
$(x/2-1)(x/2-2)\ldots 3/2\times 1/2\times\sqrt{\pi}$, wenn x eine ungerade Zahl

ν wird der *Freiheitsgrad* von t genannt.

Die STUDENT-Verteilung ist von μ und s unabhängig; ihre Form wird nur vom Freiheitsgrad ν bestimmt. Anweisungen, wie der Freiheitsgrad ν zu bestimmen ist, werden später von Fall zu Fall gegeben.

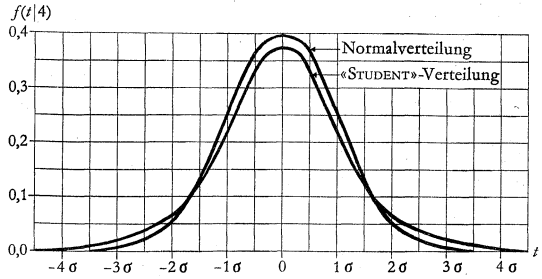


Abb. 32 Wahrscheinlichkeitsdichte der Normal- und der STUDENT-Verteilung mit Freiheitsgrad $\nu = 4$.

Die STUDENT- oder t-Verteilung ist der Normalverteilung sehr ähnlich und konvergiert mit wachsendem Freiheitsgrad auch schnell gegen diese. Ihr Variationsbereich erstreckt sich von $-\infty$ bis ∞. Sie ist stetig, *symmetrisch*, glockenförmig, hat aber im Gegensatz zur Normalverteilung mehr Wahrscheinlichkeit in den Ausläufen und weniger im zentralen Teil konzentriert.

Die aus der Symmetrie abgeleiteten Gleichungen (**512**) bis (**517**) der standardisierten Normalverteilung gelten auch für die t-Verteilung, wenn man in diesen Gleichungen t an Stelle von c einsetzt. (**550**)

Tafeln

In den Tafeln S. 32–35 sind die exakten Abweichungen t_0 für Freiheitsgrade ν zwischen 1 und 200 zu folgenden Integralen gegeben:

$$P(\text{der Tafel}) = \int_{t_0}^{\infty} f(t)\,dt = \text{Prob}\,(t > t_0) \qquad \text{(a)}$$

$$2P(\text{der Tafel}) = \int_{-\infty}^{t_0} f(t)\,dt + \int_{t_0}^{\infty} f(t)\,dt = \text{Prob}\,(t < -t_0) + \text{Prob}\,(t > t_0) = \text{Prob}\,(t \neq -t_0 \text{ bis } t_0) \qquad \text{(b)}$$

Bei *einseitigen* Testen (Vertrauensgrenzen) ist $\alpha = P$, bei *zweiseitigen* Testen (Vertrauensgrenzen) ist $2\alpha = 2P$. (c)

Die kumulierte Verteilung $F(t) = \text{Prob}\,(t \leqq t_0)$ ist nach (**405** b)
$F(t_0) = 1 - \text{Prob}\,(t > t_0) = 1 - P = 1 -$ (**551** a) (d)

(**551**)

In der Tafel S. 42 finden sich die exakten Abweichungen t_0^2 für Freiheitsgrade ν zwischen 1 und 200 zu folgendem Integral

$$P_r = \int_{t_0^2}^{\infty} f(t^2)\,dt^2 = \text{Prob}\,(t^2 > t_0^2) = 2\,\text{Prob}\,(t > t_0) \qquad \text{(a)}$$

$$\tfrac{1}{2}P_r = \tfrac{1}{2}\ (\textbf{552}\,\text{a}) \qquad \text{(b)}$$

Bei *einseitigen* Testen ist $\alpha = \frac{1}{2}P$, bei *zweiseitigen* Testen ist $2\alpha = P$. (c)

(**552**)

Der Leser ist gebeten, die Beschriftung im Tabellenkopf dieser Tafel zu korrigieren. (**552**) *bezieht sich auf die korrigierte Beschriftung:*

an Stelle von $2P$ ist zu schreiben $P = 2\alpha$
an Stelle von P ist zu schreiben $\frac{1}{2}P = \alpha$

Beziehung zur F-Verteilung vgl. (**575**).

12 B. Die χ^2-Verteilung

Es seien $x_1, x_2, \ldots$ stochastisch voneinander unabhängige Beobachtungen aus *derselben normalverteilten* Bevölkerung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ. Dann hat die Summe

$$\chi_\nu^2 = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_i^2 + \cdots + c_\nu^2 = \sum_1^\nu c_i^2 \qquad (553)$$

der standardisierten Abweichungen

$$c_i^2 = \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2$$

die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(\chi^2|\nu) = \frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)}\,e^{-\chi^2/2}\,(\chi^2)^{\nu/2-1}\ ;\ (0 \leqq \chi^2 < \infty) \qquad (554)$$

[ν wird Freiheitsgrad von χ^2 genannt, für Γ vgl. (**549**)]

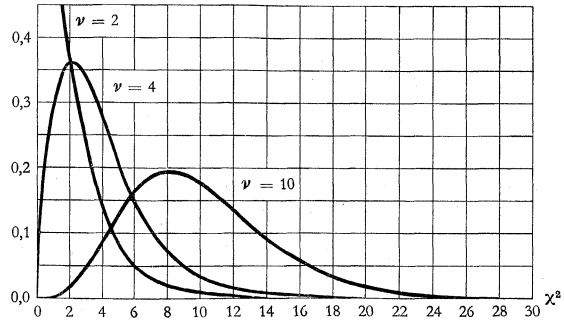


Abb. 33 Wahrscheinlichkeitsdichte der χ^2-Verteilung, $\nu = 2, 4$ und 10.

Die χ^2-Verteilung ist eine stetige, *unsymmetrische* Verteilung, die – wie die STUDENT-Verteilung, aber langsamer – mit wachsendem Freiheitsgrad ν gegen die Normalverteilung konvergiert (vgl. Abb. 33). Ihr Variationsbereich erstreckt sich von Null bis Unendlich. Ihre Form hängt nur vom Freiheitsgrad ν ab. Zur Bestimmung des Freiheitsgrades vgl. spätere Anweisungen sowie **(566)** und **(569)** dieses Abschnittes.

Parameter

(555)

Modus	$= \nu - 2$	(a)
Mittelwert μ	$= \nu$	(b)
Varianz σ^2	$= 2\nu$	(c)

Stochastische Konvergenz, wenn $\nu \to \infty$:

(556)

χ^2/ν	$\to 1$	(a)
χ^2-Verteilung	$\to$ Normalverteilung $(\nu; \sqrt{2\nu})$; relativ langsam	(b)
$2\chi^2/\nu$-Verteilung	$\to$ Normalverteilung $(\sqrt{2\nu-1}; 1)$* schneller als (b)	(c)

Approximationen für Quantile

(557)

Zentraler gelegene Quantile [nach **(556** b)]:

(a) $\chi_p^2 \sim \frac{1}{2}(c_p + \sqrt{2\nu-1})^2$; $\nu > 30$

Extremer gelegene Quantile[16]:

(b) $\chi_p^2 \approx \nu\left(1 - \frac{2}{9\nu} + c_p\sqrt{\frac{2}{9\nu}}\right)^3$; $\nu > 30$

Berechnung der Quantile 0,005; 0,025; 0,975; 0,995 aus den Vertrauensgrenzen für λ der POISSON-Verteilung vgl. **(563)**.

Beispiel 32 zu **(557)**: Vergleich zwischen (a) und (b). Gesucht das Quantil $\chi^2_{0{,}975;\ \nu=50}$.

(a) $\chi_p^2 \sim \frac{1}{2}(1{,}96 + \sqrt{100-1})^2 = 70{,}922$

(b) $\chi_p^2 \approx 50\left(1 - \frac{2}{450} + 1{,}96\sqrt{\frac{2}{450}}\right)^3 = 71{,}424$

Der exakte Wert beträgt 71,420.

Tafeln

In den Tafeln S. 37–39 sind die exakten Abweichungen χ_0^2 für Freiheitsgrade ν zwischen 100 und 200 zu folgenden Integralen gegeben

(558)

$1\int_r$ (der Tafel)	$= \int_{\chi_0^2}^{\infty} f(\chi^2)\,d\chi^2 = \text{Prob}(\chi^2 > \chi_0^2)$	(a)
$\frac{1}{2}\int_r$ (der Tafel)	$= \frac{1}{2}$ (**558** a)	(b)
$1\int_l$ (der Tafel)	$= \int_0^{\chi_0^2} f(\chi^2)\,d\chi^2 = \text{Prob}(\chi^2 < \chi_0^2)$ $= F(\chi^2)$	(c)
$\frac{1}{2}\int_l$ (der Tafel)	$= \frac{1}{2}$ (**558** c)	(d)
Bei *einseitigen* χ^2-Testen ist $\alpha = \frac{1}{2}\int_r$		(e)
Bei *zweiseitigen* χ^2-Testen ist $2\alpha = 1\int_r$		(e)
Bei *einseitigen* Vertrauensgrenzen für σ ist für *obere* Grenzen $\alpha = 1\int_r$ für *untere* Grenzen $\alpha = 1\int_l$		(f)
Bei *zweiseitigen* Vertrauensgrenzen für σ ist für die *obere* Grenze $\alpha = \frac{1}{2}\int_r$ für die *untere* Grenze $\alpha = \frac{1}{2}\int_l$	$\alpha < 0{,}5$	(f)

(559)

Die oft gebrauchte Quadratwurzel $\sqrt{\nu/\chi_p^2}$ findet man für Freiheitsgrade zwischen 1 und 100 auf S. 47 bei den *Vertrauensfaktoren für* σ für folgende Quantile

χ_p^2	Kolonne $1-2\alpha$	χ_p^2	Kolonne $1-2\alpha$
0,05 und 0,95	0,90	0,01 und 0,99	0,98
0,025 und 0,975	0,95	0,005 und 0,995	0,99

* Nach R. A. FISHER.

Beziehungen zu anderen Verteilungen

Normalverteilung

(560)

Wenn $\nu = 1$, ist $\chi_p^2 = c_{1/2\,(1+p)}^2$, das heißt, $\text{Prob}(\chi^2 < \chi_0^2) = 2\,\text{Prob}(c < c_0)$

F-Verteilung vgl. **(576)** und **(577)**.

POISSON-Verteilung

(561)

$$\text{Prob}(\nu = 2x \mid \chi^2 = \chi_0^2) = \frac{e^{-\chi^2/2}\,(\chi^2/2)^x}{x!}; \quad \nu = \text{gerade Zahl}$$

Abb. 44 zeigt diese Beziehung sehr schön ($\lambda = \chi^2/2$, $x = \nu/2$).

Wegen **(561)** ist

(562)

$$\text{Prob}(\chi^2 > \chi_0^2 \mid \nu = 2k) = \sum_0^{k-1} \frac{e^{-\chi^2/2}\,(\chi^2/2)^x}{x!}; \quad \nu = \text{gerade Zahl}$$

Auf Grund von **(562)** lassen sich für geradzahlige Freiheitsgrade ν aus den Vertrauensgrenzen (für λ) der POISSON-Verteilung, S. 107 und 108, folgende Quantile berechnen:

(563)

Prob $(\chi^2 \leqq \chi_p^2) = p$	Argument Tafel S. 107 und 108	Seite	χ_p^2 ist gleich
0,005	$x = \nu/2$	108	$2\lambda_l$
0,025	$x = \nu/2$	107	$2\lambda_l$
0,975	$x = (\nu/2) - 1$	107	$2\lambda_r$
0,995	$x = (\nu/2) - 1$	108	$2\lambda_r$

ν = gerade Zahl

Beispiel 33 zu **(563)**: Gesucht | Lösung

$\chi^2_{0{,}025,\ \nu=260}$ | $x = 130$; $\lambda_l = 108{,}61$; $\chi_p^2 = 217{,}22$

$\chi^2_{0{,}975,\ \nu=260}$ | $x = 129$; $\lambda_r = 153{,}30$; $\chi_p^2 = 306{,}60$

(Der Wert $\lambda_r = 153{,}30$ wurde linear interpoliert: $154{,}39 - {}^1/_{10}\,(154{,}39 - 143{,}52)$

Das Additionstheorem der χ^2*-Verteilung*

In **(553)** kann man die Summe rechts vom Gleichheitszeichen in beliebige Teilsummen aufspalten, zum Beispiel

$$\chi^2 = \underbrace{c_1^2 + c_2^2}_{=\chi_1^2(\nu=2)} + \underbrace{c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 + c_6^2}_{=\chi_2^2(\nu=4)} + \underbrace{c_7^2 + \cdots}_{=\chi_3^2(\nu=\ldots)} \text{ usw.}$$

Daraus folgt

(564)

Wenn $\chi_1^2, \chi_2^2, \ldots, \chi_n^2$ stochastisch voneinander unabhängig sind und χ^2-Verteilungen mit $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ Freiheitsgraden haben, dann hat die Summe $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \cdots + \chi_n^2$ ebenfalls eine χ^2-Verteilung mit $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n$ Freiheitsgraden.

Es gibt auch ein Teilungstheorem für χ^2, auf dem die Varianz- und die Regressionsanalyse beruhen. Wir können hier nicht darauf eintreten.

χ^2 und Varianz von Stichproben

Nach **(553)** ist $\chi^2 = [\Sigma(x-\mu)^2]/\sigma^2$. Setzt man $\bar{x}$ an Stelle von μ, dann ist nach **(493** e) $\Sigma(x-\bar{x})^2 = (N-1)\,s^2$. Setzt man nun $N-1 = \nu$, so erhält man schließlich νs^2 an Stelle von $\Sigma(x-\mu)^2$. Intuitiv vermutet man

$$\chi_\nu^2 = \frac{\nu s_\nu^2}{\sigma^2}, \text{ wobei } \nu = \text{Freiheitsgrad von } s^2 \qquad \textbf{(565)}$$

und hat nicht falsch geraten. Man merke sich **(565)** als eine zweite, mit **(553)** äquivalente Definition von χ^2, die *nur* für *normalverteilte* Bevölkerungen gilt.

Eine wichtige asymptotische Eigenschaft von χ^2

(566)

Eine Stichprobe aus einer *beliebigen* Bevölkerung sei in n Klassen eingeteilt. f_i sei die Besetzung der Klasse i, wobei $f_1 + f_2 + \cdots + f_i + \cdots + f_n = N$. f_i nennen wir die *empirische* (absolute) *Häufigkeit*. $\boldsymbol{p}_i$ sei die *gegebene* oder eine *hypothetische* Wahrscheinlichkeit der Veränderlichen x, in die Klasse i zu fallen, wobei $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \cdots + \boldsymbol{p}_i + \cdots + \boldsymbol{p}_n = 1$. $N\boldsymbol{p}_i$ nennen wir die *gegebene* oder die *hypothetische* (absolute) *Häufigkeit*. Die empirischen Häufigkeiten in den

einzelnen Klassen sind zufällige Veränderliche. Sind sie stochastisch voneinander *unabhängig*, gilt

$$\sum_1^n \frac{(f_i - N\boldsymbol{p}_i)^2}{N\boldsymbol{p}_i} \to \chi^2_\nu; \quad \text{wobei } \nu = n-1 \quad \text{wenn } \nu \to \infty. \qquad (566)$$

(**566**) wurde von K. PEARSON gefunden. Daß (**566**) erst bei $\nu \to \infty$ exakt gilt, hat in der Praxis nicht so viel zu bedeuten, ist aber doch ein Grund zu gewissen Restriktionen:

Bei Anpassungstesten auf Grund von (**566**) sollten die *Stichproben* als Ganzes *nicht zu klein* sein, die *hypothetischen* (absoluten) *Häufigkeiten in den einzelnen Klassen nicht unter* $N\boldsymbol{p}_i = 4$ *liegen*. Sind sie kleiner, so werden sie durch Zusammenlegen von 2, 3, . . . benachbarten Klassen auf das geforderte Niveau erhöht. Letzteres ist aber nur dann nötig, wenn die Anzahl der Klassen klein ist. Ist ν größer als (ungefähr) 8 und der Stichprobenumfang (ungefähr) über 40, so dürfen die $N\boldsymbol{p}_i$ in vereinzelten Klassen bis auf 1 absinken. (**567**)

In der Regel sind die hypothetischen Häufigkeiten nicht gegeben:

Theoretische (absolute) Häufigkeiten $N\boldsymbol{p}_i$, die auf Grund von *geschätzten* Parametern errechnet wurden, nennen wir *angepaßte Häufigkeiten*, die ihnen entsprechende theoretische Verteilung *angepaßte Verteilung* (fitted distribution). (**568**)

Müssen zur Berechnung von angepaßten Häufigkeiten k Parameter geschätzt werden, dann ist die Anzahl der Freiheitsgrade für das in (**566**) definierte χ^2: $\nu = n - 1 - k$, wobei n = Anzahl der Klassen, k = Anzahl der geschätzten Parameter. (a)

Werden m Stichproben (Mehrfeldertafel), jede in n Klassen gruppiert, einem χ^2-Test auf Grund von (**566**) unterzogen, dann ist die Anzahl der Freiheitsgrade für χ^2: $\nu = (n-1)(m-1)$, wobei n = Anzahl der Klassen, m = Anzahl der Stichproben (b)

Im häufigen Spezialfall der Vierfeldertafel ist der Freiheitsgrad $\nu = 1$. (c)

(**569**)

Als Beispiel eines χ^2-Testes mit Schätzung der Parameter vgl. Abschnitt 11 F, b. Wir werden noch auf χ^2-Teste zurückkommen und noch andere Teste zur Prüfung von Häufigkeiten behandeln.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß sich die Definitionen (**543**) und (**565**) *grundsätzlich* von der Definition (**566**) unterscheiden, obschon die Formeln einander sehr ähnlich sehen: (**543**) und (**565**) gelten nur für *normalverteilte*, (**566**) gilt für *beliebige* Bevölkerungen; in (**543**) und (**565**) sind x und s *stetige* Veränderliche, f_i in (**566**) ist eine *diskrete* Veränderliche.

Wenn χ^2-Teste an Hand von angepaßten Verteilungen durchgeführt werden, so vergewissere man sich, daß die durchgeführten Schätzungen den Bedingungen (**430**) oder (**431**) genügen.

12 C. Die F-Verteilung

F im Zusammenhang mit Verteilung symbolisiert *nicht* eine kumulierte Verteilung, sondern den Namen von R. A. FISHER, der die der F-Verteilung äquivalente z-Verteilung entdeckt hat[17].

Es seien s_1^2 und s_2^2 zwei stochastisch unabhängige Schätzungen von σ^2 aus *derselben, normalverteilten* Bevölkerung mit Varianz σ^2. Dann ist nach (**565**)

$$s_1^2 = \sigma^2 \frac{\chi_1^2}{\nu_1} \text{ und } s_2^2 = \sigma^2 \frac{\chi^2}{\nu_2}$$

Der Quotient

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\chi_1^2/\nu_1}{\chi_2^2/\nu_2}; \quad 0 \leqq F < \infty; \qquad (570)$$

(ν_1 und ν_2 = Freiheitsgrade von s_1 und s_2)

hat dann die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \nu_1^{\nu_1/2}\, \nu_2^{\nu_2/2} \frac{F^{(\nu_1/2)-1}}{(\nu_2+\nu_1 F)^{\nu_1+\nu_2/2}} \quad 0 \leqq F < \infty \qquad (571)$$

[Für Γ vgl. (**549**)]

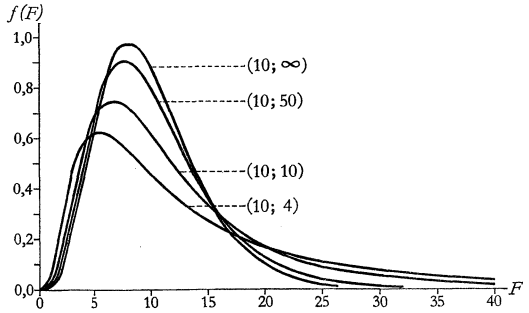


Abb. 34 Wahrscheinlichkeitsdichte der F-Verteilung mit verschiedenen Freiheitsgraden.

Die F-Verteilung ist eine stetige, *unsymmetrische* Verteilung mit einem Variationsbereich von Null bis Unendlich.

Parameter

Mittelwert $\mu = \nu_2/(\nu_2 - 2); \quad \nu_2 > 2$ (a)

Varianz $\sigma^2 = \left(\frac{\nu_2}{\nu_2-2}\right)^2 \times \frac{2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-4)}; \quad \nu > 4$ (b) (**572**)

Vertauschung von ν_1 *und* ν_2

Es ist $F_0(p; \nu_1; \nu_2) = 1/[F_0(1-p; \nu_2; \nu_1)]$ (**573**)

In (**573**) kann p sowohl Prob $(F > F_0)$ als auch Prob $(F < F_0)$ sein.

Tafeln

Auf S. 40 und 41 findet man die Abweichungen F_0 zu folgendem Integral

P (der Tafel) $= P_r = \int_{F_0}^{\infty} f(F)\,dF =$ Prob $(F > F_0)$ (a)

Bei einseitigen Testen ist $\alpha = \frac{1}{2} P$, bei zweiseitigen Testen ist $2\alpha = P$ (b)

Über die t^2-Tafel S. 42 vgl. (**575**) und (**552**) (c)

(**574**)

Beziehungen zu andern Verteilungen

STUDENT-Verteilung

Es ist Prob $(F > F_0)\,|\,1; \nu_2) =$ Prob $(t^2 > t_0\,|\,\nu_2)$
$= 2$ Prob $(t > t_0\,|\,\nu)$ (**575**)

Für $F(1; \nu_2)$ benutze man deshalb für ν_2 zwischen 1 und 200 die ausführlichere t^2-Tafel auf S. 42. Erläuterungen siehe (**552**).

χ^2-Verteilung

Unter F_p und χ_p^2 sind Quantile zu verstehen.

$$F_p(\nu_1; \infty) = \frac{\chi^2_{p,\nu_1}}{\nu_1} \quad (a)$$

$$F_p(\infty; \nu_2) = \frac{\nu_2}{\chi^2_{1-p,\nu_2}} \quad (b) \qquad (576)$$

Aus (**576**) und (**556** a) geht hervor, daß

$F(\nu_1; \infty) \to 1$, wenn $\nu_1 \to \infty$
$F(\infty; \nu_2) \to 1$, wenn $\nu_2 \to \infty$ } das heißt, $F(\infty; \infty) = 1$ (**577**)

Binomialverteilung

$$\text{Es ist Prob}\left[F(\nu_1; \nu_2) < \frac{N-x}{x+1} \times \frac{p}{1-p}\right] = \sum_{x+1}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

wobei $N = \frac{\nu_1+\nu_2}{2} - 1$, $x = \frac{\nu_1}{2} - 1$; ν_1 und ν_2 = gerade Zahlen (**578**)

Auf Grund von (**578**) lassen sich aus den Vertrauensgrenzen (für p) der Binomialverteilung S. 85–98 folgende Quantile F_0 berechnen:

Prob ($F<F_0$)	Argumente S. 85–98: Spalte	N	$\varkappa$	p	Quantil F_0
0,005	99%	$\frac{\nu_1+\nu_2}{2}-1$	$\frac{\nu_1}{2}-1$	p_l	$\frac{\nu_2}{\nu_1}\times\frac{p}{1-p}$
0,025	95%			p_l	
0,975	95%			p_r	
0,995	99%			p_r	

(579)

Beispiel 34. Gesucht $F_{0,995}$ (152; 36). Es ist $N=93$; $\varkappa=75$; $p_r=0{,}8993$ (aus S. 96); $p/(1-p)=8{,}93049$; $\nu_2/\nu_1=0{,}236842$; $F=2{,}12$.

13. Die normalverteilte Bevölkerung: Einige Vertrauens- und Toleranzbereiche

Vgl. dazu Abschnitt 8.

13 A. Vertrauensbereiche für den Mittelwert μ

Vertrauensbereich *einseitig oben* begrenzt
Prob $(-\infty<\mu<\bar{x}+k\times Sd)=1-\alpha$;
vgl. dazu (**580** d) — (a)

Vertrauensbereich *einseitig unten* begrenzt
Prob $(\bar{x}-k\times Sd<\mu<\infty)=1-\alpha$;
vgl. dazu (**580** d) — (b)

Vertrauensbereich *zweiseitig* (symmetrisch) begrenzt
Prob $(\bar{x}-k\times Sd<\mu<\bar{x}+k\times Sd)=1-2\alpha$;
vgl. dazu (**580** d) — (c)

Faktoren $k\times Sd$ für (**580** a, b, c) — (d)

Gleichung	Freiheitsgrad ν von s	k	Sd	Seite (c, t oder k)
(a) und (b)	>200	$\lvert c_\alpha\rvert/\sqrt{N}$	σ oder s	28
(a) und (b)	$\leqq 200$	$t_{\nu,\alpha}/\sqrt{N}$	s_ν	32–35
(c)	>200	k_2 oder $\lvert c_\alpha\rvert/\sqrt{N}$	σ oder s	k_2: 43; c: 28
(c)	$\leqq 200$	k_2 oder $t_{\nu,2\alpha}/\sqrt{N}$	s_ν	k_2: 43; t: 32–35

(580)

In der Tafel S. 43 (für k_2) versteckt sich unter dem Argument N der Freiheitsgrad $\nu=N-1$. In dieser Tafel erfolgt der Übergang von t zu c bei $N=201$.

13 B. Toleranzbereiche

Toleranzbereiche ohne Vertrauenswahrscheinlichkeit

Toleranzbereich *einseitig oben* begrenzt
Prob $(-\infty<\varkappa<m+k\times Sd)=1-\alpha=\beta_p$;
vgl. dazu (**581** d) — (a)

Toleranzbereich *einseitig unten* begrenzt
Prob $(m-k\times Sd<\varkappa<\infty)=1-\alpha=\beta_p$;
vgl. dazu (**581** d) — (b)

Toleranzbereich *zweiseitig* (symmetrisch) begrenzt
Prob $(m-k\times Sd<\varkappa<m+k\times Sd)=1-2\alpha=\beta_p$; vgl. dazu (**581** d) — (c)

m, k und Sd für (**581** a, b, c) — (d)

Gleichungen	Freiheitsgrad ν von s	Bekannte Parameter oder Schätzungen	m	k	Sd	Seite (c, t, k)
(a) und (b)	>200	μ,σ oder $\bar{x},s$	μ oder $\bar{x}$	$\lvert c_\alpha\rvert$	σ oder s	28
(a) und (b)	$\leqq 100$	$\bar{x},\sigma$	$\bar{x}$	k_3*	σ	44, Spalte 1
(a) und (b)	$\leqq 100$	μ,s	μ	$t_{\nu,\alpha}$	s	32–35
(a) und (b)	$\leqq 100$	$\bar{x},s$	$\bar{x}$	k_4*	s	44, Spalte 2
(c)	>200	μ,σ oder $\bar{x},s$	μ oder $\bar{x}$	$\lvert c_\alpha\rvert$	σ oder s	28
(c)	$\leqq 100$	$\bar{x},\sigma$	$\bar{x}$	k_3	σ	44, Spalte 1
(c)	$\leqq 100$	μ,s	μ	$t_{\nu,2\alpha}$	s	32–35
(c)	$\leqq 100$	$\bar{x},s$	$\bar{x}$	k_4	s	44, Spalte 2

* Man wähle β_p der Tafel nach: (Gesucht) $\beta_p=1-2\alpha$ (gegeben α).

(581)

Toleranzbereiche mit Vertrauenswahrscheinlichkeit β_t

Es gelten die Gleichungen (**581** a, b, c) unter folgender Ergänzung [Beispiel zu (**581** d)]:
Prob [Prob $(m-k\times Sd<\varkappa<m+k\times Sd)=1-2\alpha]=\beta_t$.

m, k und Sd für (**581** a, b, c)

Gleichungen	Freiheitsgrad von s	Bekannte Parameter oder Schätzungen	m	k	Sd	Seite
(a) und (b)	$\leqq 100$	$\bar{x},\sigma$	$\bar{x}$	k_5*	σ	44, Spalte 3
(a) und (b)	$\leqq 100$	μ,s	μ	k_6*	s	44, Spalte 4
(a) und (b)	$\leqq 1000$	$\bar{x},s$	$\bar{x}$	k_7	s	45–46
(c)	$\leqq 100$	$\bar{x},\sigma$	$\bar{x}$	k_5	σ	44, Spalte 3
(c)	$\leqq 100$	μ,s	μ	k_6	s	44, Spalte 4
(c)	$\leqq 1000$	$\bar{x},s$	$\bar{x}$	k_7	s	45–46

* Man wähle β_p in der Tafel nach: $\beta_p=1-2\alpha$ (gegeben α)

(582)

Für die Vertrauens- und Toleranzfaktoren gelten folgende Gleichungen

$$k_2=t_{2\alpha,N-1}\times 1/\sqrt{N} \quad \text{für } N\leqq 201 \qquad (a)$$
$$=\lvert c_\alpha\rvert \times 1/\sqrt{N} \quad \text{für } N>201 \qquad (b)$$
$$k_3=\lvert c_\alpha\rvert\times\sqrt{1+1/N} \qquad (c)$$
$$k_4=t_{2\alpha,N-1}\times\sqrt{1+1/N} \qquad (d)$$
$$k_5 \text{ Lösung von } \int_{c-k_5}^{c+k_5} f(c)\,dc=\beta_p;\ (c'=c_{\beta_t}) \qquad (e)$$
$$k_6=\lvert c_{\alpha_p}\rvert\times\sqrt{(N-1)/\chi^2_{1-\beta_t,N-1}} \qquad (f)$$
$$k_7 \text{ vgl. }^{18}\text{, S. 108 und 109}$$

(583)

13 C. Vertrauensbereiche für σ

Aus (**565**) erhält man

Prob $(k_l\,s_\nu<\sigma<k_r\,s_\nu)=1-2\alpha$
wobei $k_l=\sqrt{\nu/\chi^2_{\nu,1-\alpha}}$ und $k_r=\sqrt{\nu/\chi^2_{\nu,\alpha}}$

(584)

Die Werte von k_l und k_r für Freiheitsgrade zwischen 1 und 100 findet man in Tafel S. 47, linke Spalte.

14. Die normalverteilte Bevölkerung: Extrembereich und Extremabweichungen

14 A. Der Extrembereich

Definition

Es seien x_1 der kleinste, x_n der größte Wert einer Stichprobe des Umfanges n. Dann ist (x_n-x_1) der Extrembereich (range) w_n dieser Stichprobe.

(585)

Der standardisierte Extrembereich einer Stichprobe des Umfanges n aus einer Bevölkerung mit Standardabweichung σ ist

$$W_n=\frac{w_n}{\sigma}=\frac{x_n-x_1}{\sigma} \qquad (586)$$

Bei m Stichproben des Umfanges n aus ein und derselben Bevölkerung ist der mittlere Extrembereich

$$\overline{w}_{m,n}=\frac{\sum_1^m w_n}{m}=\frac{\sum_1^m (x_n-x_1)}{m} \qquad (587)$$

und der standardisierte mittlere Extrembereich

$$\overline{W}_{m,n}=\frac{\overline{w}_{m,n}}{\sigma}=\frac{\sum_1^m w_n}{m\sigma}=\frac{\sum_1^m (x_n-x_1)}{m\sigma} \qquad (588)$$

Da der Extrembereich w_n nur ein Sonderfall des mittleren Extrembereiches $\overline{w}_{m,n}$ mit $m=1$ darstellt, sprechen wir im folgenden nur vom mittleren Extrembereich.

Mittlerer Extrembereich als Vielfaches von σ

Der Erwartungswert $\overline{W}_n$ einer normalverteilten Bevölkerung mit Standardabweichung σ ist definiert

$$\overline{W}_{m,n}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\overline{W}_n \qquad (589)$$

Die Tafel[19] auf S.47, rechte Spalte, oben, gibt die Werte von $\overline{W}_n$ der standardisierten Normalverteilung ($\sigma = 1$) als Vielfaches von σ. ($\overline{W}_n$ wird vielerorts als d_n bezeichnet.)

σ als Bruchteil des mittleren Extrembereiches

Der Quotient

$$\frac{\overline{w}_{m,n}}{\overline{W}_n} = \overline{w}_{m,n} \times A_n \qquad (590)$$

ist eine biasfreie Schätzung von σ.

Die Tafel auf S. 47, rechte Spalte, unten, gibt die entsprechenden Werte.

Die relative Wirksamkeit von (**590**), verglichen mit derjenigen der Schätzung s [s^2 nach (**492** a)], ist[20], wenn $m = 1$,

n	2	3	4	5	6	10	15	20	50	100	∞
Wirksamkeit	1,00	0,99	0,98	0,96	0,93	0,85	0,77	0,70	0,49	0,34	0

Bei Stichprobenumfängen zwischen 2 und 10 besteht somit zwischen den beiden Schätzungen kein großer Unterschied. Als *Schnellschätzung* [vgl. (**436**)] läßt sich (**590**) in diesem Bereich gut benutzen. *Mit dieser Schätzung dürfen aber keine t-Teste durchgeführt werden.*

Bei größeren Stichproben läßt sich die Extrembereichschätzung von σ ebenfalls mit gleicher Genauigkeit durchführen, sofern man die Stichprobe in m gleich große, voneinander *unabhängige* Untergruppen des Umfanges 2–10 zerlegt und die Extrembereiche dieser Untergruppen bestimmt. Der Mittelwert dieser Bereiche nach (**588**) ist dann der mittlere Extrembereich. Eine solche Unterteilung ist aber nur möglich, wenn die *zufällige zeitliche Reihenfolge* der Stichprobeneinzelwerte bekannt ist. Dies ist mit ein Grund – es gibt noch andere, auf die wir später zu sprechen kommen –, die Zufallsfolge der anfallenden Werte bei allen Versuchsserien zu notieren. Man könnte sich zwar, wenn die Reihenfolge verlorenging, durch künstliche Schaffung einer zufälligen Folge (mit Zufallszahlen) in diesem Falle behelfen, aber damit geht so viel Zeit verloren, daß der Wert dieser Schnellschätzungen illusorisch wird.

Beispiel 35. Gegeben eine Stichprobe des Umfanges 24, in der *zeitlichen* Reihenfolge $x_1, x_2, \ldots, x_{24}$. Wir können 12 Zweier- oder 8 Dreier- oder 6 Vierer- oder 3 Achtergruppen schaffen:

Zweiergruppen: $x_1 - x_2, x_3 - x_4, \ldots, x_{23} - x_{24}$

Dreiergruppen: $x_1 - x_3, x_4 - x_6, \ldots, x_{22} - x_{24}$

Man bilde aber *nicht* überlappende Gruppen, wie zum Beispiel $x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots$, denn diese sind, wie man sofort sieht, voneinander nicht mehr unabhängig.

$\sigma_{\bar{x}}$ als Bruchteil des mittleren Extrembereiches

Der Quotient

$$\frac{\overline{w}_{m,n}}{\overline{W}_n \sqrt{m\,n}} = \overline{w}_{m,n} \times A_{m,n} \qquad (591)$$

ergibt auf Grund des Stichprobenumfanges $m\,n = N$ eine biasfreie Schätzung der Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}}$ der Schätzung $\bar{x}$. Die Tafel auf S. 48 gibt die Werte des Faktors $A_{m,n} = 1/\overline{W}_n \times \sqrt{m\,n}$.

Beispiel 36 zum Abschnitt 14 A.

Gegeben die Stichprobe (in zeitlicher Reihenfolge) 3,00; 1,56; 1,34; 2,08; 2,10; 2,67. Schätzungen von σ und $\sigma_{\bar{x}}$ auf Grund des Extrembereiches:

a) 1 Extrembereich

1,34 — 3,00: Bereich $= 1{,}66$ $\sigma' = 1{,}66 \times 0{,}39457 = 0{,}655$, $\sigma'_{\bar{x}} = 1{,}66 \times 0{,}16108 = 0{,}267$

b) 2 Extrembereiche

3,00 — 1,56 / 2,08 — 2,67: Mittlerer Bereich $= 1{,}125$ $\sigma' = 1{,}125 \times 0{,}59082 = 0{,}665$, $\sigma'_{\bar{x}} = 1{,}125 \times 0{,}24120 = 0{,}271$

c) 3 Extrembereiche

3,00 — 1,56 / 1,34 — 2,08 / 2,10 — 2,67: Mittlerer Bereich $= 0{,}916$ $\sigma' = 0{,}916 \times 0{,}88623 = 0{,}812$, $\sigma'_{\bar{x}} = 0{,}916 \times 0{,}36180 = 0{,}332$

Als Vergleich schätzen wir σ noch nach (**492** a) und erhalten $s = 0{,}63257$. Um den Bias dieser Schätzung zu korrigieren, multiplizieren wir sie mit dem Faktor $k_s = 1{,}0509$ (siehe Tafel S. 47, linke Spalte, Kolonne k_s) und erhalten schließlich $s = 0{,}665$ und $s_{\bar{x}} = 0{,}271$.

Obige Schätzungen können alle als gleichwertig angesehen werden. Die Übereinstimmung zwischen s und den Schätzungen a) und b) ist zwar auffallend, will aber nicht besagen, daß Schätzung c) schlechter ist. Eine weitere Stichprobe aus der gleichen Bevölkerung könnte zu Schätzungen führen, die näher bei c) liegen.

14 B. Prüfung von Extrembereichen und Extremabweichungen

Der studentisierte Extrembereich

Tafel S. 51, Stichprobenumfang 2–20.

Im Testquotienten

$$\frac{x_N - x_1}{s_\nu}; \quad \nu = \text{Freiheitsgrad von } s, \quad x_1 < x_2 < \cdots < x_N \qquad (592)$$

ist s eine Schätzung, die aus einer *anderen,* von der zu prüfenden Stichprobe *unabhängigen,* aber aus der *gleichen* Bevölkerung stammenden Stichprobe berechnet wurde. Erreicht oder überschreitet der Testquotient die dem Freiheitsgrad ν_s und dem Stichprobenumfang N entsprechende Schranke in der Tafel, so ist der betreffende Extrembereich *zu groß* (Signifikanzwahrscheinlichkeit α).

Ist σ bekannt, so verwende man die Schranken bei $\nu = \infty$. Überschreitet der Stichprobenumfang den Bereich der Tafel, so prüfe man bei Stichprobenumfängen zwischen 21 und 25 nach (**596** d), bei noch größeren Stichproben nach (**595**), *falls man Extremwerte prüfen will.*

Die studentisierte Extremabweichung

Tafel S. 52, unten, Stichprobenumfang 3–9.

Im Testquotienten

$$\frac{x_N - \bar{x}}{s_\nu} \text{ oder } \frac{\bar{x} - x_1}{s_\nu}; \quad \nu = \text{Freiheitsgrad von } s, \quad x_1 < x_2 < \cdots < x_N \qquad (593)$$

bedeutet s das gleiche wie in (**592**). Wenn σ bekannt ist, verwende man die Schranken bei $\nu = \infty$. Der Leser ist gebeten, am Kopfe der Tafel die Formel $(\bar{x} - x_n)/\sigma$ zu korrigieren in $(\bar{x} - x_1)/\sigma$.

Erreicht oder überschreitet der Testquotient die dem Freiheitsgrad und dem Stichprobenumfang N entsprechende Schranke der Tafel, so ist die betreffende Extremabweichung *zu groß* (Signifikanzwahrscheinlichkeit α).

Bei Stichprobenumfängen, die den Bereich der Tafel überschreiten, prüfe man bei Umfängen zwischen 10 und 25 nach (**596** c und d), bei noch größeren nach (**595**).

Die standardisierte Extremabweichung

Tafel S. 52, oben.

Es ist

$$\text{Prob}\,(c \leqq c_e) = \left[\int_{-\infty}^{c_e} f(c)\,dc\right]^N; \quad c_e \text{ siehe (595)} \qquad \text{(a)}$$

$$\text{Prob}\,(-c_e \leqq c \leqq c_e) = \left[\int_{-c_e}^{c_e} f(c)\,dc\right]^N \qquad \text{(b)} \qquad (594)^*$$

(c_e = standardisierte Extremabweichung)

(**594** a) gibt die Wahrscheinlichkeit *einer,* (**594** b) *zweier* gleich großer, vom Mittelwert μ aus mit der Standardabweichung σ als Einheit gemessenen Extremabweichungen. Die entsprechenden Signifikanzwahrscheinlichkeiten sind nach (**408** b) $1 - (594)$. Die Tafel S. 52 gibt die Wahrscheinlichkeiten $1 - (594\,\text{a})$.

Im Testquotienten

$$\frac{x_N - \mu}{\sigma} \text{ oder } \frac{\mu - x_1}{\sigma} = c_e \qquad (595)$$

haben die Symbole die übliche, uns bekannte Bedeutung. Bei Stichprobenumfängen über 25 lassen sich μ und σ durch $\bar{x}$ und s ersetzen. Bei kleineren Stichproben verwende man (**593**).

Beurteilung von Extremwerten einer Stichprobe auf Grund ihrer eigenen Merkmale[21–23]

Tafel S. 53, linke Spalte, oben, Stichprobenumfang 3–25.

Wenn *keine* unabhängigen Informationen über die Standardabweichungen der Bevölkerung vorliegen, prüfe man Extremabweichungen bei Stichproben bis zu einem Umfang von 25 mit den Quotienten:

* Leite diese Formel aus (**362**) und (**405** a) bzw. (**407** c) ab.

Stichprobenumfang N	Quotient		Stichprobenumfang N	Quotient	
3– 7	$\left\|\frac{x_N - x_{N-1}}{x_N - x_1}\right\|$	(a)	11–13	$\left\|\frac{x_N - x_{N-2}}{x_N - x_2}\right\|$	(c)
8–10	$\left\|\frac{x_N - x_{N-1}}{x_N - x_{N-2}}\right\|$	(b)	14–25	$\left\|\frac{x_N - x_{N-2}}{x_N - x_3}\right\|$	(d)

(596)

wobei
- $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$, wenn ein rechtsliegender Extremwert geprüft wird,
- $x_N < x_{N-1} < \cdots < x_1$, wenn ein linksliegender Extremwert geprüft wird.

Bei Stichproben über 25 prüfe man nach (**595**) unter Verwendung von $\bar{x}$ und s an Stelle von μ und σ.

Allgemeines zur Prüfung von Extremwerten

Streichungen von Extremwerten sind sehr «beliebt», erfolgen oft stillschweigend und ohne statistische Prüfung. Manchmal sind Extremwerte auch schon zum Verschwinden gebracht worden, *bevor* das Zahlenmaterial in die Hände des Prüfers gekommen ist. Dies sollte man verhindern, denn oft sind Extremwerte in gewissen Situationen die *aufschlußreichsten* Werte einer Stichprobe.

Ist ein Extremwert bei korrekter statistischer Prüfung nach (**593**), (**595**) oder (**596**) signifikant zu groß, so ist eine Streichung eigentlich nur dann *realiter* gerechtfertigt, wenn eine Überprüfung der Versuche einen *kausalen* Grund zutage fördert, der den Extremwert verursachte, wie beispielsweise, daß bei einer Messung oder Umrechnung ein Fehler gemacht wurde, daß sich ein Kranker ins Untersuchungsmaterial von Gesunden verirrte usw. Solche Extremwerte stammen somit aus *anderen* Bevölkerungen und *müssen* gestrichen werden.

Stammt aber der Extremwert mit großer Wahrscheinlichkeit aus derselben Bevölkerung wie die Stichprobe, dann gelten folgende Überlegungen: Je kleiner Stichproben sind, um so unwahrscheinlicher ist es, daß extreme Werte der Bevölkerung hineingeraten. Bei kleinen Stichproben kann ein Extremwert tatsächlich das Bild gründlich verfälschen, das die Stichprobe von der Bevölkerung geben sollte. In solchen Fällen *darf* er gestrichen werden. Man wähle aber vorsichtigerweise eine kleine Signifikanzwahrscheinlichkeit, wenigstens bei größeren Stichproben.

Einen dritten Umstand soll man sich bei solchen Streichungen auch noch überlegen: Obige Prüfungen basieren auf der Voraussetzung einer *normalverteilten* Bevölkerung. Ist dies nicht der Fall, so sind obige Prüfungen allesamt sozusagen *wertlos,* weil sie in besonderem Maße von der Voraussetzung der Normalität abhängig sind.

Spezielles zur Prüfung von Extremwerten

Führt der Test nach (**592**) zur postulierten Signifikanz, so sind je nach Situation *beide* Extremwerte, der linke und der rechte, *oder* die *ganze* Stichprobe zu verwerfen, weil sie nicht aus jener Bevölkerung stammt, aus der die Stichprobe mit dem berechneten s erhoben wurde.

Extremwertprüfungen dürfen an der gleichen Stichprobe mehrmals durchgeführt werden. Der Stichprobenumfang ist nach jeder Streichung vor der erneuten Prüfung um 1 zu verkleinern. Die resultierende Irrtumswahrscheinlichkeit α_{res} für die Gesamtheit k der signifikanten Prüfungen ist dann in der Größenordnung ungefähr

$$\alpha_{res} \sim 1 - (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_k)$$

Beispiel 37. Wir prüfen nach (**596** d) die Stichprobe des Beispiels 24 des Abschnittes 10 E ($\alpha_{res} = 0{,}05$).

1. Prüfung ($N = 21$) rechtsliegende Extremabweichung $\frac{4{,}41 - 2{,}68}{4{,}41 - 1{,}76} = 0{,}653$; Abweichung ist zu groß ($\alpha \leqslant 0{,}005$)

2. Prüfung ($N = 20$) rechtsliegende Extremabweichung $\frac{3{,}56 - 2{,}35}{4{,}41 - 1{,}76} = 0{,}457$; Abweichung ist zu groß ($\alpha < 0{,}05$)

Die *3. Prüfung* ergibt keine signifikante Abweichung mehr.

$\alpha_{res} \sim 1 - (\geqslant 0{,}995)\ (> 0{,}95) < 0{,}05475$, wenn die Stichprobe aus einer normalverteilten Bevölkerung stammen würde. Dies ist nicht der Fall (vgl. Abschnitt 10 H), die Extremwerte dürfen gar nicht gestrichen werden.

15. Die normalverteilte Bevölkerung: Vergleich einer Stichprobe mit der hypothetischen Bevölkerung

15 A. Vergleich der Standardabweichungen s mit σ bzw. der Varianzen s^2 mit σ^2

Man bilde die Vertrauensgrenzen für σ nach (**584**) oder analog dazu für σ^2, indem man s^2 an Stelle von s und k^2 an Stelle von k nimmt. Dann vergleicht man das hypothetische σ oder σ^2 mit diesen Grenzen und interpretiere nach (**476**).

15 B. Vergleich der Mittelwerte $\bar{x}$ und μ

Der Vergleich der Schätzung $\bar{x}$ mit dem hypothetischen Mittelwert erfolgt nach den in (**598**) bis (**602**) angegebenen Prüfquotienten. Man vergleicht den numerischen Wert dieses Quotienten mit jenem der angegebenen Schranke:

Ist der Prüfquotient *kleiner* als die Schranke, so interpretiere man nach (**474**) oder (**475**). Erreicht oder überschreitet er die Schranke, so ist

	Signifikanz in Klammer	
	einseitiger Test	zweiseitiger Test
wenn $\bar{x} - \mu < 0$	$\bar{x} < \mu\,(\alpha)$	$\bar{x} \neq \mu\,(2\alpha)$
wenn $\bar{x} - \mu > 0$	$\bar{x} > \mu\,(\alpha)$	

(597)

Der c-Test (Normalverteilung)
Anwendbarkeit:
Wenn σ bekannt oder wenn der Freiheitsgrad von $s = N - 1 > 200$

Prüfquotient	Signifikanzschranke	
$\frac{\lvert\bar{x} - \mu\rvert\sqrt{N}}{\sigma}$; oder $\frac{\lvert\bar{x} - \mu\rvert\sqrt{N}}{s_{N-1}}$; $N > 201$	$\lvert c_\alpha\rvert$, S. 28	(a)
$\frac{(\bar{x} - \mu)^2 N}{\sigma^2}$; oder $\frac{(\bar{x} - \mu)^2 N}{s^2_{N-1}}$; $N > 201$	$\chi^2_{\nu=1}$, S. 36; $\alpha = \frac{1}{2}\int_r$, $2\alpha = 1\int_r$	(b)
$\frac{\lvert\bar{x} - \mu\rvert}{s_{N-1}}$; $N > 201$	$c/\sqrt{N}$ = Vertrauensfaktor k_2, S. 43	(c)

(598)

Der t-Test (STUDENT-Verteilung)
Anwendbarkeit: Wenn σ unbekannt und der Freiheitsgrad von $s = N - 1 \leqq 200$

$\frac{\lvert\bar{x} - \mu\rvert\sqrt{N}}{s_{N-1}}$; $N \leqq 201$	t_{N-1}, S. 32–35; $\alpha = P$, $2\alpha = 2P$	(a)
$\frac{(\bar{x} - \mu)^2 N}{s^2_{N-1}}$; $N \leqq 201$	t^2_{N-1}, S. 42; $\alpha = \frac{1}{2}P$, $2\alpha = P$; vgl. Nachsatz zu (**552**)	(b)
$\frac{\lvert\bar{x} - \mu\rvert}{s_{N-1}}$; $N \leqq 201$	$t_{N-1}/\sqrt{N}$ = Vertrauensfaktor k_2, S. 43	(c)

(599)

Der LORD-Test[24] auf Grund des Extrembereiches
Anwendbarkeit: Bei Stichproben des Umfanges $N \leqq 20$ (a) und darüber (b)

$\frac{\lvert\bar{x} - \mu\rvert}{x_N - x_1}$; $N \leqq 20$; $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$	S. 53, linke Spalte, Mitte	(a)
$\frac{\lvert\bar{x} - \mu\rvert\, m}{[\Sigma\,(x_n - x_1)]\, \boldsymbol{A}_{m,n}}$; $m \times n = N$	S. 49; $\boldsymbol{A}_{m,n}$ S. 48	(b)

(600)

m = Anzahl der Untergruppen des Umfanges n (vgl. 14 A), in denen $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

Der Midrange-Test[25] auf Grund des Extrembereiches
Anwendbarkeit: Bei Stichproben des Umfanges $N \leqq 10$

$\frac{\lvert x_N + x_1 - 2\mu\rvert}{x_N - x_1}$; $N \leqq 10$	S. 53, rechte Spalte, oben	**(601)**

Der WALSH-Test[25, 26]
Anwendbarkeit: Bei Stichproben des Umfanges $4 \leqq N \leqq 14$ aus *beliebigen, symmetrischen* Bevölkerungen

Vgl. S. 53, rechte Spalte, unten	S. 53, rechte Spalte, unten (602)

Kommentar: Bei Verwendung von (598 b) und (599 b) muß man zwar $\bar{x}-\mu$ ins Quadrat erheben, erspart sich aber dafür die Quadratwurzel aus s^2 (sofern man s nicht braucht). Bei Verwendung von (598 c) und (599 c) erspart man sich die Multiplikation mit $\sqrt{N}$, ferner vollzieht sich der Übergang von t zu c bei Verwendung der Tafel S. 43 ganz «automatisch».

Ausgesprochene *Schnelltests* sind (600) bis (602), vor allem (601), wo man nicht einmal $\bar{x}$ auszurechnen hat. Ihre Macht ist in den tabellierten Bereichen praktisch gleich der Macht von (599). Der WALSH-Test eignet sich nicht nur für Normal-, sondern für *alle* symmetrischen Verteilungen. Im letzteren Fall liegt die Signifikanzwahrscheinlichkeit für N bis 8 etwas über der tabellierten, ist aber exakt für $N > 8$.

Steht keine Rechenmaschine zur Verfügung, so sind Multiplikationen schneller durchzuführen als Divisionen. Man multipliziere in diesem Falle die Signifikanzschranke mit dem Divisor des Prüfquotienten und erhält damit die Schranke für den Dividenden.

Beispiel 38. Wenn t die Schranke für $\frac{|\bar{x}-\mu|\sqrt{N}}{s}$ ist, ist $t\,s$ die Schranke für $|\bar{x}-\mu|\sqrt{N}$.

16. Die normalverteilte Bevölkerung: Vergleich zweier Stichproben

Beim Vergleich zweier Stichproben sind folgende Hypothesen über die Parameter der zugrunde liegenden Bevölkerungen in Betracht zu ziehen.

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \begin{cases} \mu_1 = \mu_2 & \text{(a)} \\ \mu_1 \neq \mu_2 & \text{(b)} \end{cases} \quad \text{(603)}$$

$$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \quad \begin{cases} \mu_1 = \mu_2 & \text{(a)} \\ \mu_1 \neq \mu_2 & \text{(b)} \end{cases} \quad \text{(604)}$$

16 A. Vergleich der Varianzen

Der Prüfquotient der Hypothese ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) = (603) ist (570), wobei immer die *größere der beiden Stichprobenvarianzen in den Zähler gesetzt wird.* Damit ist im Hinblick auf die *Indices der Tafel* eine Umnumerierung der Varianzen dann erforderlich, wenn s_1^2 (aus Stichprobe 1) kleiner ist als s_2^2. *Der Freiheitsgrad ν_1 der Tafel S. 40 und 41 entspricht immer dem Freiheitsgrad des Zählers von* (570). (605)

s_1^2 und s_2^2 müssen nach (492) berechnet werden. Ihre Freiheitsgrade sind $\nu_1 = N_1 - 1$; $\nu_2 = N_2 - 1$.

Ist der Prüfquotient *kleiner* als die Signifikanzschranke F, S. 40 und 41, so darf nach (474) angenommen werden, daß $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Die Prüfung der Mittelwerte erfolgt in diesem Falle nach Abschnitt 16 B. *Erreicht* oder *übersteigt* der Prüfquotient die Signifikanzschranke F, dann gilt $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Die Prüfung der Mittelwerte erfolgt nach Abschnitt 16 C.

16 B. Vergleich der Mittelwerte, wenn $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Wir symbolisieren zunächst $|\bar{x}_1-\bar{x}_2| = d$ und $|\mu_1-\mu_2| = \boldsymbol{d}$ (606)

Die Schätzung der gemeinsamen Standardabweichung $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ ist

$$s_\nu = \sqrt{\frac{S_1+S_2}{N_1+N_2-2}}\,;\ S_1 \text{ und } S_2 \text{ nach (493)} \qquad \nu_s = \nu_1+\nu_2 = N_1+N_2-2 \quad \text{(607)}$$

Die Schätzung der Standardabweichung der Differenz $\boldsymbol{d}$ ist

$$s_{\nu\boldsymbol{d}} = s_\nu\sqrt{\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}}\,;\ s_\nu \text{ nach (607)};\ \nu_{s_{\nu\boldsymbol{d}}} = N_1+N_2-2 \quad \text{(608)}$$

Ist σ bekannt, so wird in (608) σ an Stelle von s_ν gesetzt. Ist $N_1 = 1$, so wird $s_{\nu\boldsymbol{d}} = s_\nu\sqrt{1+1/N_2}$, $\nu = N-1$; vgl. dazu (452) und (583 c und e).

Die Prüfquotienten für die Hypothese ($\mu_1 = \mu_2 \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2$) sind

wenn σ bekannt oder $\nu > 200$
$d/\sigma_{\boldsymbol{d}}$ oder $d/s_{\nu\boldsymbol{d}}$; Schranke $|c_\alpha|$, S. 28 (a)

wenn $\nu \leqq 200$
$d/s_{\nu\boldsymbol{d}}$; Schranke t_ν; S. 32–35; $\alpha = P, 2\alpha = 2P$ (b)

oder

$d^2/s_{\nu\boldsymbol{d}}^2$; Schranke $t_\nu^2\,[= F(1;\nu)]$; S. 42
$\alpha = \frac{1}{2}P, 2\alpha = 2P$ [vgl. dazu Nachsatz zu (552)] (c)

(609)

Erreicht oder *überschreitet* der Prüfquotient die Signifikanzschranke, so ist $\mu_1 \neq \mu_2$. Man möchte dann manchmal die Hypothese ($d = \boldsymbol{d} \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2$) prüfen:

Den Prüfquotienten erhält man, indem man in (609) $|d-\boldsymbol{d}|$ an Stelle von d setzt. Überschreitet der Prüfquotient die Signifikanzschranke, so ist $d \neq \boldsymbol{d}$. (610)

Die Vertrauensgrenzen für $\boldsymbol{d}$ sind

zweiseitig
$\text{Prob}(d - t_{\nu,\alpha} \times s_{\nu\boldsymbol{d}} \leqq \boldsymbol{d} \leqq d + t_{\nu,\alpha} \times s_{\nu\boldsymbol{d}}) = 1-2\alpha$ (a)

einseitig nach oben begrenzt
$\text{Prob}(\boldsymbol{d} \leqq d + t_{\nu,\alpha} \times s_{\nu\boldsymbol{d}}) = 1-\alpha$ (b)

(611)

Ist der Prüfquotient in (609) *kleiner* als die Signifikanzschranke, so darf nach (474) angenommen werden, $\mu_1 = \mu_2$. Da auch $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, darf als Schlußresultat angenommen werden, die beiden Stichproben 1 und 2 stammten aus derselben Bevölkerung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2. Schätzungen dieser Parameter sind

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^{N_1} x_1 + \sum_1^{N_2} x_2}{N_1+N_2} = \frac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2}{N_1+N_2} \quad \text{(612)}$$

$$s^2 = \frac{S_1+S_2+\frac{\left(\sum_1^{N_1}x_1\right)^2}{N_1}+\frac{\left(\sum_1^{N_2}x_2\right)^2}{N_2}-\frac{\left(\sum_1^{N_1}x_1+\sum_1^{N_2}x_2\right)^2}{N_1+N_2}}{N_1+N_2-1} = \frac{\nu_1 s_1^2+\nu_2 s_2^2+N_1\bar{x}_1^2+N_2\bar{x}_2^2-\frac{(N_1\bar{x}_1+N_2\bar{x}_2)^2}{N_1+N_2}}{N_1+N_2-1} \quad \text{(613)}$$

wobei $\nu_s = N_1+N_2-1$ und S_1 und S_2 nach (493).

16 C. Vergleich der Mittelwerte, wenn $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Sind σ_1 und σ_2 bekannt, oder ist $N_1+N_2 > 200$, so ist

$$\sigma_{\boldsymbol{d}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1}+\frac{\sigma_2^2}{N_2}} \text{ bzw. } s_{\boldsymbol{d}} = \sqrt{\frac{s_1^2}{N_1}+\frac{s_2^2}{N_2}} \quad \text{(614)}$$

und die Prüfquotienten

$$\frac{d}{\sigma_{\boldsymbol{d}}} \text{ bzw. } \frac{d}{s_d} \text{ oder } \frac{|d-\boldsymbol{d}|}{\sigma_{\boldsymbol{d}}} \text{ bzw. } \frac{|d-\boldsymbol{d}|}{s_d} \quad \text{(615)}$$

haben die gleichen Schranken wie (609 a).

Sind σ_1 und σ_2 unbekannt, so haben die Prüfquotienten

$$\frac{d}{s_{\nu\boldsymbol{d}}} \text{ bzw. } \frac{|d-\boldsymbol{d}|}{s_{\nu\boldsymbol{d}}} \quad \text{(616)}$$

Schranken[27] wie (609 b), wobei

$$s_{\nu\boldsymbol{d}} = \sqrt{\frac{s_1^2}{N_1}+\frac{s_2^2}{N_2}} \quad \text{(a)}$$

$$\nu = \frac{1}{\frac{k^2}{\nu_1}+\frac{(1-k)^2}{\nu_2}}\,;\ \nu_1 \text{ und } \nu_2 \text{ Freiheitsgrade von } s_1 \text{ und } s_2 \quad \text{(b)}$$

$$k = \frac{N_2 s_1^2}{N_2 s_1^2 + N_1 s_2^2} \quad \text{(c)}$$

(617)

16 D. Prüfung von Paardifferenzen

Können zwei Analysenmethoden am gleichen Substrat, zwei Behandlungsmethoden am gleichen Individuum untersucht wer-

den, dann wird die *Macht einer Prüfung bedeutend vergrößert,* wenn an Stelle der Differenz *zweier* Mittelwerte *ein* aus der Summe der Paardifferenzen errechneter Mittelwert getestet wird.

A und B seien die zu vergleichenden Behandlungsmethoden, $A_i - B_i = d_i$ die Differenz der zwei Resultate dieser Methoden, die am Reagenden i erzielt wurden, N die Gesamtzahl der Reagenden. Man erhält damit eine Stichprobe des Umfanges N aller Paardifferenzen d_i, die nach (**598**) bis (**602**) geprüft wird, in der Regel mit einem hypothetischen Mittelwert $\mu = 0$. Weitere, noch einfachere Methoden zur Prüfung von Paardifferenzen sind der Zeichentest (vgl. Abschnitt 10 H), der WILCOXON-Test und in gewissen Fällen die entsprechende Sequentialanalyse.

16 E. Prüfung zweier Stichproben auf Grund des Extrembereiches[24]

a) *Zwei Stichproben gleichen Umfanges,* $N' = N'' = N \leqq 20$

$x'_N - x'_1$ und $x''_N - x''_1$ sind die Extrembereiche der beiden Stichproben; der Prüfquotient ist dann

$$\frac{|\bar{x}' - \bar{x}''|}{x'_N - x'_1 + x''_N - x''_1}\ ;\ \text{Schranke S. 53, linke Spalte, unten} \qquad \text{(618)}$$

b) *Zwei Stichproben ungleichen Umfanges* oder gleichen Umfanges, aber größer als in a).

Jede der Stichproben wird in m' bzw. m'' zufällige Untergruppen desselben Umfanges n eingeteilt (vgl. Abschnitt 14 A). Die Summe aller Extrembereiche dieser Untergruppen aus beiden Stichproben sei S_E. Der Prüfquotient ist dann

$$\frac{|\bar{x}' - \bar{x}''|\sqrt{m'm''}}{S_E \times \mathcal{A}_{m,n}}\ ;\ m = m' + m''\text{; Schranke S. 49; } \mathcal{A}_{m,n} \text{ S. 48} \qquad \text{(619)}$$

17. Die normalverteilte Bevölkerung: Prüfung mehrerer Stichproben

Gegeben seien n Stichproben mit den Umfängen

$N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots, N_n$, wobei $\sum_1^n N_i = N$ (a)

den Summen der Einzelwerte x

$\sum_1^{N_1} x_1, \sum_1^{N_2} x_2, \ldots, \sum_1^{N_i} x_i, \ldots, \sum_1^{N_n} x_n$, wobei $\sum_1^n \sum_1^{N_i} x_i = \sum_1^N x$ (b)

den Summen der Einzelquadrate x^2

$\sum_1^{N_1} x_1^2, \sum_1^{N_2} x_2^2, \ldots, \sum_1^{N_i} x_i^2, \ldots, \sum_1^{N_n} x_n^2$, wobei $\sum_1^n \sum_1^{N_i} x_i = \sum_1^N x^2$ (c)

den Quadratsummen nach (**493**)

$S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots, S_n$, wobei $\sum_1^n S_i = S$ (d)

den Freiheitsgraden

$N_1 - 1, N_2 - 1, \ldots, N_i - 1, \ldots, N_n - 1$,
wobei $\sum_1^n N_i - 1 = N - n$
symbolisiert mit $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_i, \ldots, \nu_n$, wobei $\sum_1^n \nu_i = \nu$ (e)

den Mittelwerten $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_i, \ldots, \bar{x}_n$ nach (**491**) (f)

den Varianzen $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_i^2, \ldots, s_n^2$ nach (**492**) (g)

} (**620**)

17 A. Prüfung der Varianzen

Die Hypothese $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_i^2 = \cdots = \sigma_n^2 = \sigma^2$ wird mit dem Test nach BARTLETT[28] geprüft.

Die Schätzung der gemeinsamen Varianz σ^2 ist

$$s_\nu^2 = S/\nu \quad \text{wobei } \nu_s = N - n \qquad S, \nu \text{ und } N \text{ nach (620 d, e und a)} \qquad \text{(621)}$$

Die Prüfgröße für s^2 ist

$2{,}3026\,(\nu \log s^2 - \sum_1^n \nu_i \log s_i^2)/k$; s^2 nach (**621**), ν, ν_i und s_i^2 nach (**620** e und g) (a)

wobei

$k = 1 + \left(\sum_1^n \frac{1}{\nu_i} - \frac{1}{\nu}\right)/3\,(n-1)$; ν und ν_i nach (**620** e) (b)

} (**622**)

wenn $\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_i = \cdots = \nu_n = \nu_0$ werden (**622** a und b):

$2{,}3026\,\nu[\log s^2 - (1/n)\sum_1^n \log s_i^2]/k$; siehe (a) (c)

und

$k = 1 + (n+1)/3\,\nu$; siehe (b) (d)

} (**622**)

Signifikanzschranke für die Prüfgrößen (**622** a) und (**622** c) ist χ^2, $\nu = n - 1$, S. 36–39, $2\alpha = 1 \int_r$. *Erreicht* oder *übersteigt* die Prüfgröße die Signifikanzschranke, so befinden sich unter den verglichenen Stichproben solche mit unterschiedlichen Varianzen. Ist die Prüfgröße *kleiner* als die Schranke, so kann nach (**474**) angenommen werden, daß alle Stichprobenbevölkerungen die gleiche Varianz haben. In diesem Fall kann man die Mittelwerte nach 17 B weiteranalysieren.

17 B. Prüfung der Mittelwerte, einfache Varianzanalyse

Zur Prüfung der Hypothese $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_i = \cdots = \mu_n = \mu$ machen wir folgende Aufstellung [vgl. dazu (**620**)]:

Bezeichnung	Quadratsumme	Freiheitsgrad	Varianz
Varianz zwischen den Stichproben	S_2	$n-1$	$s_2^2 = S_2/(n-1)$
Varianz innerhalb der Stichproben	S_1	$N-n$	$s_1^2 = S_1/(N-n)$
Total	S_T	$N-1$	$s_T^2 = S/(N-1)$

} (**623**)

wobei $S_2 = \sum_1^n (\bar{x}_i - \bar{x}) = \sum_1^n \left(\sum_1^{N_i} x_i\right)^2/N_i - \left(\sum_1^N x\right)^2/N$ (a)

$S_1 = S$ [nach (**620** d)] $= S_T - S_2$ (b)

$S_T = S_1 + S_2 = \sum_1^N x^2 - \left(\sum_1^N x\right)^2/N$ (c)

und $\bar{x} = \left(\sum_1^N x\right)/N$ (d)

} (**624**)

Man benutze in (**624**) die 2 Identitäten in (a), (b) und (c) zur Kontrolle.

In (**623**) repräsentiert s_2^2 die Streuung der Stichprobenmittelwerte $\bar{x}_i$ um den gemeinsamen Mittelwert $\bar{x}$, s_1^2 die Streuung der Einzelwerte um die Stichprobenmittelwerte. Stammen alle Stichproben aus derselben Bevölkerung mit $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_i = \cdots = \mu_n = \mu$ (die Varianzen haben wir in diesem Sinn geprüft), so sollten die Varianzen s_2^2 und s_1^2 ungefähr gleich groß sein. Sind sie dies nicht, so befinden sich unter den Stichproben solche mit unterschiedlichen Mittelwerten, und zwar muß in diesem Falle $s_2^2 > s_1^2$ sein. Die Durchführung des entsprechenden F-Testes kann man sich somit ersparen, wenn $s_2^2 \leqq s_1^2$.

Der Prüfquotient ist s_2^2/s_1^2, Schranke F; S. 40 und 41; $2\alpha = P$ wobei $s_2^2 > s_1^2$ } (**625**)

Ist der Prüfquotient kleiner als die Signifikanzschranke, so darf nach (**474**) angenommen werden, alle Stichproben stammten aus derselben Bevölkerung. Schätzungen ihres Mittelwertes μ und Varianz σ^2 sind

$\bar{x} =$ (**624** d); $s_\nu^2 =$ (**621**) mit $\nu = N - n$ (**626**)

und Vertrauens- und Toleranzbereichen nach (**580**) bis (**584**).

Erreicht oder übersteigt der Prüfquotient die Signifikanzschranke F, so müssen sich unter den Mittelwerten solche unterschiedlicher Größe befinden. Es wurden verschiedene Methoden zur Untersuchung dieser Situation vorgeschlagen (vgl. [29]). Im folgenden verwenden wir jene von DUNCAN[29].

Voraussetzung ist, daß *alle Stichproben denselben Umfang* N_0 haben. Man berechnet zunächst die Standardabweichung eines Mittelwertes $\bar{x}_i$

$s_{\bar{x}_i} = \sqrt{s_\nu^2/N_0}$; s nach (**621**) (**627**)

$\nu_{s_{\bar{x}_i}} = N - n$

dann rangiert man die Mittelwerte $\bar{x}_i$

$\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_i < \cdots < \bar{x}_n$;
$1, 2, \ldots, i, \ldots, n =$ Ordnungszahlen O } (**628**)

und sucht in Tafel S. 50 die dem Freiheitsgrad $\nu_{s_{\bar{x}_i}}$ und den Ordnungszahlen $O = 2, 3, \ldots, n$ entsprechenden Extrembereiche W_i. Diese werden mit der Standardabweichung eines Mittelwertes $s_{\bar{x}_i}$ [vgl. (**627**)] multipliziert, und man erhält die Extrembereiche der Mittelwerte $W_{\bar{x}_i}$. Diese subtrahiert man von den Mittelwerten $\bar{x}_i$ und erhält die lokalisierten Extrembereiche $\bar{x}_i - W_{\bar{x}}$. Nun gilt:

Alle in einem lokalisierten Extrembereich $\bar{x}_i - W_{\bar{x}_i}$ befindlichen Mittelwerte lassen sich nicht signifikant voneinander unterscheiden. } **(629)**

Man unterstreicht in der Rangfolge **(628)** die nach **(629)** nicht unterscheidbaren Mittelwerte und erhält als Resultat:

Zwei Mittelwerte, die nicht durch eine gemeinsame Linie unterstrichen sind, unterscheiden sich signifikant voneinander (Signifikanzwahrscheinlichkeit α der Tafel). } **(630)**

Beispiel 39: Gegeben 7 Stichproben mit den unten angegebenen Mittelwerten $\bar{x}_i$. $N_0 = 5, N = 35$, $s_v = 0{,}099$, $\nu_s = 28$. Signifikanzwahrscheinlichkeit = 0,05.

Die Standardabweichung eines Mittelwertes ist nach **(627)** $s_{\bar{x}_i} = \sqrt{0{,}099/5} \approx 0{,}1407$. Die Extrembereiche W_i und $W_{\bar{x}_i} = W_i \times s_{\bar{x}_i}$ sind ebenfalls unten angeschrieben. Mit der Subtraktion $\bar{x}_i - W_{\bar{x}_i}$ hört man dann auf, wenn die entsprechende Unterstreichung den untersten Mittelwert erreicht oder überschreitet.

O	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{x}$	1,34	1,36	1,48	1,62	1,74	1,88	2,04
W_i		2,90	3,04	3,13	3,20	3,26	3,30
$W_{\bar{x}_i}$		0,408	0,428	0,440	0,450	0,569	0,464
$\bar{x}_i - W_{\bar{x}_i}$					1,290	1,421	1,576
(629)	1,34	1,36	1,48	1,62	1,74	1,88	2,04

Als Schlußresultat ergibt sich nach **(630)**: 2,04 > 1,34 bis 1,48; 1,88 > 1,34 bis 1,36.

18. Die normalverteilte Bevölkerung: Regression erster Art

Im folgenden beschränken wir uns auf *lineare* Regressionsfunktionen. Zur Transformierung nichtlinearer Funktionen in lineare vgl. logarithmische Normalverteilung, Probittransformation, Logittransformation.

Oft bestehen zwischen zwei oder mehr Veränderlichen funktionelle Beziehungen, die aber durch Zufallseinflüsse mehr oder weniger überdeckt werden. So verändert sich zum Beispiel mit wachsender Dosis die Dosiswirkung in bestimmter Richtung. Die Wirkung wird aber nie eine exakte Funktion der Dosierung sein. Sie wird vielmehr – selbst beim gleichen Probanden – um eine Kurve, die *Regressionsfunktion*, in zufälliger Art hin und her schwanken. Die statistischen Methoden bieten hier die Möglichkeit, die Parameter der Regressionsfunktion und die benötigten Varianzen zu schätzen.

Im obigen Beispiel ist die Dosierung *keine* zufällige Veränderliche, wohl aber die von ihr abhängige Dosiswirkung. Wir sprechen in einem solchen Falle von einer Regression *erster Art*. Als Regression *zweiter Art* bezeichnen wir jene Fälle, wo *beide* Veränderliche Zufallsvariable sind. Eine Regression zweiter Art läßt sich wie eine Regression erster Art behandeln, wenn die Variationsbreite und die Meßpunkte der als abhängig genommenen Veränderlichen zum voraus arbitrarisch festgelegt werden.

Bei der Regression erster Art gibt es nur *eine* Regressionsgerade, die Regression von y nach x, die für Berechnungen in beiden Richtungen, von y nach x und von x nach y, gebraucht wird. Vgl. dazu Abschnitt 19.

18 A. Schätzung der Parameter der Regressionsgeraden Y

Vgl. dazu **(298)** bis **(311)**.

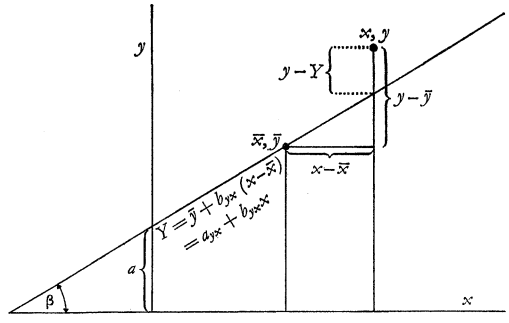


Abb. 35 Lineare Regression, ungruppierte Stichprobe.

Ungruppierte Stichproben, zwei Variablen

Gegeben n Beobachtungspaare x, y. x ist die *unabhängige, nichtzufällige* Veränderliche, y die *abhängige, zufällige* Variable.

Schätzung Y der Regressionsgeraden Y

$$\left.\begin{aligned} Y &= \bar{y} + b_{yx}(x - \bar{x}) && \text{(a)} \\ &= a_{yx} + b_{yx} x && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(631)}$$

wobei $a_{yx} = \bar{y} - b_{yx}\bar{x}$

und $\bar{y}$ und $\bar{x}$ nach **(491)**, b_{yx} nach **(632)**

Schätzung b_{yx} des Regressionskoeffizienten $\boldsymbol{b_{yx}}$

$$b_{yx} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{S_{xy}}{S_x} \qquad \textbf{(632)}$$

s_x^2 und S_x nach **(492)** und **(493)**. Für s_{xy} siehe **(633)**. Vgl. dazu **(299)**. b_{yx} ist der Tangens des Steigungswinkels β_{yx} der Regressionsgeraden Y.

Schätzung s_{xy} der Kovarianz σ_{xy}

$$s_{xy} = \frac{\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n - 1} = \frac{S_{xy}}{n - 1} \qquad \textbf{(633)}$$

Für S_{xy} siehe **(634)**.

Die Berechnung von S_{xy} wird durch folgende Identitäten erleichtert

$$\left.\begin{aligned} S_{xy} &= \Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y}) && \text{(a)} \\ &= \Sigma xy - \bar{x}\Sigma y && \text{(b)} \\ &= \Sigma xy - \bar{y}\Sigma x && \text{(c)} \\ &= \Sigma xy - \Sigma x \Sigma y/n && \text{(d)} \\ &[= s_{xy}(n - 1)] && \text{(e)} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(634)}$$

Schätzung $s_{y \cdot x}^2$ der Restvarianz $\sigma_{y \cdot x}^2$

$$\left.\begin{aligned} s_{y \cdot x}^2 &= \frac{\Sigma(Y - y)^2}{n - 2} = \frac{S_{y \cdot x}}{n - 2} && \text{(a)} \\ &= s_y^2(1 - r^2)\frac{n - 1}{n - 2} && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(635)}$$

Für $S_{y \cdot x}$ und r^2 vgl. Formeln **(636)** und **(704)**.

$\sigma_{y \cdot x}^2$ ist die Varianz von y, nachdem der Einfluß der Streuung von x ausgeschaltet worden ist. Sie ist in der Regel *kleiner* als die Varianz σ_y^2. In ganz seltenen Fällen (bei sehr kleinen Korrelations- oder Regressionskoeffizienten) kann sie auch größer sein, wenn nämlich

$$(1 - r^2)\frac{n - 1}{n - 2} > \frac{1}{n - 1}$$

Formel **(635** b) gehört eigentlich in den Abschnitt 19. Sie ist der Einfachheit halber hierher gesetzt worden.

Ist r bekannt, so können die Werte $1 - r^2$ der Tafel S. 59 entnommen werden, desgleichen ihre Quadratwurzel. Die Werte von $(n - 1)/(n - 2)$ und ihre Quadratwurzel für n zwischen 1 und 200 finden sich in der Tafel S. 60.

$$\left.\begin{aligned} S_{y \cdot x} &= S_y - b_{yx} S_{xy} && \text{(a)} \\ &= S_y - b_{yx}^2 S_x && \text{(b)} \\ &= S_y(1 - r^2) && \text{(c)} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(636)}$$

S_y und S_x nach **(493)**; S_{xy} nach **(634)**; b_{yx} nach **(632)**; r^2 nach **(704)**. Für **(636** c) vgl. Bemerkung zu **(635** b).

Schätzung $s_{b_{yx}}^2$ der Varianz $\sigma_{b_{yx}}^2$

$$\left.\begin{aligned} s_{b_{yx}}^2 &= s_{y \cdot x}^2 / S_x && \text{(a)} \\ &= s_y^2 / s_x^2 \times \frac{1 - r^2}{n - 2} = S_y / S_x \times \frac{1 - r^2}{n - 2} && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(637)}$$

s_y^2 und s_x^2 nach **(492)**; S_y und S_x nach **(493)**; $s_{y \cdot x}^2$ nach **(635)**; r^2 nach **(704)**; für **(637** b) vgl. Bemerkung zu **(635** b).

Schätzung $s^2_{Y|x}$ der Varianz $\sigma^2_{Y|x}$ der Regressionsgeraden Y im Abszissenpunkt x

$$\left.\begin{aligned} s^2_{Y|x} &= s^2_{y\cdot x}\,[1/n + (x-\bar{x})^2/S_x]; && \text{(a)}\\ &= s^2_{b_{yx}}\,[S_x/n + (x-\bar{x})^2] && \text{(b)}\end{aligned}\right\}\ \nu = n-2 \qquad \textbf{(638)}$$

S_x nach (**493**); $s^2_{y\cdot x}$ nach (**635**).

Spezialfälle von (**638**) sind:

Schätzung $s^2_{\bar{y}}$ der Varianz $\sigma^2_{\bar{y}}$

$$s^2_{\bar{y}} = s^2_{y\cdot x}/n;\quad \nu = n-2 \qquad \textbf{(639)}$$

Schätzung $s^2_{a_{yx}}$ der Varianz $\sigma^2_{a_{yx}}$

$$\left.\begin{aligned} s^2_{a_{yx}} &= s^2_{y\cdot x}\,[1/n + \bar{x}^2/S_x] && \text{(a)}\\ &= s^2_{b_{yx}}\sqrt{(\Sigma x^2)/n} && \text{(b)}\end{aligned}\right\}\ \nu = n-2 \qquad \textbf{(640)}$$

$s^2_{b_{yx}}$ nach (**637**)

Beispiel 40. Gegeben seien

x	y	x	y
5,8	2,19	7,8	5,85
6,2	3,27	8,2	6,58
6,6	3,79	8,6	7,41
7,0	4,62	9,0	8,29
7,4	5,32		

Die y-Werte dieses Beispiels entsprechen den empirischen Probits des Beispiels 31 zum Abschnitt 11 F.

Es ist $\bar{x} = 7{,}4$ nach (**491**)

$S_x = 9{,}6$ nach (**493**)

$\bar{y} = 47{,}32/9 = 5{,}25\dot{7}$ nach (**491**)

$S_y = 280{,}651 - 248{,}798 = 31{,}853$ nach (**493**)

$s^2_y = S_y/8 = 3{,}981\,625$; $s_y = 1{,}9954$ nach (**492** b)

$S_{xy} = 367{,}620 - 350{,}168 = 17{,}452$ nach (**634**)

$b_{yx} = 17{,}452/9{,}6 = 1{,}817\,91\dot{6}$ nach (**632**)

$S_{y\cdot x} = 31{,}8530 - 31{,}7263 = 0{,}1267$ nach (**636**)

$s^2_{y\cdot x} = 0{,}1267/7 = 0{,}0181$; $s_{y\cdot x} = 0{,}134\,54$ nach (**635**)

$s^2_{b_{yx}} = 0{,}0181/9{,}6 = 0{,}001\,885\,42$; $s_{b_{yx}} = 0{,}043\,421$ nach (**637**)

$s^2_{\bar{y}} = 0{,}0181/9 = 0{,}002\,0\dot{1}$; $s_{\bar{y}} = 0{,}044\,843$ nach (**639**)

$s^2_{a_{yx}} = 0{,}0181\left(0{,}\dot{1} + \dfrac{(7{,}4)^2}{9{,}6}\right) = 0{,}105\,257$; $s_{a_{yx}} = 0{,}324\,43$ nach (**640**)

$Y = 5{,}25\dot{7} + 1{,}817\,91\dot{6}\,(x - 7{,}4)$ nach (**631** a)

$= -8{,}1948 + 1{,}8179\,x$ nach (**631** b)

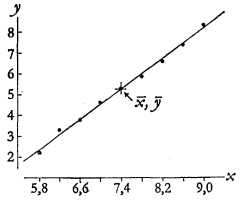


Abb. 36 Illustration zu obigem Beispiel.

Ein Vergleich zwischen Abbildung 30 und Abbildung 36 zeigt, daß die zwei auf grundsätzlich verschiedene Art gewonnenen Probitgeraden sich von bloßem Auge kaum unterscheiden lassen. Das Steigungsmaß der Geraden in Abbildung 30 beträgt 1/0,584 = 1,7123 und unterscheidet sich signifikant von 1,8179, wie wir später sehen werden.

Gruppierte Stichproben, zwei Variablen

Gegeben seien 1, 2, ..., i, ..., k Meßpunkte (Spalten) x_i mit $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_k$ Beobachtungen y_{ij}. x ist die *unabhängige, nichtzufällige*, y die *abhängige, zufällige* Variable.

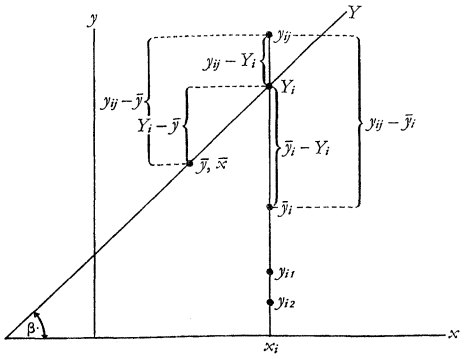


Abb. 37 Lineare Regression, gruppierte Stichprobe.

x	1	2	... i	... k
y	11	21	... $i1$	... $k1$
	12	22	... $i2$	... $k2$
	⋮	⋮	⋮	⋮
	$1j$	$2j$	ij	kj
	⋮	⋮	⋮	⋮
	$1m_1$	$2m_2$	im_i	km_k
	$\sum_{j=1}^{m_1} y_{1j}$	$\sum_{j=1}^{m_2} y_{2j}$	... $\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}$	... $\sum_{j=1}^{m_k} y_{kj}$

Gesamtsumme: Σy; Spaltensumme Σy_i (a) (b)

	$\frac{(\sum_{j=1}^{m_1} y_{1j})^2}{m_1}$	$\frac{(\sum_{j=1}^{m_2} y_{2j})^2}{m_2}$	... $\frac{(\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij})^2}{m_i}$	... $\frac{(\sum_{j=1}^{m_k} y_{kj})^2}{m_k}$

Gesamtsumme $\sum (\Sigma y_i)^2/m_i$ (c)

xy	$x_1\sum_{j=1}^{m_1} y_{1j}$	$x_2\sum_{j=1}^{m_2} y_{2j}$	... $x_i\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}$	... $x_k\sum_{j=1}^{m_k} y_{kj}$

Gesamtsumme Σxy (d)

x	1	2	... i	... k
y^2	$(11)^2$	$(21)^2$	... $(i1)^2$	... $(k1)^2$
	$(12)^2$	$(22)^2$	... $(i2)^2$	... $(k2)^2$
	⋮	⋮	⋮	⋮
	$(1j)^2$	$(2j)^2$	... $(ij)^2$	... $(kj)^2$
	⋮	⋮	⋮	⋮
	$(1m_1)^2$	$(2m_2)^2$	... $(im_i)^2$	... $(km_k)^2$
	$\sum_{j=1}^{m_1} y_{1j}^2$	$\sum_{j=1}^{m_2} y_{2j}^2$	... $\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}^2$	... $\sum_{j=1}^{m_k} y_{kj}^2$

Gesamtsumme: Σy^2; Spaltensumme Σy_i^2 (e) (f)

	m_1x_1	m_2x_2	... m_ix_i	... m_kx_k

Gesamtsumme: Σx (g)

x	$m_1x_1^2$	$m_2x_2^2$	... $m_ix_i^2$	... $m_kx_k^2$

Gesamtsumme: Σx^2 (h)

$n = m_1 + m_2 + \cdots + m_i + \cdots + m_k$ (i)

(641)

Daraus berechnet man die Spaltenmittelwerte

$\bar{y}_i = (\Sigma y_i)/m_i =$ (**641** b)$/m_i$ **(642)**

die Quadratsummen der Streuungen der Spalteneinzelwerte um die Spaltenmittelwerte

$$Sy_i = \Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i)^2/m_i = \textbf{(641 f)} - \textbf{(641 b)}^2/m_i \qquad \textbf{(643)}$$

den Gesamtmittelwert

$$\bar{y} = (\Sigma y)/n = \textbf{(641 a)}/\textbf{(641 i)} \qquad \textbf{(644)}$$

den Mittelwert der unabhängigen Variablen

$$\bar{x} = (\Sigma x)/n = \textbf{(641 g)}/\textbf{(641 i)} \qquad \textbf{(645)}$$

die Quadratsumme der Streuung von x um $\bar{x}$

$$S_x = \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n = \textbf{(641 h)} - \textbf{(641 g)}^2/\textbf{(641 i)} \qquad \textbf{(646)}$$

die Kovarianzsumme

$$S_{xy} = \Sigma xy - \Sigma x \Sigma y/n = \textbf{(641 d)} - \textbf{(641 g)}\,\textbf{(641 a)}/\textbf{(641 i)} \qquad \textbf{(647)}$$

den Regressionskoeffizienten

$$b_{xy} = S_{xy}/S_x = \textbf{(647)}/\textbf{(646)} \qquad \textbf{(648)}$$

die Quadratsumme der Streuung innerhalb der Spalten

$$S_1 = \sum_1^k Sy_i = \sum_1^k \textbf{(643)}$$
$$\left[= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2\right] \qquad \textbf{(649)}$$

die Quadratsumme der Streuung der Spaltenmittelwerte um die Regressionsgerade Y

$$S_2 = \Sigma (\Sigma y_i)^2 m_i - (\Sigma y)^2/n - S_3$$
$$= \textbf{(641 d)} - \textbf{(641 a)}^2/\textbf{(641 i)} - \textbf{(651)}$$
$$\left[= \sum_{i=1}^{k} m_i (\bar{y}_i - Y_i)\right] \qquad \textbf{(650)}$$

S_3 nach **(651)**

die Quadratsumme der Streuung der Regressionsgeraden um den Gesamtmittelwert

$$S_3 = b_{yx} S_{xy} = b_{yx}^2 S_x = \textbf{(648)}\,\textbf{(647)} = \textbf{(648)}^2\,\textbf{(646)}$$
$$\left[= \sum_{i=1}^{k} m_i (Y_i - \bar{y})^2\right] \qquad \textbf{(651)}$$

die Quadratsumme der Streuung der Einzelwerte um den Gesamtmittelwert

$$S_y = \Sigma y^2 - (\Sigma y)^2/n = \textbf{(641 e)} - \textbf{(641 a)}^2/\textbf{(641 i)}$$
$$\left[= \Sigma (y_{ij} - \bar{y})^2\right] \qquad \textbf{(652)}$$

Kontrolle:

$$S_1 + S_2 + S_3 = S_y \qquad \textbf{(653)}$$

und schließlich die Quadratsumme der Reststreuung

$$S_{y\cdot x} = S_1 + S_2 = S_y - S_3 = \textbf{(649)} + \textbf{(650)} = \textbf{(652)} - \textbf{(651)} \qquad \textbf{(654)}$$

und die Varianzen

$$s_1^2 = S_1/(n-k) = \textbf{(649)}/(n-k);\ \nu = n-k \qquad \textbf{(655)}$$

$$s_2^2 = S_2/(k-2) = \textbf{(650)}/(k-2);\ \nu = k-2 \qquad \textbf{(656)}$$

$$s_3^2 = S_3 = \textbf{(651)};\ \nu = 1 \qquad \textbf{(657)}$$

$$s_y^2 = S_y/(n-1) = \textbf{(652)}/(n-1);\ \nu = n-1 \qquad \textbf{(658)}$$

$$s_{y\cdot x}^2 = S_{y\cdot x}/(n-2) = \textbf{(654)}/(n-2);\ \nu = n-2 \qquad \textbf{(659)}$$

Die Gleichung der Regressionsgeraden Y, die Varianzen $s_{b_{yx}}^2$, $s_{Y|x}^2$, $s_{\bar{y}}^2$, $s_{a_{yx}}^2$ erhält man nach **(631)**, **(637)**, **(638)**, **(639)** und **(640)**, indem man für b_{yx} **(648)**, für $s_{y\cdot x}^2$ **(659)** und für S_x **(646)** einsetzt.

Beispiel 41. Gegeben ist die Stichprobe

x	7	8	9
y	1,0 1,4 2,0 2,2	2,0 2,5 2,8 3,1 3,7 4,0	2,9 3,2 3,4 3,9 4,4
$\bar{y}_i$	$6{,}6/4 = 1{,}65$	$18{,}1/6 = 3{,}01\dot{6}$	$17{,}8/5 = 3{,}56$ nach **(642)**
Sy_i	$11{,}8 - 10{,}89 = 0{,}91$	$57{,}39 - 54{,}601\dot{6} = 2{,}788\dot{3}$	$64{,}78 - 63{,}368 = 1{,}412$ nach **(643)**

n = 15 nach **(641 i)**

$\bar{y}$ = 42,5/15 = 2,8$\dot{3}$ nach **(644)**; $\bar{x} = (28 + 48 + 45)/15 = 8{,}0\dot{6}$ nach **(645)**

S_x = (196 + 384 + 405) − (28 + 48 + 45)²/15 = 8,9$\dot{3}$ nach **(646)**

S_{xy} = 46,2 + 144,8 + 160,2 − 8,06 × 42,5 = 8,3$\dot{6}$ nach **(647)**

b_{yx} = 8,3$\dot{6}$/8,9$\dot{3}$ = 0,936 567 164 nach **(648)**

S_1 = 0,91 + 2,788$\dot{3}$ + 1,412 = 5,110$\dot{3}$ nach **(649)**

S_2 = 6,6²/4 + 18,1²/6 + 17,8²/5 − 42,5²/15 − S_3 = 0,607 054 728 nach **(650)**

S_3 = 0,936 567 164 × 8,3$\dot{6}$ = 7,835 945 272 nach **(651)**

S_y = 133,97 − 42,5²/15 = 13,55$\dot{3}$ nach **(652)**

Kontrolle: 5,110$\dot{3}$ + 0,607 054 728 + 7,835 945 272 = 13,55$\dot{3}$ nach **(653)**

$S_{y\cdot x}$ = 5,110$\dot{3}$ + 0,607 055 = 5,717 388 nach **(654)**

$s_{y\cdot x}^2$ = 5,717 388/13 = 0,439 799; $s_{y\cdot x}$ = 0,663 173 nach **(659)**

$s_{b_{yx}}^2$ = 0,439 799/8,9$\dot{3}$ = 0,049 2312; $s_{b_{yx}}$ = 0,221 881 nach **(637 a)**

Y = 2,8$\dot{3}$ + 0,936 567 (x − 8,0$\dot{6}$) = − 4,721 64 + 0,936 567 x nach **(631)**

s_1^2 = S_1/12 = 0,425 861 nach **(655)**; $s_2^2 = S_2/1$ nach **(656)**; $s_3^2 = S_3$ nach **(657)**

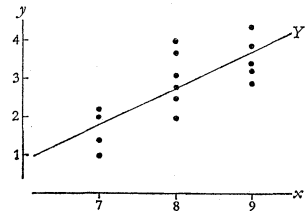


Abb. 38 Illustration zu obigem Beispiel.

18 B. Prüfung der Linearität der Regressionsfunktion

Bei *ungruppierten* Stichproben ist eine Prüfung der Linearität der Regressionsfunktion nur von bloßem Auge möglich. Die Abweichungen $Y_i - y_i$ sollten einen zufälligen Eindruck machen und keinen systematischen «Trend» zeigen. (Vgl. zum Beispiel Abb. 29 [systematische Abweichungen mit] Abb. 30, rechts [zufällig erscheinende Abweichungen]).

Bei *gruppierten* Stichproben ist ein exakter Test möglich: man vergleicht die Varianz der Spaltenmittelwerte um die Regressionsgerade mit der Varianz innerhalb der Spalten.

Prüfquotient:

$$s_2^2/s_1^2 = \textbf{(656)}/\textbf{(655)};\ \text{Signifikanzschranke } F\begin{cases}\nu_2 = k-2\\ \nu_1 = n-k\end{cases};\quad P = 2\,\alpha;\ \text{S. 40–41} \qquad \textbf{(660)}$$

(ν_1 der Tafel = ν_2 des Prüfquotienten)

Erreicht oder *übersteigt* der Prüfquotient die Signifikanzschranke, so ist die Regressionsfunktion nicht linear (Signifikanzwahrscheinlichkeit $2\,\alpha = P$). Ist der Prüfquotient *kleiner* als die Signifikanzschranke, so kann nach **(474)** angenommen werden, die Regression sei linear. Man extrapoliere diese Interpretation aber nie oder nur äußerst vorsichtig über den Stichprobenvariationsbereich von x hinaus!

Beispiel 42. Im Beispiel 41 ist $s_1^2 = 0{,}425\,861$ und $s_2^2 = 0{,}607\,055$. Der Prüfquotient nach **(660)** beträgt 1,43, die Signifikanzschranke $F(1;12)$ für $P = 0{,}05$ ist 4,75. Die statistische Prüfung spricht somit nicht gegen die Linearität der Regressionsfunktion.

18 C. Prüfung des Regressionskoeffizienten gegen Null

Spricht der Test nach **(660)** nicht gegen die Linearität der Regressionsfunktion, so erfolgt als nächster Test die Prüfung des Regressionskoeffizienten gegen Null, das heißt, man prüft die

Hypothese $b_{yx} \approx \boldsymbol{b}_{yx} = 0$. In andern Worten, man prüft, ob sich die Schätzung des Regressionskoeffizienten statistisch von Null unterscheidet.

Prüfgrößen:

$b_{yx}/s_{b_{yx}}$; Signifikanzschranke t; $2P = 2\alpha$; $\nu = n-2$, S. 32–35 (**661**)
b_{yx} nach (**632**) bzw. (**648**), $s_{b_{yx}} = \sqrt{(637\,a)}$

oder

$b^2_{yx}/s^2_{b_{yx}} = b\,S_{xy}/s^2_{y\cdot x}$; Signifikanzschranke t^2; (a)
$P = 2\alpha$, $\nu = n-2$, S. 32–35

oder

$b\,S_{xy} - t^2_{2\alpha}\,s^2_{y\cdot x}$; Signifikanzschranke Null; (b)
t^2 wie in (**662**a)

} (**662**)

$b\,S_{xy}$ nach (**632**) und (**634**) bei ungruppierten Stichproben, nach (**651**) bei gruppierten Stichproben. $s^2_{y\cdot x}$ nach (**635**) bzw. nach (**659**)

oder

wenn der Korrelationskoeffizient r berechnet wurde (vgl. Abschnitt 19 A), so gilt

wenn $r \approx \boldsymbol{r} = 0$, ist auch $\boldsymbol{b}_{yx}$ (und $\boldsymbol{b}_{xy}$) $= 0$ (**663**)

Signifikanzschranke für $|r|$ siehe S. 61, $\nu = n-2$.

Erreicht oder übersteigt eine der Prüfgrößen in (**661**) bis (**663**) die entsprechende Signifikanzschranke, so unterscheidet sich $\boldsymbol{b}_{yx}$ signifikant von Null. Obige Teste sind Spezialfälle von (**664** a) für $\boldsymbol{b}_{yx} = 0$.

18 D. Prüfung der Differenz zwischen Schätzung und hypothetischem Wert

Alle aufgeführten Differenzen sind *normalverteilt:* Als Signifikanzschranken nehme man somit für Freiheitsgrade über 200 die Abweichung $|c_\alpha|$ der Normalverteilung (S. 28), für Freiheitsgrade bis 200 die Abweichung $t_{P=\alpha}$ oder $t_{2P=2\alpha}$ der STUDENT-Verteilung [man kann selbstverständlich auch χ^2 oder t^2 verwenden, vgl. dazu (**598** b) und (**599** b)].

Prüfquotienten (Absolutwerte nehmen)

$(b_{yx} - \boldsymbol{b}_{yx})/s_{b_{yx}}$; $\nu = n-2$; $s_{b_{yx}} = \sqrt{(637)}$ (a)
$(Y|x - \boldsymbol{Y}|x)/s_{Y|x}$; $\nu = n-2$; $s_{Y|x} = \sqrt{(638)}$ (b)
$(\bar{y} - \mu_y)/s_{\bar{y}}$; $\nu = n-2$; $s_{\bar{y}} = \sqrt{(639)}$ (c)
$(a_{yx} - \boldsymbol{a}_{yx})/s_{a_{yx}}$; $\nu = n-2$; $s_{a_{yx}} = \sqrt{(640)}$ (d)

} (**664**)

Beispiel 43 zu (**664** a). Vergleich zwischen den Regressionskoeffizienten der Beispiele 31 und 40. Sie betragen 1,7123 (Beispiel 31) und 1,8179 (Beispiel 40). Der Regressionskoeffizient 1,7123 des Beispiels 31 wurde nicht nach (**632**) berechnet. Wir betrachten ihn deshalb bei diesem Vergleich als hypothetischen Wert. Der Prüfquotient beträgt

$$\frac{1{,}8179 - 1{,}7123}{0{,}043\,42} = 2{,}432;\ \nu = 7$$

Die entsprechende Signifikanzschranke $t_{2\alpha=0{,}05}$, S. 32, ist 2,3646. Die beiden Regressionskoeffizienten unterscheiden sich damit signifikant und damit auch die Regressionsgeraden.

18 E. Vertrauens- und Toleranzgrenzen

Es werden nur die Formeln zu den zweiseitigen Grenzen gegeben, und zwar in der Form Schätzung $\pm$ G, wobei Schätzung minus G die untere, Schätzung plus G die obere Grenze darstellt. Der entsprechende Parameter befindet sich zwischen diesen Grenzen.

Vertrauensgrenzen

Für $\boldsymbol{b}_{yx}$: $b_{yx} \pm t_{2\alpha}\,s_{b_{yx}}$ $\nu = n-2 \leqq 200$; $b_{yx} \pm |c_\alpha|\,s_{b_{yx}}$ $\nu = n-2 > 200$ } $s_{b_{yx}} = \sqrt{(637)}$ (**665**)

Für $\boldsymbol{Y}|x$:

$\bar{y} + b_{yx}(x - \bar{x}) \pm t_{2\alpha}\,s_{Y|x}$ $\nu = n-2 \leqq 200$; $\pm |c_\alpha|\,s_{Y|x}$ $\nu = n-2 > 200$ } $s_{Y|x} = \sqrt{(638)}$ (**666**)

Für μ_y: $\bar{y} \pm t_{2\alpha}\,s_{\bar{y}}$ $\nu = n-2 \leqq 200$; $\bar{y} \pm |c_\alpha|\,s_{\bar{y}}$ $\nu = n-2 > 200$ } $s_{\bar{y}} = \sqrt{(639)}$ (**667**)

Für $\boldsymbol{a}_{yx}$: $a_{yx} \pm t_{2\alpha}\,s_{a_{yx}}$ $\nu = n-2 \leqq 200$; $a_{yx} \pm |c_\alpha|\,s_{a_{yx}}$ $\nu = n-2 > 200$ } $s_{a_{yx}} = \sqrt{(640)}$ (**668**)

(**666**) ist eine Hyperbel (vgl. Abb. 39).

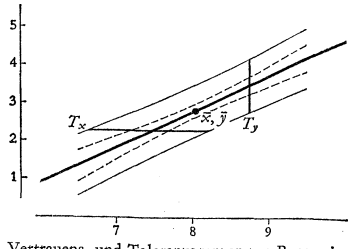


Abb. 39 Vertrauens- und Toleranzgrenzen zur Regression der Abb. 38. Legende: - - - Vertrauensgrenzen, — Toleranzgrenzen für $\boldsymbol{Y}$, T_y = Toleranzbereich für $Y|x$. T_x = Toleranzbereich für $x|y$.

Toleranzgrenzen für $\boldsymbol{Y}|x$

$= \bar{y} + b_{yx}(x - \bar{x}) \pm t_{2\alpha}\,s_T$; $\nu_t = n-2$;
b_{yx} nach (**632**) bzw. (**648**)

} (**669**)

wobei

$s_T = s_{y\cdot x}\sqrt{1 + 1/n + (x-\bar{x})^2/S_x}$; $\nu = n-2$ (a)
$= s_{b_{yx}}\sqrt{(1 + 1/n)\,S_x + (x-\bar{x})^2}$; $\nu = n-2$ (b)

} (**670**)

S_x nach (**493**) bzw. (**646**); $s_{y\cdot x} = \sqrt{(635)}$ bzw. $\sqrt{(659)}$;
$s_{b_{yx}} = \sqrt{(637\,a)}$; $\bar{x} =$ (**491**) bzw. (**645**)

18 F. Berechnung von x bei gegebenem y

$$x|y = \bar{x} + \frac{y - \bar{y}}{b_{yx}} \qquad (671)$$

Vertrauensgrenzen für $x|y$ [Lösung von (**666**) nach x]

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x} + \frac{y - \bar{y}}{b_{yx}(1 - k^2)} \pm \\ &\pm \frac{k}{b_{yx}(1-k^2)}\sqrt{(1/n)\,b^2_{yx}(1-k^2)\,S_x + (y-\bar{y})^2} \end{aligned}\right\} (672)$$

wobei b_{yx} und S_x nach (**632**) und (**493**) bei ungruppierten Stichproben, nach (**648**) und (**646**) bei gruppierten Stichproben und

$$k^2 = \frac{t^2_{2\alpha}\,s^2_{b_{yx}}}{b^2_{yx}};\ \nu_t = n-2 \qquad (673)$$

wobei $s^2_{b_{yx}} =$ (**637**).

Ist $k^2 \leqq 0{,}05$, so kann in (**672**) $1 - k^2 = 1$ gesetzt werden.

Toleranzgrenzen für $x|y$ [Lösung von (**669**) nach x]

Man verwende (**672**), nehme aber an Stelle von $(1/n)$ im 1. Summanden unter der Wurzel $(1 + 1/n)$. } (**674**)

Beispiel 44. Berechne zum Beispiel 40 $\bar{x}$ für $y = 5$ und die entsprechenden Vertrauens- und Toleranzgrenzen $x|y = 5$.

$$x = 7{,}4 + \frac{5 - 5{,}25\dot{7}}{1{,}817\,91\dot{6}} = 7{,}2582 \text{ nach (671)}$$

Vertrauensgrenzen. Zunächst berechne man k^2.

$$k^2 = \frac{2{,}3646^2 \times 0{,}001\,885\,42}{1{,}817\,91\dot{6}} = 0{,}003\,190;\ k = 0{,}056\,48 \text{ nach (673)}$$

k^2 ist kleiner als 0,05. $1-k^2$ könnte deshalb in (**672**) gleich 1 gesetzt werden. Vergleichsweise seien beide Varianten berechnet.

	Vertrauensgrenzen	Toleranzgrenzen
$1 - k^2 = 1$	$7{,}2582 \pm 0{,}0589$	$7{,}2582 \pm 0{,}5534$
	$= 7{,}1993$ bis $7{,}3171$	$= 6{,}7048$ bis $7{,}8116$
$1 - k^2 = 0{,}996\,810$	$7{,}2577 \pm 0{,}0590$	$7{,}2577 \pm 0{,}5545$
	$= 7{,}1987$ bis $7{,}3167$	$= 6{,}7032$ bis $7{,}8122$
	nach (**672**)	nach (**674**)

18 G. Vergleich zweier Regressionsgeraden erster Art

Gegeben seien die zwei ungruppierten bzw. gruppierten Stichproben

$(x,y)_1$ mit n_1	und $(x,y)_2$ und n_2	Beobachtungspaaren
$\bar{x}_1$	und $\bar{x}_2$	nach (**491**) bzw. (**645**)
$\bar{y}_1$	und $\bar{y}_2$	nach (**491**) bzw. (**644**)
S_{x_1}	und S_{x_2}	nach (**493**) bzw. (**646**)
S_{y_1}	und S_{y_2}	nach (**493**) bzw. (**652**)
$(S_{xy})_1$	und $(S_{xy})_2$	nach (**634**) bzw. (**647**)
$(S_{y\cdot x})_1$	und $(S_{y\cdot x})_2$	nach (**636**) bzw. (**654**)
$(s^2_{y\cdot x})_1$	und $(s^2_{y\cdot x})_2$	nach (**635**) bzw. (**659**)
$(b_{yx})_1 = b_1$	und $(b_{yx})_2 = b_2$	nach (**632**) bzw. (**648**)
Y_1	und Y_2	nach (**631**) bzw. (**631**)

Analog zu Abschnitt 16 sind folgende Hypothesen beim Vergleich zweier linearer Regressionen in Betracht zu ziehen:

$$(s^2_{y\cdot x})_1 = (s^2_{y\cdot x})_2 \left.\begin{array}{l} \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_1 \neq \boldsymbol{b}_2 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{Y}_2 & \text{(a)} \\ \boldsymbol{Y}_1 \neq \boldsymbol{Y}_2 & \text{(b)} \end{array} \left\{\begin{array}{l} \text{(a c)} \\ \text{(a d)} \end{array}\right\} \quad (675)$$

$$(s^2_{y\cdot x})_1 \neq (s^2_{y\cdot x})_2 \left.\begin{array}{l} \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_1 \neq \boldsymbol{b}_2 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{Y}_2 & \text{(a)} \\ \boldsymbol{Y}_1 \neq \boldsymbol{Y}_2 & \text{(b)} \end{array} \left\{\begin{array}{l} \text{(a c)} \\ \text{(a d)} \end{array}\right\} \quad (676)$$

Die Hypothese $(s^2_{y\cdot x})_1 = (s^2_{y\cdot x})^2$ testet man mit dem Prüfquotienten

$$\frac{(s^2_{y\cdot x})_1}{(s^2_{y\cdot x})_2}\text{; Signifikanzschranke } F,\ P = 2\alpha,\ \begin{array}{l}\nu_1 = n_1 - 2\\ \nu_2 = n_2 - 2\end{array}\text{; S. 40–41} \quad (677)$$

wobei die *größere* der Varianzen mit Index 1 zu bezeichnen ist.

Ist der Prüfquotient *kleiner* als die Signifikanzschranke, so gelten (**681**) bis (**693**); erreicht oder übersteigt er die Signifikanzschranke, so gelten (**694**) bis (**701**).

Ist der Prüfquotient *kleiner* als die Signifikanzschranke (**677**), so kann angenommen werden, daß $(s^2_{y\cdot x})_1 = (s^2_{y\cdot x})_2$. Man schätzt dann die gemeinsame Varianz $\bar{\sigma}^2_{y\cdot x}$ der beiden Regressionsgeraden unter der Bedingung (**675**) mit

$$\bar{s}^2_{y\cdot x} = \frac{(S_{y\cdot x})_1 + (S_{y\cdot x})_2}{n_1 + n_2 - 4}\ ;\ \nu = n_1 + n_2 - 4 \quad (678)$$

Danach prüft man die Hypothese (**675** a). Der Prüfquotient für die Differenz der beiden Regressionskoeffizienten unter der Bedingung (**675**) ist

$$\frac{b_1 - b_2}{s_{D_b}}\text{; Signifikanzschranke } t,\ 2P = 2\alpha,\ \nu_t = n_1 + n_2 - 4 \quad (679)$$

wobei

$$s^2_{D_b} = (678) \times \left(\frac{1}{S_{x_1}} + \frac{1}{S_{x_2}}\right) \quad (680)$$

Ist der Prüfquotient (**679**) *kleiner* als die Signifikanzschranke, so gelten (**681**) bis (**693**). *Erreicht* oder *übersteigt* er die Signifikanzschranke, so sind die Geraden nicht parallel.

Ist der Prüfquotient *kleiner* als die Signifikanzschranke, so können die zwei Regressionsgeraden als *parallel* betrachtet werden. (**681**)

Die Schätzung der gemeinsamen Restvarianz $\bar{\sigma}^2_{y\cdot x}$ ist bei erfüllter Bedingung (**675** a)

$$\bar{s}^2_{y\cdot x} \approx (678);\ \nu = n_1 + n_2 - 4$$
$$= \frac{(S_{y\cdot x})_1 + (S_{y\cdot x})_2 + \dfrac{(b_1 - b_2)^2}{1/S_{x_1} + 1/S_{x_2}}}{n_1 + n_2 - 3};\ \nu = n_1 + n_2 - 3 \quad (682)$$

und die Schätzung des gemeinsamen Regressionskoeffizienten $\boldsymbol{b}_{yx}$ bei erfüllter Bedingung (**675** a)

$$\bar{b}_{yx} = \frac{(S_{xy})_1 + (S_{xy})_2}{S_{x_1} + S_{x_2}} \quad (683)$$

und die Schätzung der Varianz $\sigma^2_{b_{yx}}$ des gemeinsamen Regressionskoeffizienten bei erfüllter Bedingung (**675** a)

$$\left.\begin{array}{ll} s^2_{\bar{b}_{yx}} \approx \dfrac{(678)}{S_{x_1} + S_{x_2}}\ ;\ \nu = n_1 + n_2 - 4 & \text{(a)} \\ = \dfrac{(682)}{S_{x_1} + S_{x_2}}\ ;\ \nu = n_1 + n_2 - 3 & \text{(b)} \end{array}\right\} \quad (684)$$

Die beiden Geraden können als *identisch* angesehen werden [Hypothese (**675** a c)], wenn der Prüfquotient

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\hat{b} - \bar{b}}{s_{\hat{b}-\bar{b}}},\ \nu = n_1 + n_2 - 4, \text{ wenn } s_{\hat{b}-\bar{b}} = \sqrt{(687\text{ a})} \\ \dfrac{\hat{b} - \bar{b}}{s_{\hat{b}-\bar{b}}},\ \nu = n_1 + n_2 - 3, \text{ wenn } s_{\hat{b}-\bar{b}} = \sqrt{(687\text{ b})} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \hat{b} = (686) \\ \bar{b} = (683) \end{array} \quad (685)$$

kleiner ist als die Signifikanzschranke t, $2P = 2\alpha$, S. 32–35.

$$\hat{b} = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \quad (686)$$

$$\left.\begin{array}{ll} s^2_{\hat{b}-\bar{b}} \approx (678) \times K & \text{(a)} \\ = (682) \times K & \text{(b)} \end{array}\right\} K = (688) \quad (687)$$

wobei

$$K = \frac{1}{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) + \frac{1}{S_{x_1} + S_{x_2}} \quad (688)$$

Die beiden parallelen Regressionsgeraden fallen nicht zusammen [Hypothese (**675** a d)], wenn der Prüfquotient (**685**) die Signifikanzschranke *erreicht* oder *übersteigt*. In diesem Falle sind oft der vertikale und der horizontale Abstand p_y und p_x von Interesse.

Der *vertikale Abstand* und seine Vertrauensgrenzen sind bei erfüllten Bedingungen (**675** a c)

$$p_y = |\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \bar{b}_{yx}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)|\ ;\ \bar{b}_{yx} = (683) \quad (689)$$

Vertrauensgrenzen für $\boldsymbol{p}_{Y|x}$

$$\left.\begin{array}{ll} \approx (689) \pm t_{2\alpha}\sqrt{(684\text{ a}) \times [(1/n_1 + 1/n_2)(S_{x_1} + S_{x_2}) + (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2]} & \text{(a)} \\ \text{wobei } \nu_t = n_1 + n_2 - 4 & \\ = (689) \pm t_{2\alpha}\sqrt{(684\text{ b}) \times [(1/n_1 + 1/n_2)(S_{x_1} + S_{x_2}) + (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2]} & \text{(b)} \\ \text{wobei } \nu_t = n_1 + n_2 - 3 & \end{array}\right\} \quad (690)$$

Der *horizontale Abstand* p_x und seine Vertrauensgrenzen sind bei erfüllten Bedingungen (**675** a d)

$$p_x = \left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\bar{b}_{yx}}\right|;\ \bar{b}_{yx} \text{ nach } (683) \quad (691)$$

Vertrauensgrenzen für $\boldsymbol{p}_x$

$$\left.\begin{array}{l} \approx \text{oder} = \left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \dfrac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\bar{b}_{yx}(1 - k^2)}\right| \pm \dfrac{k}{\bar{b}_{yx}(1 - k^2)} \times \\ \times \sqrt{\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)\bar{b}^2_{yx}\left(1 - k^2\right)\left(S_{x_1} + S_{x_2}\right) + \left(\bar{y}_1 - \bar{y}_2\right)^2} \end{array}\right\} \quad (692)$$

wobei $\bar{b}_{yx} = (683)$ und entweder $k = k_1 = (693\text{ a})$ oder $k = k_2 = (693\text{ b})$. Das Annäherndzeichen gilt für $k = k_1$, das Gleichheitszeichen für $k = k_2$.

$$\left.\begin{array}{l} k^2_1 \\ k^2_2 \end{array}\right\} = \frac{t^2_{2\alpha} s^2_{\bar{b}yx}}{(\bar{b}_{yx})^2} \left\{\begin{array}{ll} s^2_{\bar{b}yx} = \mathbf{684}\text{ a};\ \nu_t = n_1 + n_2 - 4 & \text{(a)} \\ s^2_{\bar{b}yx} = \mathbf{684}\text{ b};\ \nu_t = n_1 + n_2 - 3 & \text{(b)} \end{array}\right\} \quad (693)$$

Wenn $k \leqq 0{,}05$, kann in (**692**) der Ausdruck $1 - k^2 = 1$ gesetzt werden.

Erreicht oder *übersteigt* der Prüfquotient (**677**) die Signifikanzschranke, so gilt die Hypothese (**676**), das heißt $(\sigma^2_{y\cdot x})_1 \neq (\sigma^2_{y\cdot x})_2$. Die Hypothese (**676** a), das heißt $b_1 = b_2$, testet man dann mit dem Prüfquotienten (**679**), wobei

$$\left.\begin{array}{ll} s^2_{D_b} = \dfrac{(s^2_{y\cdot x})_1}{S_{x_1}} + \dfrac{(s^2_{y\cdot x})_2}{S_{x_2}} & \text{(a)} \\ \text{Freiheitsgrad} & \\ \nu_t = (617\text{ b}) & \\ \text{mit } k = \dfrac{(s^2_{y\cdot x})_1 S_{x_2}}{(s^2_{y\cdot x})_1 S_{x_2} + (s^2_{y\cdot x})_2 S_{x_1}} & \text{(b)} \end{array}\right\} \quad (694)$$

Signifikanzschranke: $t_{2\alpha}$, mit ν_t nach (**617** b) und k nach (**694** b)

Ist der (**694**) angepaßte Prüfquotient (**679**) *kleiner* als die Signifikanzschranke, so kann angenommen werden $b_1 = b_2$. Der gemeinsame Regressionskoeffizient und seine Varianz sind dann

$$\bar{b}_{yx} = \frac{\dfrac{(S_{xy})_1}{(s^2_{y\cdot x})_1} + \dfrac{(S_{xy})_2}{(s^2_{y\cdot x})_2}}{\dfrac{S_{x_1}}{(s^2_{y\cdot x})_1} + \dfrac{S_{x_2}}{(s^2_{y\cdot x})_2}} \quad (695)$$

mit Varianz

$$s^2_{\bar{b}_{yx}} = \frac{1}{\frac{S_{x_1}}{(s^2_{y\cdot x})_1} + \frac{S_{x_2}}{(s^2_{y\cdot x})_2}} \qquad (696)$$

Die Hypothese (**676** a c), das heißt die *Identität* der beiden parallelen Regressionsgeraden, kann – sofern die Stichprobenumfänge n_1 und n_2 *groß* sind – näherungsweise geprüft werden mit dem Prüfquotienten nach (**685**), wobei

$$\hat{b} = (686)$$

$$s^2_{\hat{b}-\bar{b}} = \frac{1}{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}\left[\frac{(s^2_{y\cdot x})_1}{n_1} + \frac{(s^2_{y\cdot x})_2}{n_2} + (696)\right] \qquad (697)$$

Signifikanzschranke $= |c_\alpha|$, S. 28.

Erreicht oder *übersteigt* der (**697**) angepaßte Prüfquotient (**685**) die Signifikanzschranke, so fallen die beiden parallelen Regressionsgeraden *nicht* zusammen, und es sind bei erfüllten Bedingungen (**676** a d)

der *vertikale* Abstand

$$p_y = (689);\ \text{wobei}\ \bar{b}_{yx} = (695) \qquad (698)$$

seine Vertrauensgrenzen

$$\approx (698) \pm |c_\alpha| \times \sqrt{\frac{(s^2_{y\cdot x})_1}{n_1} + \frac{(s^2_{y\cdot x})_2}{n_2} + (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 \times (696)} \qquad (699)$$

der *horizontale* Abstand

$$p_x = (691);\ \text{wobei}\ \bar{b}_{yx} = (695) \qquad (700)$$

seine Vertrauensgrenzen

$$\left.\begin{aligned} &\approx \left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\bar{b}_{yx}(1-k^2)}\right| \pm \frac{k}{\bar{b}_{yx}(1-k^2)} \times \\ &\times \sqrt{\left[\frac{(s^2_{y\cdot x})_1}{n_1} + \frac{(s^2_{y\cdot x})_2}{n_2}\right]\frac{(\bar{b}_{yx})^2(1-k^2)}{(696)} + (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (701)$$

wobei $k^2 = \frac{c^2_\alpha \times (696)}{(\bar{b}_{yx})^2}$; c_α, S. 28; $c^2_\alpha = \chi^2$, $\nu = 1$, $1 \int_r = 2\alpha$, S. 36

und $\bar{b}_{yx} = (695)$

Wenn $k \leqq 0{,}05$, kann in (**701**) der Ausdruck $1 - k^2 = 1$ gesetzt werden.

Nachtrag zu Abschnitt 18: Probit- und Logitregression

Viele der in Abschnitt 18 gegebenen Formeln lassen sich mit entsprechenden Änderungen für die Probit- und Logitregression benutzen. Wir können hier nicht näher darauf eintreten und verweisen auf die entsprechende Literatur:

Probitregression[12–15, 30], Tafeln S. 54 und 55

Logitregression[31, 32], Tafeln S. 56 und 57

19. Regression zweiter Art: Die zweidimensionale Normalverteilung

Vgl. Einführung zu Abschnitt 18.

Gegeben seien n Beobachtungspaare x, y. Sowohl x als auch y sind *zufällige*, normalverteilte Veränderliche.

Bei der Regression zweiter Art unterscheidet man im Gegensatz zur Regression erster Art *zwei* Regressiongeraden

$$\left.\begin{aligned} Y &= \bar{y} + b_{xy}(x - \bar{x}) && \text{(a)} \\ X &= \bar{x} + b_{yx}(y - \bar{y}) && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \qquad (702)$$

Während bei der Regression erster Art sowohl von x auf y als auch von y auf x auf Grund von (**702** a) = (**631**) geschlossen wird, schließt man bei der Regression zweiter Art von x auf y nach (**702** a), von y auf x auf Grund von (**702** b).

Die Schätzungen der Parameter von (**702**) und deren Varianzen erfolgt nach den entsprechenden Formeln des Abschnittes 18, in denen man, wenn Parameter von (**702** b) geschätzt werden sollen, x mit y und y mit x vertauscht.

19 A. Der Korrelationskoeffizient

Ein weiterer Parameter der Regression zweiter Art ist der Korrelationskoeffizient r. Er ist ein Maß für die stochastische Abhängigkeit der beiden Variabeln x und y. Sein Wert kann zwischen -1 und $+1$ variieren. Beträgt er -1 oder $+1$, so sind die beiden Veränderlichen (mathematisch!) total voneinander abhängig, und die beiden Regressionsgeraden Y und X fallen zusammen. Beträgt er Null, so sind die Veränderlichen (stochastisch!) voneinander unabhängig; die beiden Regressionsgeraden Y und X stehen senkrecht aufeinander und verlaufen parallel zu den Koordinatenachsen. Für «abhängig» und «unabhängig» gelten ähnliche Überlegungen wie in (**361**); eine reale Interpretation des Korrelationskoeffizienten ist deshalb oft schwierig oder unmöglich.

Wenn der Korrelationskoeffizient kleiner, gleich oder größer als Null ist, sind auch die beiden Regressionskoeffizienten b_{yx} und b_{xy} kleiner, gleich oder größer als Null. (**703**)

Für den Korrelationskoeffizienten gilt die Beziehung

$$\left.\begin{aligned} &\varrho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} && \text{(a)} \\ &\text{Für seine Schätzung} \\ &r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x S_y}};\ S_x \text{ und } S_y \text{ nach (493)}, \quad S_{xy} \text{ nach (634)} && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \qquad (704)$$

Das Quadrat des Korrelationskoeffizienten r^2 wird auch Bestimmtheitsmaß genannt.

Aus (**704**) läßt sich ableiten

$$r = \sqrt{\frac{s_{xy}}{s^2_x} \times \frac{s_{xy}}{s^2_y}} = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}} \qquad (705)$$

Nach (**115**) ist der Korrelationskoeffizient somit das *geometrische Mittel* der beiden Regressionskoeffizienten b_{yx} und b_{xy}.

Der Korrelationskoeffizient ist unter der Hypothese $r \approx \varrho = 0$ *normal verteilt*. Zur Prüfung dieser Hypothese gilt somit der Prüfquotient

$$\frac{|r|}{s_r};\ \text{Signifikanzschranke} \begin{cases} t_{2\alpha} \text{ für } n \text{ bis } 202 & \text{(a)} \\ |c_\alpha| \text{ für } n > 202 & \text{(b)} \end{cases} \qquad (706)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} s^2_r &= \frac{1-r^2}{n-2};\ \nu = n-2; && \text{für } n < 202 && \text{(a)} \\ &= \frac{1-r^2}{n-1}; && \text{für } n > 202 && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \qquad (707)$$

Für $\nu \leqq 200$ muß (**706**) nicht berechnet werden, da die Signifikanzschranken für r direkt aus der Tafel S. 61 abgelesen werden können. Sie entsprechen der mit (**706** a) identischen Formel

$$|r| = \frac{t}{\sqrt{\nu + t^2_{2\alpha}}};\quad \nu_t = n - 2 \qquad (708)$$

Sind die Prüfgrößen nach (**706**) oder (**708**) *kleiner* als die entsprechenden Signifikanzschranken, so kann angenommen werden, daß sich der Korrelationskoeffizient und damit nach (**703**) auch die beiden Regressionskoeffizienten b_{yx} und b_{xy} von Null *nicht* unterscheiden.

Erreichen oder *überschreiten* die Prüfgrößen nach (**706**) oder (**708**) die entsprechenden Signifikanzschranken, so *unterscheiden* sich der Korrelationskoeffizient und die zwei Regressionskoeffizienten signifikant von Null. In diesem Fall ist der Korrelationskoeffizient *nicht* normal verteilt. Seine Verteilung kann aber durch die z-Transformation nach R. A. Fisher normalisiert werden.

Es ist

$$\left.\begin{aligned} z &= \tanh^{-1} r = \tfrac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} && \text{(a)} \\ &\text{und} \\ r &= \tanh z = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \qquad (709)$$

Vgl. dazu S. 140, Abschnitt XIII. Tafeln zu (**709** a) finden sich auf S. 62, zu (**709** b) auf S. 64 und 65.

Die Varianz von z ist (2 Variable x, y)

$$\sigma^2_z = \frac{1}{n-3};\quad \text{vgl. dazu S. 62} \qquad (710)$$

Der Erwartungswert $\mathfrak{z}$ von z ist

$$\left.\begin{aligned} z &\approx \tanh^{-1} r^* && \text{(a)}\\ &= \frac{r^*}{2(n-1)} + \tanh^{-1} r^* && \text{(b)}\end{aligned}\right\} \quad (711)$$

(**711** b) kann in der Regel vernachlässigt werden (vgl. unten).

Aus (**709**) bis (**711**) ergeben sich:

Prüfung der Differenz zwischen Schätzung r und einem hypothetischen Korrelationskoeffizienten r^*

Prüfquotient

$$\frac{z - \zeta}{\sigma_z} = (z - \zeta)\sqrt{n-3};\ z \text{ und } \zeta \text{ nach (709 a) und (711 a)} \quad (712)$$

Signifikanzschranke $|c_\alpha|$, S. 28, oder $c_{2\alpha}$, S. 31, unten.

Ist der Prüfquotient (**712**) *kleiner* als die Signifikanzschranke, so kann angenommen werden, daß $r = r^*$.

Vertrauensgrenzen für r^*

$$\text{Prob}\left[\tanh\left(z - \frac{|c_\alpha|}{\sqrt{n-3}}\right) \leqq r^* \leqq \tanh\left(z + \frac{|c_\alpha|}{\sqrt{n-3}}\right)\right] = 1 - 2\alpha \quad (713)$$

Werte für $\frac{|c_\alpha|}{\sqrt{n-3}}$ für $1 - 2\alpha = 0{,}95$ und $0{,}99$ finden sich auf S. 63.

Vergleich zweier Korrelationskoeffizienten r_1 und r_2

Die Prüfung der Hypothese $r_1 = r_2$ auf Grund der Schätzungen r_1 und r_2 erfolgt mit dem Prüfquotienten

$$\frac{z_1 - z_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1+3} + \frac{1}{n_2+3}}};\ \text{Signifikanzschranke } |c_\alpha|, \text{ S. 28, oder } c_{2\alpha}, \text{ S. 31} \quad (714)$$

Ist der der Prüfquotient (**714**) *kleiner* als die Signifikanzschranke, so kann angenommen werden, daß $r_1 = r_2$. Die Schätzung des gemeinsamen Korrelationskoeffizienten ist dann

$$\bar{r} = \tanh \bar{z} = \tanh \frac{(n_1 - 3)z_1 + (n_2 - 3)z_2}{n_1 + n_2 - 6} \quad (715)$$

$$\text{und } \sigma_{\bar{z}}^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 6} \quad (716)$$

Die Vertrauensgrenzen für den gemeinsamen Korrelationskoeffizienten sind

$$\left.\begin{aligned} &\text{Prob}\,[\tanh(\bar{z} - |c_\alpha|\,\sigma_{\bar{z}}) \leqq \bar{r}^* \leqq \tanh(\bar{z} + |c_\alpha|\,\sigma_{\bar{z}})]\\ &= 1 - 2\alpha;\ \text{wobei } \sigma_{\bar{z}} = \sqrt{(716)}\end{aligned}\right\} \quad (717)$$

Vergleich mehrerer Korrelationskoeffizienten

Gegeben seien k Schätzungen $r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_k$ aus k zweidimensionalen Stichproben mit Stichprobenumfängen $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_k$.

Die Prüfung der Hypothese $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = r^*$, wobei r^* ein hypothetischer Wert ist, erfolgt mit der Prüfgröße

$$\sum_1^k (n_i - 3)(z_i - \zeta)^2;\ \text{Signifikanzschranke } \chi^2;\quad 1\int_r = 2\alpha;\ \nu_{\chi^2} = k;\ \text{S. 36–39} \quad (718)$$

z_i und ζ nach (**709** a) und (**711** a).

Ist der hypothetische Wert nicht bekannt, so ist seine Schätzung

$$\bar{z} = \frac{\sum_1^k (n_i - 3)\, z_i}{\sum_1^k (n_i - 3)} \quad (719)$$

mit Varianz

$$\sigma_{\bar{z}}^2 = \frac{1}{\sum_1^k (n_i - 3)} \quad (720)$$

Die Prüfung der Hypothese $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = \bar{r}^*$ erfolgt dann mit der Prüfgröße

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^k (n_i - 3)(z_i - \bar{z})^2;\ \text{Signifikanzschranke } \chi^2;\ 1\int_r = 2\alpha;\\ &\nu_{\chi^2} = k - 1;\ \text{S. 36–39}\end{aligned}\right\} \quad (721)$$

Ist die Prüfgröße (**721**) *kleiner* als die Signifikanzschranke, so kann angenommen werden, daß $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = \bar{r}^*$. Die Schätzung $\bar{r}$ des gemeinsamen Korrelationskoeffizienten $\bar{r}^*$ ist dann annähernd

$$\bar{r} \approx \tanh(\bar{z} - a \tanh \bar{z}) \quad (722)$$

wobei $\bar{z}$ *nach* (**719**) und

$$a = \frac{\sum_1^k \left(\frac{n_i - 3}{n_i - 1}\right)}{2\sum_1^k (n_i - 3)} \quad (723)$$

Die *Vertrauensgrenzen* für den gemeinsamen Korrelationskoeffizienten $\bar{r}^*$ sind dann annähernd

$$\left.\begin{aligned} &\text{Prob}\,[\tanh(\bar{z} - a\tanh\bar{z} - |c_\alpha|\,\sigma_{\bar{z}}) \leqq \bar{r}^* \leqq\\ &\leqq \tanh(\bar{z} - a\tanh\bar{z} + |c_\alpha|\,\sigma_{\bar{z}}) \approx 1 - 2\alpha\end{aligned}\right\} \quad (724)$$

$\bar{z}$ nach (**719**); a nach (**723**), $\sigma_{\bar{z}} = \sqrt{(720)}$ und $|c_\alpha|$ siehe S. 28.

Beispiele zu Abschnitt 19 A

Beispiel 45. Gegeben $r = 0{,}3223$, $n = 34$. Unterscheidet sich r von Null ($2\alpha = 0{,}05$)? Es ist $\nu = 32$, die entsprechende Schranke (S. 61) ist 0,3388. Die Hypothese $r = 0$ läßt sich somit nicht verwerfen.

Beispiel 46. Gegeben $r = 0{,}613$, $n = 42$. Gesucht 95%-Vertrauensgrenzen für r^*. Es ist

$z = 0{,}713\,71$ (S. 62)

$c_\alpha \sigma_z = 0{,}313\,58$ (S. 63)

$z \pm c_\alpha \sigma_z = 0{,}400$ bis $1{,}027$

daraus: Prob ($\underbrace{0{,}380}_{\text{S. 64}} \leqq r^* \leqq \underbrace{0{,}773}_{\text{S. 64}}$) $= 0{,}95$

Beispiel 47.

Gegeben sind		daraus erhält man		
r_i	n_i	z_i	$n_i - 3$	$n_i - 1$
0,555	12	0,625 58	9	11
0,590	20	0,677 67	17	19
0,670	15	0,810 74	12	14
0,621	9	0,726 63	6	8
0,733	26	0,935 18	23	25
0,800	13	1,098 61	10	12
		S. 62		

$\bar{z} = 63{,}734\,51/77 = 0{,}828$; nach (**719**); $\tanh \bar{z} = \underbrace{0{,}6793}_{\text{S. 64}}$

$\chi^2 = 1{,}815$; $\nu = 6 - 1 = 5$; nach (**721**)

Die 0,05-Signifikanzschranke für χ^2, $\nu = 5$ ist 11,07 (S. 36). Die Hypothese $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = \bar{r}^*$ läßt sich somit nicht verwerfen.

$a = 5{,}0734/144 = 0{,}0352$; nach (**723**)

$\bar{r} = \tanh(0{,}828 - 0{,}0352 \times 0{,}6794) = \tanh 0{,}804 = \underbrace{0{,}666}_{\text{S. 64}}$; nach (**722**)

$\sigma_{\bar{z}}^2 = 1/77 = 0{,}012\,987$; $\sigma_{\bar{z}} = 0{,}113\,96$; nach (**720**)

Für $2\alpha = 0{,}05$ ist $|c_\alpha| = 1{,}96$ (S. 28), folglich $|c_\alpha|\,\sigma_{\bar{z}} = 0{,}223$ und daraus 95%-Vertrauensgrenzen für $\bar{r}^*$

$\tanh \underbrace{(0{,}804 - 0{,}223)}_{\text{S. 64}} \leqq \bar{r}^* \leqq \tanh \underbrace{(0{,}804 + 0{,}223)}_{\text{S. 64}}$; nach (**724**)

$= 0{,}523 \qquad = 0{,}773$

19 B. Der SPEARMANsche Rang-Korrelationskoeffizient

(Der SPEARMANsche Korrelationskoeffizient wird hier behandelt, weil er sich zur Schätzung des im Abschnitt 19 A besprochenen Korrelationskoeffizienten r eignet.)

Entstammt die zweidimensionale Stichprobe x, y einer *beliebigen, stetigen* Verteilung, sind ihre Werte aber nicht gemessen, sondern *rangiert* worden [vgl. (**342**)], so läßt sich die Abhängigkeit von y und x durch den SPEARMANschen Korrelationskoeffizienten R beurteilen. Neben ihm besteht noch ein anderer Korrelationskoeffizient τ nach KENDALL[33], mit Vor- und Nachteilen, vgl. dazu [34].

Der SPEARMANsche Korrelationskoeffizient läßt sich für rangierte Stichproben aus beliebigen Verteilungen berechnen. Falls eine zweidimensionale Normalverteilung zugrunde liegt, entspricht

seine Interpretation jener des Korrelationskoeffizienten r, wie wir später sehen werden. Wie er bei anderen Verteilungen zu interpretieren ist, ist unklar.

Gegeben seien n Beobachtungspaare $(x, y)_i$. Die Paare werden zunächst getrennt und zwei Stichproben x_i und y_i gebildet. Dann werden die x- und y-Werte nach Größe geordnet (rangiert), so daß beispielsweise x_{i5} der fünftkleinste aller x-Werte darstellt, y_{i3} der drittkleinste aller y-Werte. Nun werden die ursprünglichen Beobachtungspaare wieder gebildet; man erhält zum Beispiel $(x_5, y_3)_i$. Die Rangnummern, wie vorhin 5 bzw. 3, symbolisieren wir wie früher mit O (Ordnungszahl). Nun bildet man aus den Rangnummern jedes Beobachtungspaares die Differenz und quadriert sie:

$$D_i^2 = (O_{x_i} - O_{y_i})^2 \qquad (725)$$

Beim Beobachtungspaar $(x_5, y_3)_i$ ist zum Beispiel $D_i^2 = (5-3)^2 = 4$.

Die Schätzung des SPEARMANschen Korrelationskoeffizienten $\boldsymbol{R}$ ist dann

$$R = 1 - \frac{6\sum_1^n D_i^2}{n^3 - n} \qquad (726)$$

Werte des Faktors $6/(n^3 - n)$ findet man auf S. 68.

(**726**) gilt nur dann exakt, wenn keine Bindungen [ties, vgl. (**346**)] vorkommen. Bei wenig Bindungen kann man (**726**) noch gut verwenden. Im Falle vieler Bindungen vgl. [33].

Die Prüfung von R gegen Null erfolgt mit den Signifikanzschranken S. 66 und 67. Man braucht dazu R noch nicht auszurechnen, sondern nur $\sum D^2$:

Erreicht oder *überschreitet* die Summe $\sum D^2$ die Signifikanzschranken nach außen, so unterscheidet sich R signifikant von Null. (a)

Befindet sich $\sum D^2$ *innerhalb* der Signifikanzschranken, so läßt sich R von Null nicht unterscheiden. (b)

(**727**)

Man wird somit nur im Fall (**727** b) die Berechnung von R weiterführen.

Die exakten Schranken wurden dem Buche von KENDALL[33] entnommen. Für größere n wurden die Schranken auf Grund der Normalverteilung aproximiert nach

Vertrauensgrenzen für $\sum \boldsymbol{D}^2$

$$\sim \sum D^2 \pm \frac{n^3 - n}{6}\left(1 - \frac{|c_\alpha|}{\sqrt{n-1}}\right) \qquad (a)$$

Vertrauensgrenzen für $|\boldsymbol{R}|$

$$\sim |R| \pm \frac{|c_\alpha|}{\sqrt{n-1}} \qquad (b)$$

(**728**)

wobei man nach [34] immer auf der sicheren Seite bleibt.

Stammen die rangierten Stichproben aus *normalverteilten* Grundbevölkerungen, so gilt nach K. PEARSON für die Parameter $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{r} = 2\sin\frac{\pi}{6}\boldsymbol{R} \qquad (729)$$

Für Schätzungen gilt (**729**) näherungsweise. Eine entsprechende Tafel zur Berechnung von r aus R findet sich auf S. 68.

Beispiel 48. Gegeben die Stichprobe des Beispieles 49. Diese Stichprobe hat 4 Bindungen bei x und 6 Bindungen bei y. Diese Bindungszahl dürfte bei einem Stichprobenumfang $n = 20$ noch angehen. Die Beobachtungspaare mit entsprechenden Ordnungszahlen O_x und O_y sind

x	O_x	y	O_y	D^2	x	O_x	y	O_y	D^2
2,6	1	2,3	1	0	6,0	11	5,7	8	9
3,0	2,5	2,7	3,5	1	6,5	12,5	6,0	12,5	0
3,0	2,5	3,5	5	6,25	6,5	12,5	6,0	19	42,25
3,5	4	3,5	3,5	0,25	7,0	14,5	6,5	12,5	4
3,8	5	4,0	6,5	2,25	7,0	14,5	7,0	15,5	1
4,2	6	4,5	2	16	7,5	16	7,0	17	1
4,5	7	4,5	9	4	8,0	18	7,7	14	16
4,7	8	5,2	10,5	6,25	8,0	18	8,0	15,5	6,25
5,5	9	5,5	6,5	6,25	8,0	18	8,0	19	1
5,7	10	5,7	10,5	0,25	10,0	20	8,0	19	1

$\sum D^2 = 124$. Diese Summe liegt noch weit außerhalb der 0,001-Schranken der Tafel S. 66. R unterscheidet sich somit von Null, und wir rechnen weiter nach (**726**). Der Faktor $6/(20^3 - 20)$ ist nach Tafel S. 68, oben, gleich $10^{-4} \times 7{,}518\,80$. Folglich ist $R = 1 - 10^{-4} \times 7{,}518\,80 \times 124 = 0{,}906\,767 \sim 0{,}907$. Unter der Annahme, die Stichprobe stamme aus einer normalverteilten Bevölkerung, ist nach (**729**) $r \sim 0{,}915$ (Tafel S. 68, unten). Die Schätzung r nach (**704**) beträgt 0,881.

19 C. Signifikanzteste

Signifikanzteste für Korrelationskoeffizienten siehe Abschnitt 19 A.

Vergleiche zwischen

Schätzung	und hypothetischem Wert	erfolgen nach
b_{yx}	0	(**706**) bis (**708**) auf Grund von (**703**)
b_{xy}	0	
b_{yx}	$\boldsymbol{b}_{yx}$	(**664** a)
b_{xy}	$\boldsymbol{b}_{xy}$	(**664** a)*
$Y\|x$	$\boldsymbol{Y}\|x$	(**664** b)
$X\|y$	$\boldsymbol{X}\|y$	(**664** b)*
$\bar{y}$	μ_y	(**664** c)
$\bar{x}$	μ_x	(**664** c)*
a_{yx}	$\boldsymbol{a}_{yx}$	(**664** d)
a_{xy}	$\boldsymbol{a}_{xy}$	(**664** d)*

(**730**)

* unter entsprechender Vertauschung von y und x

Wie man sieht, gelten bei der Regression zweiter Art die entsprechenden Formeln der Regression erster Art, sofern es sich um Vergleiche *einer* Schätzung mit einem *hypothetischen* Wert handelt. Wenn aber zwei Schätzungen aus zwei *verschiedenen* Stichproben, wie zum Beispiel bei $(b_{yx})_1 - (b_{yx})_2$, miteinander verglichen werden, gelten die entsprechenden Formeln der Regression erster Art nicht mehr, es sei denn bei *großen* n annäherungsweise.

Der Vergleich von μ_y mit μ_x, das heißt die Prüfung der Hypothese $\mu_y = \mu_x$, erfolgt mit dem Prüfquotienten

$$\frac{(\bar{y} - \bar{x})\sqrt{n}}{\sqrt{s_y^2 + s_x^2 - 2s_{xy}}}$$; Signifikanzschranke t; $2P = 2\alpha$; $\nu = n - 1$; S. 32–35 (**731**)

s_y^2 und s_x^2 nach (**492**), s_{xy} nach (**633**)

Der *gemeinsame* Vergleich von $\bar{y}$ mit μ_y *und* $\bar{x}$ mit μ_x, das heißt die Prüfung der Hypothese $\bar{y} = \mu_y \mid \bar{x} = \mu_x$, erfolgt mit der Prüfgröße

$$\frac{n(n-2)}{2(1-r^2)} \times \left[\frac{(\bar{x} - \mu_x)^2}{S_x} + \frac{(\bar{y} - \mu_y)^2}{S_y} - \frac{2S_{xy}(\bar{x} - \mu_x)(\bar{y} - \mu_y)}{S_x S_y}\right] \qquad (732)$$

Signifikanzschranke F; $P = 2\alpha$; $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = n - 2$; S. 40–41

S_x und S_y nach (**493**), S_{xy} nach (**634**), r nach (**704**). Rechnungswink:

$$r^2 = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} \times S_{xy}$$

Der Vergleich einer zweidimensionalen Stichprobe mit Mittelwerten $\bar{y}$ und $\bar{x}$ mit einem von ihr *unabhängigen* Beobachtungspaar x, y, das heißt die Prüfung der Hypothese $\bar{y} = y \mid \bar{x} = x$ (x, y = Beobachtungspaar, $\bar{x}, \bar{y}$ = Mittelwerte der Stichprobe), erfolgt mit der Prüfgröße

$$\frac{n(n-2)}{2(n+1)(1-r^2)} \times \left[\frac{(x - \bar{x})^2}{S_x} + \frac{(y - \bar{y})^2}{S_y} - \frac{2S_{xy}(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{S_x S_y}\right] \qquad (733)$$

Signifikanzschranke, Freiheitsgrade und alles andere wie in (**732**). (**733**) ist ein Spezialfall von (**734**) für $n_1 = 1$.

Der *gemeinsame* Vergleich der Mittelwerte *zweier* zweidimensionalen Stichproben $(x,y)_1$ und $(x,y)_2$, das heißt die Prüfung der Hypothese $\mu_{y_1} = \mu_{y_2} \mid \mu_{x_1} = \mu_{x_2}$, erfolgt, *wenn* $\sigma_{y_1}^2 = \sigma_{y_2}^2$, $\sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2$, $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$, mit der Prüfgröße

$$\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 3)}{2(n_1 + n_2)(1 - r^2)} \times \left\{\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}{S_{x_1} + S_{x_2}} + \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2}{S_{y_1} + S_{y_2}} - \frac{2[(S_{xy})_1 + (S_{xy})_2](\bar{x}_1 - \bar{x}_2)(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)}{(S_{x_1} + S_{x_2})(S_{y_1} + S_{y_2})}\right\} \qquad (734)$$

wobei

$$r^2 = \frac{[(S_{xy})_1 + (S_{xy})_2]^2}{(S_{x_1} + S_{x_2})(S_{y_1} + S_{y_2})}, \text{ vgl. dazu Rechnungswink von (732)} \quad \text{(735)}$$

Signifikanzschranke F; $P = 2\alpha$; $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = n_1 + n_2 - 3$; S. 40 und 41. Alles andere wie in (**732**).

Als Vorprüfungen zu (**734**) eignen sich näherungsweise:

Prüfung der Hypothesen $\sigma^2_{x_1} = \sigma^2_{x_2}$ und $\sigma^2_{y_1} = \sigma^2_{y_2}$ nach (**605**)
Prüfung der Hypothese $r_1 = r_2$ nach (**714**).

Die soeben genannten Prüfungen sind bei zweidimensionalen Verteilungen mit $|r| > 0$ nicht exakt, weil die betreffenden Parameter stochastisch *nicht* unabhängig sind. Für exakte Prüfung siehe [35].

19 D. Vertrauens- und Toleranzgrenzen

Die *Vertrauensgrenzen* für μ_y und μ_x *gemeinsam* sind

entweder für $\mu_y \mid \mu_x$

$$= \bar{y} + b_{yx}(x - \bar{x}) \pm s_{b_{yx}} \sqrt{2\,FS_x/n - (n-2)(\bar{x} - \mu_x)^2} \quad \text{(a)}$$

oder für $\mu_x \mid \mu_y$

$$= \bar{x} + b_{xy}(y - \bar{y}) \pm s_{b_{xy}} \sqrt{2\,FS_y/n - (n-2)(\bar{y} - \mu_y)^2} \quad \text{(b)} \qquad \text{(736)}$$

Freiheitsgrade für F: $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = n - 2$; $s_{b_{yx}}$ nach (**637**), $s_{b_{xy}}$ ebenfalls, aber unter Vertauschung von x und y.

(**736** a) und (**736** b) sind Lösungen nach y bzw. nach x von (**732**). Es sind identische *Ellipsen* (vgl. später).

Die *Toleranzgrenzen* für y und x gemeinsam sind

entweder für $\boldsymbol{Y} \mid x$

$$= \bar{y} + b_{yx}(x - \bar{x}) \pm \pm s_{b_{yx}} \sqrt{2\,(n+1)\,FS_x/n - (n-2)(x - \bar{x})^2} \quad \text{(a)}$$

oder für $\boldsymbol{X} \mid y$

$$= \bar{x} + b_{xy}(y - \bar{y}) \pm \pm s_{b_{xy}} \sqrt{2\,(n+1)\,FS_y/n - (n-2)(y - \bar{y})^2} \quad \text{(b)} \qquad \text{(737)}$$

Freiheitsgrade für F und alles andere siehe (**736**).

(**737** a) und (**737** b) sind Lösungen nach y bzw. x von (**733**). Es sind identische *Ellipsen*.

Die *Steigungsmaße* der Hauptachsen der Ellipsen (**736**) und (**737**), die sogenannten *orthogonalen* Regressionskoeffizienten, sind

$$b_o, -\frac{1}{b_o} = \frac{S_y - S_x}{2\,S_{xy}} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{S_y - S_x}{2\,S_{xy}}\right)^2} \qquad \text{(738)}$$

Die Längen der *Halbachsen* der Ellipsen (**736**) und (**737**) sind

$$l_1, l_2 = \sqrt{k}\,\sqrt{S_x + S_y \pm \sqrt{(S_x + S_y)^2 - 4\,(S_x S_y - S^2_{xy})}} \qquad \text{(739)}$$

wobei

$$k = \frac{F}{n(n-2)} \text{ für Vertrauensellipse (736)}; \quad k = \frac{F(n+1)}{n(n-2)} \text{ für Toleranzellipse (737)}$$

Freiheitsgrade für F: (a) $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = n - 2$; (b) $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = n - 2$ — (**740**)

Konstruktion der Ellipsen

Schnellkonstruktion: Man berechne (**738**) und (**739**) und konstruiere nach (**315**).

Exakt: Nach (**736**) bzw. (**737**) (a) und/oder (b) sowie (**738**) und (**739**) je nach erforderlicher Genauigkeit.

Die Gleichungen der zu den Koordinaten parallelen Tangenten an die Vertrauens- bzw. Toleranzellipse sind

horizontale Tangenten: $y = \bar{y} \pm \sqrt{k S_y}$
Abszissen der Berührungspunkte: $x = \bar{x} \pm b_{xy}\sqrt{k S_y}$ (a)

vertikale Tangenten: $x = \bar{x} \pm \sqrt{k S_x}$
Ordinaten der Berührungspunkte: $y = \bar{y} \pm b_{yx}\sqrt{k S_x}$ (b) — (**741**)

wobei

$$k \begin{cases} = 2\,F/n(n-2) \text{ für Vertrauensellipse (736)} & \text{(a)} \\ = 2\,F(n+1)/n(n-2) \text{ für Toleranzellipse (737)} & \text{(b)} \end{cases} \qquad \text{(742)}$$

Freiheitsgrade von F: $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = n - 2$.

Die Seitenlängen des durch diese Tangenten gebildeten, der Ellipse umschriebenen Rechtecks sind

Länge der horizontalen Seiten
$l_h = 2\sqrt{k S_x}$ (a)

Länge der vertikalen Seiten
$l_v = 2\sqrt{k S_y}$ (b) — (**743**)

wobei $k =$ (**742**)

Beispiel 49. Gegeben die zweidimensionale Stichprobe

x	y	x	y	x	y	x	y
2,6	2,3	4,2	2,7	6,0	5,2	7,5	7,7
3,0	3,5	4,5	5,5	6,5	6,0	8,0	6,5
3,0	4,0	4,7	5,7	6,5	8,0	8,0	7,0
3,5	3,5	5,5	4,5	7,0	6,0	8,0	8,0
3,8	4,5	5,7	5,7	7,0	7,0	10,0	8,0

a) Man schätze die Parameter.

b) Man gebe die Formeln der Regressionsgeraden Y und X, der orthogonalen Regressionsgeraden Y_0 und X_0, der Toleranzellipse für $\boldsymbol{Y} \mid x$ bzw. $\boldsymbol{X} \mid y$, der horizontalen und vertikalen Tangenten an letztere und berechne die Seitenlängen des durch diese Tangenten gebildeten Rechtecks sowie die Länge der Halbachsen der Ellipse.

c) Man gebe vergleichsweise die Formeln der Toleranzgrenzen, berechnet nach den Formeln der Regression 1. Art.

d) Man vergleiche die Toleranzgrenzen für $\boldsymbol{Y} \mid \bar{x}$ und $\boldsymbol{X} \mid \bar{y}$ der Regression 2. und 1. Art.

e) Man vergleiche $\bar{x}$ und $\bar{y}$.

Ist eine Signifikanzwahrscheinlichkeit erforderlich, so ist $2\alpha = 0{,}05$.

a) Parameter

$\bar{x} = 115{,}0/20 = 5{,}75$ | $\bar{y} = 111{,}3/20 = 5{,}565$
$S_x = 740{,}92 - 5{,}75 \times 115 = 79{,}67$ | $S_y = 679{,}39 - 5{,}565 \times 111{,}3 = 60{,}0055$
$s^2_x = 79{,}67/19 = 4{,}193\,158$ | $s^2_y = 60{,}0055$
$s_x = 2{,}047\,72$ | $s_y = 1{,}777\,13$

$S_{xy} = 700{,}90 - 5{,}75 \times 111{,}3 = 60{,}925$ nach (**634**)
$s_{xy} = 60{,}925/19 = 3{,}206\,579$
$r^2 = 60{,}925^2/79{,}67 \times 60{,}0055 = 0{,}776\,435\,170 =$ (**704** b)^2
$1 - r^2 = 0{,}223\,564\,830$
$r = 0{,}881\,155$
$b_{yx} = 60{,}925/79{,}67 = 0{,}764\,7170$ nach (**632**)
$b_{xy} = 60{,}925/60{,}0055 = 1{,}015\,3236$ nach (**632**)*
$b_0, -1/b_0 = (60{,}0055 - 79{,}67)/2 \times 60{,}925 \pm \sqrt{1 + (-0{,}161\,382\,848)^2} = 0{,}851\,56$ und $-1{,}174\,32$ nach (**738**)
$S_{y \cdot x} = 60{,}0055 \times 0{,}223\,564\,83 = 13{,}415\,1194$ nach (**636** c)
$s^2_{y \cdot x} = 13{,}415\,1194/18 = 0{,}745\,284\,411$ nach (**635** a)
$s^2_{b_{yx}} = 0{,}745\,284\,411/79{,}67 = 0{,}009\,354\,643$ nach (**637** a)
$s_{b_{yx}} = 0{,}096\,7224$
$S_{x \cdot y} = 79{,}67 \times 0{,}223\,564\,83 = 17{,}811\,4100$ nach (**636** c)*
$s^2_{y \cdot x} = 17{,}811\,4100/18 = 0{,}989\,522\,777$ nach (**635** a)*
$s^2_{b_{xy}} = 0{,}989\,522\,777/60{,}0055 = 0{,}016\,490\,53$ nach (**637** a)*
$s_{b_{xy}} = 0{,}128\,416$

b) Formeln

Regressionsgerade
$Y = 5{,}565 + 0{,}7647\,(x - 5{,}75) = 1{,}1679 + 0{,}7647\,x$ nach (**702** a)
$X = 5{,}75 + 1{,}0153\,(y - 5{,}565) = 0{,}0997 + 1{,}0153\,y$ nach (**702** b)
$Y_0 = 5{,}565 + 0{,}8516\,(x - 5{,}75) = 0{,}6686 + 0{,}8516\,x$
$X_0 = 5{,}75 - 1{,}1743\,(y - 5{,}565) = 12{,}1001 - 1{,}1743\,y$

Toleranzellipse

Toleranzgrenzen für $\boldsymbol{Y} \mid x$

$= 5{,}565 + 0{,}7647\,(x - 5{,}75) \pm 0{,}096\,72 \times$
$\times \sqrt{593{,}94 - 18\,(x - 5{,}75)^2}$ nach (**737**a)

Toleranzgrenzen für $\boldsymbol{X} \mid y$

$= 5{,}75 + 1{,}0153\,(y - 5{,}565) \pm 0{,}128\,42 \times$
$\times \sqrt{447{,}34 - 18\,(y - 5{,}565)^2}$ nach (**737**b)

Horizontale Tangenten y und Abszissen der Berührungspunkte

$y = 5{,}565 \pm 4{,}99 = 0{,}58$ und $10{,}55$
$x = 5{,}75 \pm 5{,}06 = 0{,}69$ und $10{,}81$ } nach (**741**a) und (**742**b)

Vertikale Tangenten x und Ordinaten der Berührungspunkte

$x = 5{,}75 \pm 5{,}74 = 0{,}01$ und $11{,}49$
$y = 5{,}565 \pm 4{,}39 = 1{,}18$ und $9{,}96$ } nach (**741**b) und (**742**b)

Seitenlängen des umschriebenen Rechtecks

horizontale Seiten $l_h = 11{,}48$
vertikale Seiten $l_v = 9{,}98$ } nach (**743**) und (**742**b)

Länge der Halbachsen der Ellipse [$F_{0,05}\,(2; 18) = 3{,}55$; S. 40]

$= \sqrt{\frac{3{,}55 \times 21}{20 \times 18}} \times$

$\times \sqrt{79{,}67 + 60{,}0055 \pm \sqrt{139{,}6755^2 - 4\,(4780{,}6382 - 60{,}925)^2}}$
$= 7{,}38$ und $1{,}83$ nach (**739**) und (**740**b)

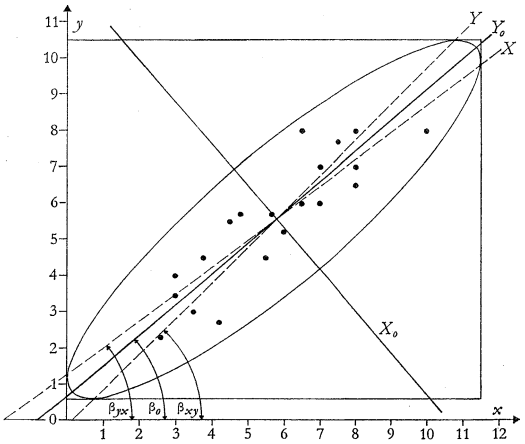


Abb. 40 Illustration zu Beispiel 49.

c) Toleranzgrenzen, berechnet nach den Formeln der Regression 1. Art ($t_{2\alpha=0{,}05,\ \nu=18} = 2{,}1009$, S. 32)

für $\boldsymbol{Y} \mid x$

$= 5{,}565 + 0{,}7647\,(x - 5{,}75) \pm 0{,}2032 \times$
$\times \sqrt{83{,}6535 + (x - 5{,}75)^2}$ nach (**669**)

für $\boldsymbol{X} \mid y$

$= 5{,}75 + 1{,}4070\,(y - 5{,}565) \pm 0{,}3739 \times$
$\times \sqrt{45{,}4659 + (y - 5{,}565)^2}$ nach (**674**)

d) Toleranzgrenzen für $\boldsymbol{Y} \mid \bar{x}$ und $\boldsymbol{X} \mid \bar{y}$, berechnet nach den Formeln der

	Regression 2. Art	Regression 1. Art
$Y \mid \bar{x}$	$5{,}565 \pm 2{,}3572$ nach (**737**a)	$5{,}565 \pm 1{,}8585$ nach (**669**)
$X \mid \bar{y}$	$5{,}75 \pm 2{,}7161$ nach (**737**b)	$5{,}75 \pm 2{,}5213$ nach (**674**)

e) Vergleich von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ ($t_{2\alpha=0{,}05,\ \nu=19} \sim 2{,}09$)

$$\frac{5{,}575 - 5{,}565}{\sqrt{4{,}1932 + 3{,}1582 - 2 \times 3{,}2066}} = 0{,}191 \quad \text{nach (731)}$$

Die Prüfgröße ist kleiner als die Signifikanzschranke, die Hypothese $\bar{x} = \bar{y}$ läßt sich somit nicht verwerfen.

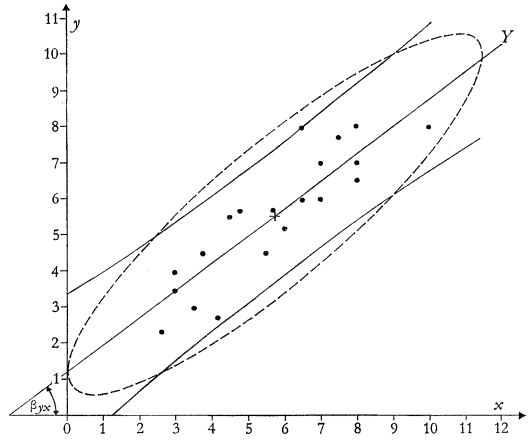


Abb. 41 Regressionsgerade y nach x. Toleranzgrenzen, berechnet nach den Formeln der Regression 1. Art (Hyperbel) und 2. Art (Ellipse).

20. Die Binomialverteilung

(Vgl. dazu Abschnitt 5)

20 A. Allgemeines

E und Nicht-E seien zwei *komplementäre* Ereignisse [vgl. (**334**) und (**335**)] mit den Wahrscheinlichkeiten $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q} = 1 - \boldsymbol{p}$ [vgl. (**339**)]. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei N *unabhängigen* Versuchen [vgl. (**328**), Beispiel 10, und (**357**)] exakt $x = 0, 1, 2, \ldots, N$ mal das Ereignis E eintrifft, ist

$$\left.\begin{aligned} f(x) = \dot{\boldsymbol{P}}_x = \binom{N}{x} \boldsymbol{p}^x\, \boldsymbol{q}^{N-x} = \underbrace{\binom{N}{0} \boldsymbol{p}^0\, \boldsymbol{q}^N}_{= \boldsymbol{q}^N}; \\ \binom{N}{1} \boldsymbol{p}^1\, \boldsymbol{q}^{N-1}; \ldots \underbrace{\binom{N}{N} \boldsymbol{p}^N\, \boldsymbol{q}^0}_{= \boldsymbol{p}^N} \end{aligned}\right\} \quad (744)$$

wobei: $0 \leqq \boldsymbol{p} \leqq 1$ und $\boldsymbol{q} = 1 - \boldsymbol{p}$

Nach (**113**) entsprechen die Einzelwahrscheinlichkeiten $\dot{\boldsymbol{P}}_x$ von (**744**) den Gliedern der binomischen Reihenentwicklung von $(q + p)^N$. Über den Binomialkoeffizienten $\binom{N}{x}$ vgl. (**100**) bis (**106**).

Aus (**744**) ergeben sich die Rekursionsformeln

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{P}}_{x+1} &= \dot{\boldsymbol{P}}_x \times \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}} \times \frac{N - x}{x + 1} && \text{(a)} \\ \dot{\boldsymbol{P}}_{x-1} &= \dot{\boldsymbol{P}}_x \times \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{p}} \times \frac{x}{N - x + 1} && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \quad (745)$$

Beispiel 50. Man berechne alle Einzelwahrscheinlichkeiten $\dot{\boldsymbol{P}}_x$ für $\boldsymbol{p} = 0{,}3$ und $N = 7$.

Wir berechnen nach (**745**a) von $x = 0$ ausgehend. Es ist $\boldsymbol{p}/\boldsymbol{q} = 3/7$.

$$\dot{\boldsymbol{P}}_0 = \left(\frac{7}{10}\right)^7 = 0{,}0823543$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}_1 = \dot{\boldsymbol{P}}_0 \times \frac{3}{7} \times \frac{7}{1} = \dot{\boldsymbol{P}}_0 \times \frac{21}{7} = 0{,}2470629$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}_2 = \dot{\boldsymbol{P}}_1 \times \frac{3}{7} \times \frac{6}{2} = \dot{\boldsymbol{P}}_1 \times \frac{18}{14} = 0{,}3176523$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}_3 = \dot{\boldsymbol{P}}_2 \times \frac{3}{7} \times \frac{5}{3} = \dot{\boldsymbol{P}}_2 \times \frac{15}{21} = 0{,}2268945$$

Betrachtet man die Folge 21/7, 18/14, 15/21, so entdeckt man sofort die Gesetzmäßigkeit, nach der sich Zähler und Nenner der Rekursionsfaktoren verkleinern bzw. vergrößern. Die Faktoren zur Errechnung von $\dot{\boldsymbol{P}}_4, \dot{\boldsymbol{P}}_5, \ldots$ schreiben wir deshalb ohne weitere Rechnung an mit 12/28, 9/35, 6/42 und 3/49 und erhalten

$\dot{\boldsymbol{P}}_4 = 0{,}0972405$
$\dot{\boldsymbol{P}}_5 = 0{,}0250047$
$\dot{\boldsymbol{P}}_6 = 0{,}0035721$
$\dot{\boldsymbol{P}}_7 = 0{,}0002187$

Kontrolle: $\sum_1^N \dot{\boldsymbol{P}}_x = 1$

Auf andere Weise erhält man die Einzelwahrscheinlichkeiten für $N = 1, 2, \ldots, 99, 100$ und $\boldsymbol{p} = 0{,}01, 0{,}02, \ldots, 0{,}49, 0{,}50$ aus den Tafeln S. 70–77 (Logarithmen der Binomialkoeffizienten) und S. 78–84 (Logarithmen der Potenzen von $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$).

Beispiel 51. Man berechne $\dot{\boldsymbol{P}}_1$ für $\boldsymbol{p} = 0{,}3$ und $N = 7$.

$$\log \binom{7}{1} = 0{,}84510 \qquad \text{(S. 70)}$$

$$\log \boldsymbol{p}^1 = 0{,}47712 - 1 \qquad \text{(S. 82)}$$

$$\log \boldsymbol{q}^6 = 0{,}07059 - 1 \qquad \text{(S. 82)}$$

$$\log \dot{\boldsymbol{P}}_1 = 1{,}39281 - 2 = 0{,}3928 - 1$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}_1 = 0{,}2471 \qquad \text{(S. 11)}$$

Für Binomialkoeffizienten für $N > 100$ vgl. Abschnitt VII/3, S. 136. Für die Berechnung entsprechender Potenzen von $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$ verwende man Logarithmentafeln mit 7 oder mehr Stellen*.

Die Binomialverteilung ist eine *diskrete* Verteilung. Sie ist *symmetrisch*, wenn $\boldsymbol{p} = 0{,}5$, *linksschräg*, wenn $\boldsymbol{p} < 0{,}5$, *rechtsschräg*, wenn $\boldsymbol{p} > 0{,}5$.

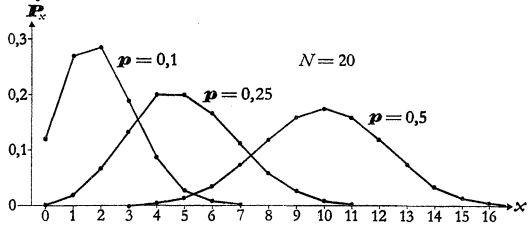


Abb. 42 Binomialverteilung, $N = 20$; $\boldsymbol{p} = 0{,}1$, 0,25 und 0,5.

20 B. Parameter der Binomialverteilung

Wie (**744**) zeigt, ist die Binomialverteilung vollständig durch die Wahrscheinlichkeit $\boldsymbol{p}$ und die Anzahl der Versuche N charakterisiert. Wir symbolisieren sie deshalb mit Binomialverteilung $(\boldsymbol{p}; N)$.

Mittelwert μ_x und Varianz σ_x^2 der Binomialverteilung $(\boldsymbol{p}; N)$ sind

$$\mu_x \equiv N\boldsymbol{p} = \text{Erwartungswert von (749)} \qquad (746)$$

$$\sigma_x^2 = N\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}\mu_x = \text{Erwartungswert von (750)} \qquad (747)$$

Die Varianz der Binomialverteilung ist bei gegebenem Stichprobenumfang N (N Versuche) am größten, wenn $\boldsymbol{p} = 0{,}5$, am kleinsten, wenn $\boldsymbol{p} = 0$ oder $\boldsymbol{q} = 0$.

Die beste Schätzung von $\boldsymbol{p}$ aus Stichproben des Umfanges N, in denen das E-Ereignis x-mal eingetreten ist, ist

$$p = x/N \qquad (748)$$

Damit erhält man aus (**746**) und (**747**)

Schätzung von μ_x

$$\bar{x} = Np = x \qquad (749)$$

Schätzung von σ_x^2

$$s_x^2 = Npq = \frac{x(N-x)}{N} \qquad (750)$$

Mittelwert und Varianz der *relativen* Häufigkeit x/N sind

$$\mu_{x/N} = \boldsymbol{p} = \text{Erwartungswert von (748)} \qquad (751)$$

$$\sigma_{x/N}^2 = \frac{\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{q}}{N} = \text{Erwartungswert von (753)} \qquad (752)$$

Die entsprechenden Schätzungen

für den Mittelwert = (**748**)

für die Varianz: $s_p^2 = \dfrac{pq}{N} = \dfrac{x(N-x)}{N^3} = \dfrac{1}{N^2} s_x^2$ (**753**)

Beispiel 52. In 64 Versuchen ist das Ereignis x 6mal eingetroffen. Schätze $\boldsymbol{p}$, σ_x^2 und $\sigma_{x/N}^2$.

$p = 6/64 = 0{,}09375$ nach (**748**)

$s_x^2 = 0{,}09375 \times 58 = 5{,}4375$ nach (**750**)

$s_p^2 = 5{,}4375/64^2 = 0{,}001327515$ nach (**753**)

* Tafeln für $f(x)$ und die kumulierte Verteilung $\sum_0^x f(x)$ für $N = 2, 3, \ldots, 49$ und $\boldsymbol{p} = 0{,}01, 0{,}02, \ldots, 0{,}5$ siehe [3,4].

20 C. Kumulierte Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung

Die Errechnung kumulierter Wahrscheinlichkeiten diskreter Verteilungen wurde in Abschnitt 5 eingehend behandelt. Hier seien noch einige Hinweise im Hinblick auf praktische Anwendungen gegeben.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E sei $\boldsymbol{p}$, die des Ereignisses Nicht-E sei $\boldsymbol{q}$. Die Definition von $\dot{\boldsymbol{P}}_x$ ist (**744**).

Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis E

- exakt $x = k$-mal eintrifft, gleich (**370**) (a)
- exakt $x = k$-mal *nicht* eintrifft, gleich (**371**) (b)
- *höchstens oder weniger* als $x = k$-mal eintrifft, gleich (**372**) (c)
- *wenigstens oder mehr* als $x = k$-mal eintrifft, gleich (**373**) (d)
- wenigstens $x = k$-mal, *aber höchstens* $x = s$-mal $(k < s)$ eintrifft, gleich (**374**) (e)
- *weniger* als $x = k$-mal *oder mehr* als $x = s$-mal eintrifft $(k < s)$, gleich (**375**) (f)

(**754**)

Beispiele zur Errechnung solcher Wahrscheinlichkeiten sind in Abschnitt 5 gegeben. Zusätzlich sei folgendes Beispiel behandelt.

Beispiel 53. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E der Bevölkerung sei $\boldsymbol{p}$. Wie groß muß der Umfang N einer Stichprobe sein, damit das Ereignis E mit einer Wahrscheinlich $\mathfrak{p}^*$ *wenigstens einmal* eintrifft?

Nach (**754** d) gilt hier (**373**), das heißt,

$$\text{Prob}\,(x \geqq k) = \sum_1^N \dot{\boldsymbol{P}}_x \qquad \text{(nach 373 b)}$$

$$= 1 - \dot{\boldsymbol{P}}_0 \qquad \text{(nach 373 a)}$$

$\dot{\boldsymbol{P}}_0$ ist nach (**744**) $= \boldsymbol{q}^N$. Wir erhalten daraus

$$\mathfrak{p}^* = 1 - \boldsymbol{q}^N$$

$$\text{das heißt } N = \frac{\log(1-\mathfrak{p}^*)}{\log \boldsymbol{q}} = \frac{\log(1-\mathfrak{p}^*)}{\log(1-\boldsymbol{p})} \qquad (755)$$

Anwendung. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine Sechs zu werfen, sei 1/6. Wieviel Würfe sind nötig, um mit einer Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{p}^* \geqq 0{,}99$ wenigstens einmal eine Sechs zu werfen?

Nach (**755**) ist

$$N = \frac{\log(1-0{,}99)}{\log(1-1/6)} = \frac{\log 0{,}01}{\log 5/6} \sim \frac{-2}{-0{,}0792} \sim 25{,}25$$

Man muß somit 26 Würfe machen, um mit einer Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{p}^* \geqq 0{,}99$ mindestens einmal eine Sechs zu werfen (bei 25 Würfen wäre $\mathfrak{p}^*$ ein wenig kleiner als 0,99).

20 D. Binomial- und Normalverteilung

Abbildung 42 zeigt, daß die Binomialverteilung mit $\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}$ schon bei *relativ kleinerem* Stichprobenumfang der Normalverteilung sehr ähnlich ist. Bei extremeren $\boldsymbol{p}$ (vgl. $\boldsymbol{p} = 0{,}1$) gilt dies noch nicht. Andererseits zeigt aber Abbildung 43, daß sich mit wachsendem Stichprobenumfang die Binomialverteilung auch bei extremeren $\boldsymbol{p}$ der Normalverteilung nähert:

Mit wachsendem Stichprobenumfang N strebt die Binomialverteilung $(\boldsymbol{p}, N)$ gegen die Normalverteilung $(N\boldsymbol{p}, \sqrt{N\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{q}})$, und zwar um so rascher, je näher $\boldsymbol{p}$ bei 0,5 liegt:

$$\binom{N}{x} \boldsymbol{p}^x \boldsymbol{q}^{N-x} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi N\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{q}}}\, e^{-\frac{(x-N\boldsymbol{p})^2}{2N\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{q}}} \qquad (756)$$

wenn $N \to \infty$

Aus (**756**) ergibt sich für große Stichprobenumfänge N gemäß den Definitionen

$$\text{Prob}\,(x \leqq x_{\mathfrak{p}}) = \sum_0^{x_{\mathfrak{p}}} \dot{\boldsymbol{P}}_x = \mathfrak{p}$$

$$\text{Prob}\,(c \leqq c_{\mathfrak{p}}) = \int_{-\infty}^{c_{\mathfrak{p}}} \text{der Standard-Normalverteilung}$$

daß

$$\text{Prob}\,(x \leqq x_{\mathfrak{p}}) \sim \text{Prob}\,(c \leqq c_{\mathfrak{p}}) \qquad (757)$$

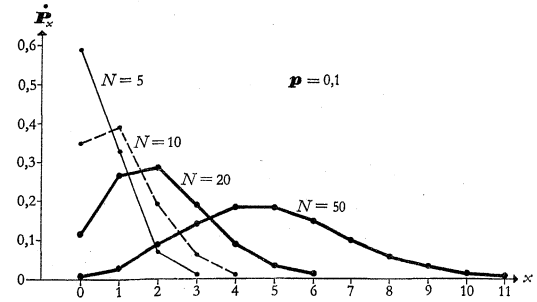


Abb. 43 Binomialverteilung, $p = 0{,}1$. $N = 5$; 10; 20; 50.

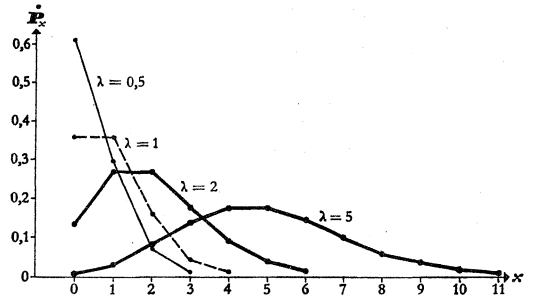


Abb. 44 POISSON-Verteilung. $\lambda = 0{,}5$; 1; 2; 5.

wenn

$$c_{\mathfrak{p}} = \frac{x - Np}{\sqrt{Npq}}; \text{ (} c \text{ siehe S. 28, rechts)} \qquad \textbf{(758)}$$

oder

$$x_{\mathfrak{p}} = Np + c_{\mathfrak{p}}\sqrt{Npq}; \text{ (} c \text{ siehe S. 28, links)} \qquad \textbf{(759)}$$

Für kleinere Stichprobenumfänge werden die Transformationen (**757**) und (**758**) verbessert durch die sogenannte Kontinuitätskorrektur, indem man $x + \frac{1}{2}$ an Stelle von x einsetzt. Es sind dann

$$c_{\mathfrak{p}} = \frac{x + \frac{1}{2} - Np}{\sqrt{Npq}} \quad (c \text{ siehe S. 28, rechts}) \qquad \textbf{(760)}$$

$$x_{\mathfrak{p}} = Np - \tfrac{1}{2} + c_{\mathfrak{p}}\sqrt{Npq}\,; \text{ (} c \text{ siehe S. 28, links)} \qquad \textbf{(761)}$$

Gemäß den Definitionen

$$\text{Prob}\,(x \geqq x_{\mathfrak{p}^*}) = 1 - \text{Prob}\,(x \leqq x_{\mathfrak{p}^*} - 1) = \mathfrak{p}^*$$

$$\text{Prob}\,(c \leqq c_{1-\mathfrak{p}^*}) = \int_{-\infty}^{c_{1-\mathfrak{p}^*}} = 1 - \mathfrak{p}^*$$

erhält man aus (**760**) und (**761**)

$$c_{1-\mathfrak{p}^*} = \frac{x - \frac{1}{2} - Np}{\sqrt{Npq}}; \text{ (} c \text{ siehe S. 28, rechts)} \qquad \textbf{(762)}$$

$$x_{\mathfrak{p}^*} = Np + \tfrac{1}{2} + c_{1-\mathfrak{p}^*}\sqrt{Npq}\,; \text{ (} c \text{ siehe S. 28, links)} \qquad \textbf{(763)}$$

Beispiel 54. Gegeben die Binomialverteilung ($p = 0{,}1$; $N = 40$). Berechne die Wahrscheinlichkeiten Prob $(x \leqq 3) = \mathfrak{p}$ und Prob $(x \geqq 6) = \mathfrak{p}^*$. Es ist

$$c_{\mathfrak{p}} = \frac{3{,}5 - 4}{\sqrt{3{,}6}} = -0{,}264 \text{ [nach (760)]}$$

$$\mathfrak{p} = 0{,}396 \text{ (aus Tafel S. 28, rechts, linear interpoliert)}$$

$$c_{1-\mathfrak{p}^*} = \frac{5{,}5 - 4}{\sqrt{3{,}6}} = 0{,}791 \text{ [nach (761)]}$$

$$1 - \mathfrak{p}^* = 0{,}786 \text{ (wie vorhin)}$$

$$\mathfrak{p}^* = 0{,}214$$

Die exakten Werte, auf 3 Stellen gerundet, sind 0,423 und 0,206.

Beispiel 55. Berechne für die Binomialverteilung des Beispiels 54 $x_{\mathfrak{p}}$ für $\mathfrak{p} = 0{,}1$ und $x_{\mathfrak{p}^*}$ für $\mathfrak{p}^* = 0{,}05$. Es sind

$$\left.\begin{aligned} c_{\mathfrak{p}} &= -1{,}2816 \\ c_{1-\mathfrak{p}^*} &= 1{,}6449 \end{aligned}\right\} \text{ S. 28, links}$$

folglich

$$x_{\mathfrak{p}} = 3{,}5 - 1{,}2816\sqrt{3{,}6} = 1{,}07 \text{ [nach (761)]}$$

$$x_{\mathfrak{p}^*} = 4{,}5 + 1{,}6449\sqrt{3{,}6} = 7{,}62 \text{ [nach (763)]}$$

Da x nur ganzzahlig sein kann, erhalten wir als Resultate $x_{\mathfrak{p}} = 1$ und $x_{\mathfrak{p}^*} = 8$, die den exakten Werten entsprechen.

Eine weitere, durchschnittlich etwas bessere Approximation[36] ist

$$c_{\mathfrak{p}} = 2\left(\sqrt{(x+1)q} - \sqrt{(N-x)p}\right) \qquad \textbf{(764)}$$

$$x_{\mathfrak{p}} = p\left(N + 1 - \frac{c^2}{4}\right) + \frac{c^2}{4}q - 1 + c\sqrt{pq\left(N + 1 - \frac{c^2}{4}\right)} \qquad \textbf{(765)}$$

wobei in (**765**) $c = c_{\mathfrak{p}}$

$$c_{1-\mathfrak{p}^*} = 2\left(\sqrt{xq} - \sqrt{(N-x+1)p}\right) \qquad \textbf{(766)}$$

$$x_{\mathfrak{p}^*} = p\left(N + 1 - \frac{c^2}{4}\right) + \frac{c^2}{4}q + c\sqrt{pq\left(N + 1 - \frac{c^2}{4}\right)} \qquad \textbf{(767)}$$

wobei in (**767**) $c = c_{1-\mathfrak{p}^*}$

Die Bedeutung der Symbole in (**764**) bis (**767**) ist dieselbe wie in (**760**) bis (**763**).

Beispiel 56. Berechne die Beispiele 54 und 55 nach (**764**) bis (**767**). Man erhält

$$c_{\mathfrak{p}} = 2\left(\sqrt{4 \times 0{,}9} - \sqrt{36 \times 0{,}1}\right) = 0$$

$$\mathfrak{p} = 0{,}5$$

$$c_{1-\mathfrak{p}^*} = 2\left(\sqrt{6 \times 0{,}9} - \sqrt{37 \times 0{,}1}\right) = 0{,}801$$

$$\mathfrak{p}^* = 0{,}212$$

$$x_{\mathfrak{p}} = 0{,}979$$

$$x_{\mathfrak{p}^*} = 7{,}77$$

20 E. Binomialverteilung und POISSON-Verteilung

Abbildung 43 zeigt, daß die Binomialverteilung bei kleinem p der POISSON-Verteilung sehr ähnlich ist. Als Faustregel merke man sich

$$\left.\begin{aligned} &\binom{N}{x} p^x q^{N-x} \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \text{ wobei } \lambda = Np \\ &\text{wenn} \\ &\frac{Npq}{Np} \approx 1 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(768)}$$

20 F. Vertrauensgrenzen und Signifikanzschranken

a) *Vertrauensgrenzen für* p, Tafeln S. 85–103 (oder Signifikanzschranken für $p = x/N$, vgl. dazu Beispiel 17, S. 157)

In N Versuchen ist das E-Ereignis $x = k$-mal eingetroffen. Die Vertrauensgrenzen p_l und p_r, die der Gleichung

$$\text{Prob}\,(p_l < p < p_r \mid x = k, N) = 1 - 2\alpha$$

genügen, sind nach CLOPPER und PEARSON[37] die Lösungen von

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{x=k}^{N}\binom{N}{x} p_l^x (1-p_l)^{N-x} = \alpha \quad \text{nach } p_l \qquad \text{(a)} \\ &\text{und} \\ &\sum_{0}^{x=k}\binom{N}{x} p_r^x (1-p_r)^{N-x} = \alpha \quad \text{nach } p_r \qquad \text{(b)} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(769)}$$

Für $x = 0$ und $x = N$ sind nur *einseitige* $1-\alpha$-Grenzen möglich. Diese sind

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } x = 0 \\ &0 \text{ und } p_r = 1 - \text{antilog}\left(\frac{\log\alpha}{N}\right) \qquad \text{(a)} \\ &\text{für } x = N \\ &p_l = \text{antilog}\left(\frac{\log\alpha}{N}\right) \text{ und } N \qquad \text{(b)} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(770)}$$

Die in unseren Tafeln S. 85–103 angegebenen Vertrauensgrenzen für p entsprechen deshalb für $x = 0$ und $x = N$ nicht $1 - 2\alpha$-, sondern $1-\alpha$-Grenzen.

Eine Lösung von (**769**) für $0 < x < N$ ist exakt nur auf iterativem Wege möglich. Unsere Tafeln auf S. 85–98 wurden elektronisch in dieser Weise berechnet.

Approximative Lösungen sind

$$p_l, p_r = \frac{x \mp \frac{1}{2} + \frac{c^2}{2} \mp |c| \sqrt{(x \mp \frac{1}{2})\left(1 - \frac{x \mp \frac{1}{2}}{N}\right) + \frac{c^2}{4}}}{N + c^2} \quad (771)$$

wobei $c = c_\alpha$, S. 28, links,

oder

$$p_l, p_r = (A - B) \mp \sqrt{B[2 - (A - B) - A]}$$

wobei

$$Ap_l, p_r = \frac{x + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} + \frac{c^2}{4}}{N + 1}$$

$$Bp_l, p_r = \frac{c^2}{2}\left(\frac{x + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}}{(N+1)^2}\right) \quad (772)$$

$c = c_\alpha$, S. 28, links.

Bei größeren Stichprobenumfängen kann in (**771**) $\mp \frac{1}{2}$ weggelassen werden. (**771**) ist die Lösung von (**760**) und (**762**) nach p, (**772**) die Lösung von (**764**) und (**766**). Nach (**772**) wurden die Tafeln S. 99–103 berechnet (für $x > 4$). In der Praxis wird man (**771**) und (**772**) nur selten benötigen, da der Umfang unserer Tafeln für die meisten Fälle genügt.

In Abbildung 45 sind die Vertrauensbereiche von p für alle möglichen x für Stichprobenumfänge $N = 30$ und $N = 10$ dargestellt.

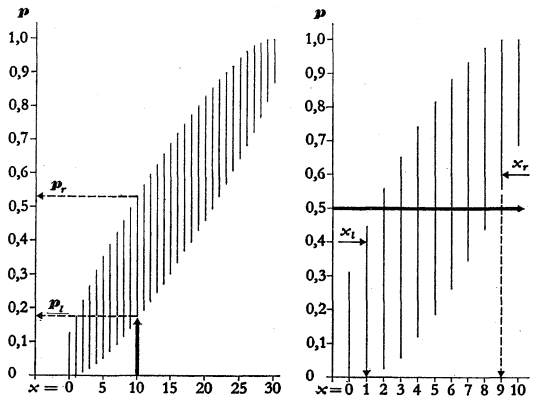


Abb. 45 Binomialverteilung. Vertrauensgrenzen für p; $N = 30$ und 10.

Die Inter- und Extrapolation von Grenzen, die in den Tafeln auf S. 99–103 nicht enthalten sind, erfolgt folgendermaßen:

(Die Beispiele beziehen sich alle auf 95%-Grenzen.)

Es sind 4 Situationen zu unterscheiden, wobei 1) mit 2), 3), 4) kombiniert sein kann. Ist dies der Fall, so beginne man immer mit 1) und fahre mit 2) oder 3) oder 4) fort.

1) x bzw. $100\,p_x$ $(= 100\,x/N)$ liegt *über* den tabellierten Werten einer N-Kolonne.

Man bilde $N - x = x'$ bzw. $100 - 100\,p_x = 100\,p'_x$. Dann sucht man in der Tafel die entsprechenden Grenzen $100\,p'_l$ und $100\,p'_r$. Die gesuchten Grenzen sind:
unten $p_l = 100 - 100\,p'_r$
oben $p_r = 100 - 100\,p'_l$ (**773**)

Beispiel 57: $N = 150$, $x = 125$. $x' = 150 - 125 = 25$ bzw. $100\,p'_x = 100 - 83{,}33 = 16{,}67$. Dazu findet man in der Tafel: $100\,p'_l = 11{,}10$ und $100\,p'_r = 23{,}64$, woraus sich nach (**773**) die gesuchten Grenzen zu 76,36 — 88,90 ergeben.

2) x bzw. $100\,p_x$ $(= 100\,x/N)$ liegt zwischen zwei Werten einer N-Kolonne. $100\,p_x$ liege zwischen $100\,p'_x$ und $100\,p''_x$ $(p'_x < p''_x)$.

Man sucht in der Tafel zu $100\,p'_x$ die Grenzen $100\,p'_l$ und $100\,p'_r$, zu $100\,p''_x$ die Grenzen $100\,p''_l$ und $100\,p''_r$:

$100\,p''_x$	$100\,p''_l$	$100\,p''_r$
$100\,p'_x$	$100\,p'_l$	$100\,p'_r$
$(100\,p''_x - 100\,p'_x)$	$(100\,p''_l - 100\,p'_l) = B_l$	$(100\,p''_r - 100\,p'_r) = B_r$

Ferner bilde man $\dfrac{100\,p_x - 100\,p'_x}{100\,p''_x - 100\,p'_x} = A$ (**774**)

Daraus resultieren die gesuchten Grenzen zu

$100\,p_l = 100\,p'_l + (A \times B_l)$
$100\,p_r = 100\,p'_r + (A \times B_r)$

Beispiel 58: $N = 500$, $x = 427$, $100\,p_x = 85{,}40$

$100\,p''_x = 86{,}00$	$100\,p''_l = 82{,}64$	$100\,p''_r = 88{,}92$
$100\,p'_x = 84{,}00$	$100\,p'_l = 80{,}48$	$100\,p'_r = 87{,}10$
Differenz 2,00	2,16	1,92

$100\,p_x - 100\,p'_x = 85{,}40 - 84{,}00 = 1{,}40$
$A = 1{,}40\,/\,2{,}00 = 0{,}70$

$100\,p_l = 80{,}48 + (0{,}7 \times 2{,}16) = 81{,}99 = \underline{82{,}0}$
$100\,p_r = 87{,}10 + (0{,}7 \times 1{,}92) = 88{,}44 = \underline{88{,}4}$

3) N liegt zwischen N_1 und N_2 $(N_1 < N_2)$. Man bilde zunächst $100\,p_x$ $(= 100\,x/N)$ und interpoliere dazu in Kolonne N_1 die Grenzen $100\,p^*_l$ und $100\,p^*_r$, in Kolonne N_2 die Grenzen $100\,p^{**}_l$ und $100\,p^{**}_r$ nach (**774**). Die gesuchten Grenzen sind dann

$$100\,p_l = 100\,p^*_l + \frac{N - N_1}{N_2 - N_1}(100\,p^{**}_l - 100\,p^*_l)$$
$$100\,p_r = 100\,p^*_r + \frac{N - N_1}{N_2 - N_1}(100\,p^{**}_r - 100\,p^*_r) \quad (775)$$

Beispiel 59: $N = 270$, $x = 22$, $100\,p_x = 8{,}15$. $N = 270$ liegt zwischen $N_1 = 250$ und $N_2 = 300$. Die nach Gleichung (**774**) interpolierten Grenzen zu $100\,p_x = 8{,}15$ sind in Kolonne

$N_2 = 300$	$100\,p^{**}_l = 5{,}32$	$100\,p^{**}_r = 11{,}86$
$N_1 = 250$	$100\,p^*_l = 5{,}08$	$100\,p^*_r = 12{,}28$
Differenz 50	0,24	— 0,42

$\dfrac{N - N_1}{N_2 - N_1} = \dfrac{20}{50} = 0{,}4$

$100\,p_l = 5{,}08 + (0{,}4 \times 0{,}24) = 5{,}18 = 5{,}2$
$100\,p_r = 12{,}28 - (0{,}4 \times 0{,}42) = 12{,}11 = 12{,}1$

4) N liegt über 1000. Man bilde zunächst $100\,p_x$ $(= 100\,x/N)$ und suche dazu in der Kolonne $N = 1000$ die Grenzen $100\,p'_l$ und $100\,p'_r$.

Dann ist $100\,p_x - 100\,p'_l = A$
$100\,p'_r - 100\,p_x = B$
und $100\,p_l = 100\,p_x - A\sqrt{1000/N}$
$100\,p_r = 100\,p_x + B\sqrt{1000/N}$ (**776**)

Beispiel 60: Gegeben: $N = 3000$ und $x = 69$, $100\,p_x = 2{,}30$. Zu $100\,p_x = 2{,}30$ findet man in der Kolonne $N = 1000$ die Grenzen $100\,p'_l = 1{,}46$ und $100\,p'_r = 3{,}44$.

$A = 2{,}30 - 1{,}46 = 0{,}84$
$B = 3{,}44 - 2{,}30 = 1{,}14$

$\sqrt{1000/3000} = \sqrt{1/3} \sim 0{,}577$

$100\,p_l = 2{,}3 - (0{,}84 \times 0{,}577) = 1{,}82 = \underline{1{,}8}$
$100\,p_r = 2{,}3 + (1{,}14 \times 0{,}577) = 2{,}96 = \underline{3{,}0}$

b) *Signifikanzschranken für* x, Tafeln S. 104–106 (oder Vertrauensgrenzen für Np)

Die Wahrscheinlichkeit p sei gegeben (theoretisch oder auf Grund großer Stichproben). Bei einer Stichprobe, die dieser Bevölkerung entstammen *könnte*, ist das E-Ereignis x-mal eingetreten. Die Signifikanzschranken für x entsprechen den Bedingungen (**376**) und (**377**).

In der Tafel S. 104 finden sich solche Schranken für Stichprobenumfänge bis $N = 100$ und für $p = 0{,}05; 0{,}1; \ldots; 0{,}45; 0{,}5$. Eine weitere Tafel für Stichprobenumfänge bis $N = 1000$ und $p = 0{,}5$ findet sich auf S. 105 und 106.

Ohne Rechnung können die Signifikanzschranken für x aus den Vertrauensgrenzen für p gewonnen werden, wie es Abbildung 45, rechts, zeigt.

Beispiel 61. Gesucht die 95%-Signifikanzschranken für x für einen Stichprobenumfang $N = 10$ und ein gegebenes $\boldsymbol{p} = 0{,}5$.

Wie Abbildung 45, rechts, zeigt, wird die *untere* Schranke x_l durch jenen Vertrauensbereich für $\boldsymbol{p}$ bestimmt, dessen *obere* Grenze p_r dem gegebenen $\boldsymbol{p}$ am *nächsten* liegt, dieses aber *nicht überschreitet*. (a)

Die *obere* Schranke x_r wird durch jenen Vertrauensbereich für $\boldsymbol{p}$ bestimmt, dessen *untere* Grenze p_l dem gegebenen $\boldsymbol{p}$ am *nächsten* liegt, dieses aber *nicht unterschreitet*. (b) **(777)**

In der Tafel S. 85 entspricht $p_r = 44{,}50$ der Vorschrift (**777**a) und $p_l = 55{,}50$ der Vorschrift (**777**b). Die gesuchten Schranken für x sind demnach $x_l = 1$ und $x_r = 9$.

Nach WILKS[38] entsprechen obige Signifikanzschranken den *verteilungsfreien Vertrauensgrenzen für Quantile* $Q(p)$ (vgl. Abschnitt 10F, S. 162), wenn $x_l + 1$ an Stelle von x_l gesetzt wird und wenn das p der Tafel so gewählt wird, daß es gleich groß ist wie p in $Q(p)$.

Nachtrag [vgl. dazu (**383**)]. Es sei daran erinnert, daß die postulierte Signifikanzwahrscheinlichkeit erreicht oder unterschritten wird, wenn x die Schranken x_l oder x_r *erreicht* oder nach außen überschreitet.

Beispiel 62. Die hypothetische Wahrscheinlichkeit $\boldsymbol{p}$ sei 0,05. In 48 Versuchen trat das Ereignis E 7mal ein. Entstammt diese Stichprobe der hypothetischen Bevölkerung ($2\alpha = 0{,}05$)? In Tafel S. 104 finden wir als obere Schranke $x = 7$. Schlüsse:

(Einseitig) Die Stichprobe entstammt einer Bevölkerung mit einem $\boldsymbol{p} > 0{,}05$ ($\alpha = 0{,}025$).

(Zweiseitig) Die Stichprobe entstammt einer Bevölkerung mit einem $\boldsymbol{p} \neq 0{,}05$ ($2\alpha = 0{,}05$).

Auf Grund von (**760**) und (**762**) bzw. (**764**) und (**766**) eignen sich folgende Approximationen zur Berechnung der Signifikanzschranken für x:

$$x_l, x_r = N\boldsymbol{p} \mp \left(\frac{1}{2} + |c_\alpha|\sqrt{N\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}}\right) \qquad \textbf{(778)}$$

(c_α S. 28, links)

$$x_l + 1, x_r = \boldsymbol{p}\left(N + 1 - \frac{c^2}{4}\right) + \\ + \frac{c^2}{4}q \mp |c|\sqrt{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}\left(N + 1 - \frac{c^2}{4}\right)} \qquad \textbf{(779)}$$

($c = c_\alpha$, S. 28, links)

c) *Verteilungsfreie Toleranzgrenzen für stetige Verteilungen,* Tafel S. 128 (Vgl. dazu Abschnitt 8C, S. 156.)

Das N dieser Tafel wurde auf Grund einer Formel von WILKS[37] iterativ so berechnet, daß

$$\sum_{N-2k+1}^{N}\binom{N}{x}\beta_p^x(1-\beta_p)^{N-x} \leqq 1 - \beta_t \qquad \textbf{(780)}$$

Die genäherten Werte basieren auf den Approximationen[39]

$$N \sim 1{,}03\,x + 4{,}74\,\chi^2 - 1 \quad \text{für } \beta_p = 0{,}90$$
$$N \sim 1{,}01\,x + 9{,}75\,\chi^2 - 1 \quad \text{für } \beta_p = 0{,}95$$
$$N \sim 1{,}00\,x + 49{,}75\,\chi^2 - 1 \quad \text{für } \beta_p = 0{,}99 \qquad \textbf{(781)}$$

wobei χ^2 so gewählt wird, daß $1\int_\nu$ der Tafel S. 36–39 gleich $1 - \beta_t$ und $\nu = 4x$.

Die Approximation von N nach (**781**) ist sehr gut.

20 G. Diverses

a) *Arcus-Sinus-Transformation,* Tafel S. 69 (Vgl. dazu Abschnitt XIII, S. 140.)

Nach FREEMAN und TUKEY[36] ist die beste Transformation $x \to X$ zur Stabilisierung der Varianz der Binomialverteilung

$$X = \text{arc sin}\sqrt{\frac{x}{N+1}} + \text{arc sin}\sqrt{\frac{x+1}{N+1}}$$

mit einer Varianz innerhalb $\pm 6\%$ von

$$s_X^2 = \frac{1}{N+\frac{1}{2}}\,;\ \left(\frac{\text{Winkel}}{\text{in rad}}\right) \text{ oder } \frac{821}{N+\frac{1}{2}}\,;\ \left(\frac{\text{Winkel}}{\text{in Grad}}\right) \qquad \textbf{(782)}$$

in den meisten Fällen, wenn $Np \geqq 1$. Der Mittelwert $\bar{X}$ der so transformierten Werte ist annähernd $2 \arcsin\sqrt{p}$.

Auf die Anwendung dieser Transformation (Varianzanalyse usw.) können wir hier nicht eingehen.

b) Wie groß muß der Stichprobenumfang N sein, damit bei gegebenem $\boldsymbol{p}$ das Ereignis E mit einer Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{p}^*$ mindestens x-mal eintrifft? Die Lösung dieser Aufgabe für $x = 1$ ist in (**755**) angegeben.

Die einfachste approximative Lösung für $x > 1$ ist auf Grund von (**766**)

$$N \sim \frac{1}{\boldsymbol{p}}\left(\frac{c^2}{4} + x + c\sqrt{x\boldsymbol{q}}\right) - 1 \qquad \textbf{(783)}$$

wobei $c = c_{\mathfrak{p}^*}$

Läßt man in (**783**) -1 weg, so scheint (Kontrollen mit exakten Lösungen) die Approximation noch besser zu sein.

21. Die Poisson-Verteilung

21 A. Allgemeines

Das Ereignis E sei ein zufälliges Ereignis, das über lange Beobachtungsperioden* unendlich viele Male eintreffen kann, in einem relativ kurzen Zeitabschnitt*, allgemein *Beobachtungseinheit* t, aber nur selten eintrifft. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis in einer Beobachtungseinheit t 0, 1, 2, ..., x-mal eintrifft, ist dann

$$f(x) = \dot{\boldsymbol{P}}_x = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \underbrace{\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}}_{=e^{-\lambda}}, \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}, \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} \cdots \qquad \textbf{(784)}$$

e = Basis des natürlichen Logarithmus
$\lambda = \lambda_t$
t = Beobachtungseinheit

Die POISSON-Verteilung ist eine diskrete, unsymmetrische Verteilung, deren Einzelwahrscheinlichkeiten mit wachsendem x, wenn $\lambda < 1$, monoton abnehmen und wenn $\lambda > 1$, zunächst zu- und dann abnehmen. Vgl. Abb. 44.

Wie (**784**) zeigt, wird die POISSON-Verteilung durch den Parameter λ vollständig charakterisiert. Wir symbolisieren sie deshalb mit POISSON-Verteilung (λ).

Tafeln für $f(x)$ und die kumulierte Verteilung $\sum_x^\infty \dot{\boldsymbol{P}}_x$ siehe MOLINA[2].

Die Berechnung mehrerer aufeinanderfolgender Einzelwahrscheinlichkeiten erfolgt am einfachsten nach der Rekursionsformel

$$\dot{\boldsymbol{P}}_{x+1} = \dot{\boldsymbol{P}}_x \times \frac{\lambda}{x+1} \qquad \textbf{(785)}$$

Beispiel 63. Berechne für x von 0 bis 5 die Einzelwahrscheinlichkeiten der POISSON-Verteilung ($\lambda = 1$).

$\dot{\boldsymbol{P}}_0 = 1/e = 0{,}367879$ $\quad$ $\dot{\boldsymbol{P}}_3 = \dot{\boldsymbol{P}}_2 \times 1/3 = 0{,}061313$
$\dot{\boldsymbol{P}}_1 = \dot{\boldsymbol{P}}_0 \times 1 = 0{,}367879$ $\quad$ $\dot{\boldsymbol{P}}_4 = \dot{\boldsymbol{P}}_3 \times 1/4 = 0{,}015328$
$\dot{\boldsymbol{P}}_2 = \dot{\boldsymbol{P}}_1 \times 1/2 = 0{,}183940$ $\quad$ $\dot{\boldsymbol{P}}_5 = \dot{\boldsymbol{P}}_4 \times 1/5 = 0{,}003066$

Die Berechnung der *kumulierten Wahrscheinlichkeiten* erfolgt nach den Vorschriften des Abschnittes 5, wobei an Stelle von N Unendlich einzusetzen ist. Ferner sei darauf hingewiesen, daß die Wahrscheinlichkeit Prob ($x \geqq k$) bei der POISSON-Verteilung nur mittels Prob ($x \leqq k - 1$) errechnet werden kann.

Beispiel 64. Wir groß muß λ_t sein, damit das Ereignis E mit einer Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{p}^*$ wenigstens einmal in der Beobachtungseinheit t eintrifft? (Diese Fragestellung ist bei der POISSON-Verteilung ungewöhnlich, stellt sich aber manchmal, wenn die POISSON-Verteilung als Approximation anderer Verteilungen gebraucht wird.)

Die Lösung der Aufgabe ist (**129**). Man findet dort auch die numerischen Werte für verschiedene $\mathfrak{p}^*$. Für $\mathfrak{p}^* = 0{,}999$ beträgt λ zum Beispiel 6,9.

21 B. Das Additionstheorem der POISSON-Verteilung

Wenn $x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_k}$ stochastisch voneinander unabhängige**, nach POISSON verteilte zufällige Veränderliche darstellen, so ist ihre Summe $x = x_{t_1} + x_{t_2} + \cdots + x_{t_k}$ ebenfalls eine POISSON-Verteilung mit $\lambda = \lambda_{t_1} + \lambda_{t_2} + \cdots + \lambda_{t_k}$. **(786)**

* Als Beispiel wurde die Zeit gewählt. Es kann sich auch um Flächen oder Räume handeln.

** Die Beobachtungseinheiten $t_1, t_2, \ldots, t_k$ dürfen sich zum Beispiel nicht überlappen.

21 C. Parameter und ihre Schätzungen

Der Mittelwert der POISSON-Verteilung ist

$$\mu_{x_t} = \lambda_t = \text{Erwartungswert von } \bar{x}_t, \quad (a)$$

die Varianz

$$\sigma^2_{x_t} = \lambda_t = \text{Erwartungswert von } \bar{x}_t, \quad (b)$$

(787)

wobei t = Beobachtungseinheit, auf die x und λ bezogen sind.

Soll aus einer POISSON-Verteilung mit Beobachtungseinheit t eine andere POISSON-Verteilung mit Beobachtungseinheit kt berechnet werden, so sind Mittelwert und Varianz der letzteren

$$\mu_{x_{kt}}, \sigma^2_{x_{kt}} = k\lambda_t; \ (k > 0) \quad \textbf{(788)}$$

Der Umstand, daß bei der POISSON-Verteilung Mittelwert und Varianz gleich groß sind, ist der Grund zur Faustregel:

Wenn bei *diskreten* Verteilungen das Verhältnis Varianz zu Mittelwert fast Eins beträgt (etwa zwischen $^1/_9$ und $^9/_{10}$), können sie durch die POISSON-Verteilung approximiert werden, sofern die Veränderliche x große (theoretisch unendlich große) Werte annehmen *könnte*. **(789)**

Biasfreie Schätzungen von λ_t sind auf Grund von *n gleich großen* Beobachtungseinheiten t

$$\bar{x}_t = \frac{\Sigma x_t}{n} = \frac{\Sigma x_i f_i}{n} \quad (a)$$

oder

$$s^2_t = \frac{\Sigma x_t^2 - (\Sigma x_t)^2/n}{n-1} = \frac{\Sigma x_i^2 f_i - (\Sigma x_i f_i)^2/n}{n-1} = \frac{S_t}{n-1} \quad (b)$$

(790)

$\bar{x}_t$ ist die *bessere* (wirksamere) Schätzung. Da sie auch schneller zu errechnen ist, wird man sie stets verwenden. Bei größeren n (etwa $n > 5$) bietet aber die *zusätzliche* Berechnung von $(n-1)\,s^2$ [dem Zähler in (**790** b)] den Vorteil, untersuchen zu können, ob sich das Verhältnis $s^2/\bar{x}$ signifikant von 1 unterscheidet. Der Prüfquotient ist

$$\frac{(n-1)\,s^2_t}{\bar{x}_t} = \frac{S_t}{\bar{x}_t} \quad \textbf{(791)}$$

Signifikanzschranke χ^2 mit $\nu = n-1$, $2\alpha = 1 \int_r$, S. 36–39.

Erreicht oder übersteigt der Prüfquotient (**791**) die Signifikanzschranke, so entstammt die Stichprobe nicht einer POISSON-Verteilung. Als Folgerung kann man sich dann der Faustregel bedienen:

Wenn (**791**) signifikant, könnte die Stichprobe, wenn $s^2 < \bar{x}$, einer Binomialverteilung, wenn $s^2 > \bar{x}$, einer Binomialverteilung mit negativem Index entstammen. Vgl. dazu zum Beispiel [40]. **(792)**

Beispiel 65. In 60 Minuten wurden 12 Ereignisse beobachtet. $\lambda_{60\,\text{min}} \sim 12/1 = 12$. Die Schätzung von $\lambda_{1\,\text{min}}$ ist dann nach (**788**) $12/60 \sim {}^1/_5$.

Beispiel 66. In 60 Minuten wurden 12, in 30 Minuten 8 Ereignisse beobachtet. Nach (**786**) ist $\lambda_{90} \sim 12 + 8 = 20$, $\lambda_{1\,\text{min}} \sim 20/90$.

Beispiel 67. In 100 Beobachtungsperioden von 1 Minute Dauer wurde das Ereignis E in 5 Beobachtungsperioden 0mal, in 30 Beobachtungsperioden 30mal (siehe unten) usw., allgemein in f_i Beobachtungsperioden x_i-mal beobachtet:

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	
0	5	0	0	$\bar{x}_t = 2{,}36$ nach (**790**a)
1	30	30	30	
2	24	48	96	$S_t = 778 - 556{,}96 =$
3	20	60	180	$= 221{,}04$ nach (**790**b)
4	12	48	192	
5	4	20	100	$\chi^2 = 93{,}661$,
6	5	30	180	$\nu = 99$ nach (**791**)
7	0			
8	0			
	$n = 100$	$\Sigma x = 236$	$\Sigma x^2 = 778$	
		$\sim \lambda_{100\,\text{min}}$		

χ^2 liegt in diesem Fall weit innerhalb der Signifikanzschranke von 0,05 ($0{,}30 < \alpha < 0{,}35$); es *könnte* sich um eine POISSON-Verteilung handeln. Eine *wirksamere* Prüfung erhielte man in diesem Fall durch Berechnung der *angepaßten* POISSON-Verteilung nach (**784**) mit $\lambda = 2{,}36$, Multiplikation der so erhaltenen Werte mit n und dann Prüfung mit χ^2 nach (**566**) mit Freiheitsgrad $\nu = k - 1$ nach (**569**a), wobei k = Anzahl der Klassen i.

21 D. Transformationen

Wie Abbildung 44 zeigt, wird die POISSON-Verteilung mit wachsendem λ der Normalverteilung immer ähnlicher (ziemlich schnell).

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\, e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2\lambda}} \quad \textbf{(793)}$$

wenn $\lambda \to \infty$.

Die entsprechenden Transformationen sind analog zu den Transformationen der Binomialverteilung durch die Normalverteilung mittels (**760**) bis (**763**), indem man λ an Stelle von Np setzt.

Besser[36] sind folgende Approximationen

$$c_{\mathfrak{p}} = 2\,(\sqrt{x+1} - \sqrt{\lambda}) \quad \textbf{(794)}$$

$$x_{\mathfrak{p}} = \lambda + c_{\mathfrak{p}}\sqrt{\lambda} + \frac{c^2}{4} - 1 \quad \textbf{(795)}$$

$$c_{1-\mathfrak{p}^*} = 2\,(\sqrt{x} - \sqrt{\lambda}) \quad \textbf{(796)}$$

$$x_{\mathfrak{p}^*} = \lambda + c_{1-\mathfrak{p}^*}\sqrt{\lambda} + \frac{c^2}{4} \quad \textbf{(797)}$$

$\lambda \geqq 1$

Beispiel 68. Berechne $x_{\mathfrak{p}}$ und $x_{\mathfrak{p}^*}$ für $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^* = 0{,}025$ der POISSON-Verteilung ($\lambda = 99$).

$$x_{\mathfrak{p}} = 99 - 1{,}96\sqrt{99} + \frac{1{,}96^2}{4} - 1 = 79{,}46 \quad \text{nach (795)}$$

$$x_{\mathfrak{p}^*} = 99 + 1{,}96\sqrt{99} + \frac{1{,}96^2}{4} = 119{,}46 \quad \text{nach (797)}$$

Da x nur diskrete Werte annehmen kann, runden wir und erhalten 79 bzw. 119. Die exakten Werte betragen 79 und 120. In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, daß man, um sicherzugehen, in solchen Fällen besser nach außen rundet.

Um den Forderungen $\text{Prob}\,(x \leqq x_{\mathfrak{p}}) \leqq \mathfrak{p}$ und $\text{Prob}\,(x \geqq x_{\mathfrak{p}^*}) \leqq \mathfrak{p}^*$ sicherer zu entsprechen, runde man $x_{\mathfrak{p}}$ immer ab, $x_{\mathfrak{p}^*}$ immer auf. Dies gilt auch bei Approximationen anderer diskreter Verteilungen. **(798)**

Wäre (**798**) schon bekannt gewesen, hätten wir im Beispiel 68 das korrekte Resultat erhalten. Dies will aber nicht besagen, daß dem immer so ist, wenn man nach (**798**) verfährt.

Zur Stabilisierung der Varianz eignet sich die Transformation[36]

$$X = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$$

mit Varianz $\sigma^2_X = 1$

und Mittelwert $\overline{X} \sim \sqrt{4\lambda + 1}$ **(799)**

Die Beziehung zwischen POISSON- und χ^2-Verteilung ist in (**561**) und (**562**) dargestellt. Daraus ergibt sich folgende Anleitung zur Bestimmung *exakter* $x_{\mathfrak{p}}$ und $x_{\mathfrak{p}^*}$:

a) Gesucht $x_{\mathfrak{p}}$. In der χ^2-Tafel, S. 36–39, suche man in der Kolonne $1 \int_i = 1 - \mathfrak{p}$ den Wert $\chi^2 \leqq 2\lambda$. Aus dem Freiheitsgrad dieses χ^2 errechnet sich dann

$$x_{\mathfrak{p}} = \frac{\nu}{2} - 1, \text{ wenn } \nu \text{ gerade Zahl}$$

$$= \frac{\nu}{2} - 1{,}5, \text{ wenn } \nu \text{ ungerade Zahl}$$

(800)

b) Gesucht $x_{\mathfrak{p}^*}$. In der χ^2-Tafel, S. 36–39, suche man in der Kolonne $1 \int_i = \mathfrak{p}^*$ den Wert $\chi^2 \geqq 2\lambda$. Aus dem Freiheitsgrad dieses χ^2 errechnet sich dann

$$x_{\mathfrak{p}^*} = \frac{\nu}{2}, \text{ wenn } \nu \text{ gerade Zahl}$$

$$= \frac{\nu}{2} + 0{,}5, \text{ wenn } \nu \text{ ungerade Zahl}$$

(801)

Beispiel 69. Gesucht die $(1-2\alpha)$-Schranken für x, wenn $\lambda = 32$ und $\alpha = 0{,}0005$. Die linke Schranke sucht man nach (**800**). Es ist $\chi^2_{0{,}9995} \leqq 64 = 63{,}582$ mit $\nu = 31$. $x_l = 31/2 - 1{,}5 = 14$. Die rechte Schranke sucht man nach (**801**). Es ist $\chi^2_{0{,}0005} \geqq 64 = 64{,}526$ mit $\nu = 106$. $x_r = 106/2 = 63$.

21 E. Vertrauensgrenzen und Signifikanzschranken

a) *Vertrauensgrenzen* für λ (Tafeln S. 107 und 108)

Analog zur Binomialverteilung sind die Vertrauensgrenzen für λ die Lösungen der Gleichungen

$$\sum_{x}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_l}\lambda_l^x}{x!} = \alpha \quad \text{und} \quad \sum_{0}^{x} \frac{e^{-\lambda_r}\lambda_r^x}{x!} = \alpha \qquad \text{(a) (b)} \quad \textbf{(802)}$$

nach λ_l und λ_r.

Für $x = 0$ gibt es nur einen $(1-\alpha)$-Vertrauensbereich mit der Lösung $\lambda_r = z$ von (**129**). Die linke Grenze λ_l ist Null.

Für $x > 1$ sind nur iterative Lösungen möglich. Unsere Tafeln S. 107 und 108 wurden für λ bis 100 elektronisch auf diese Weise, für $x > 100$ nach (**804**) berechnet.

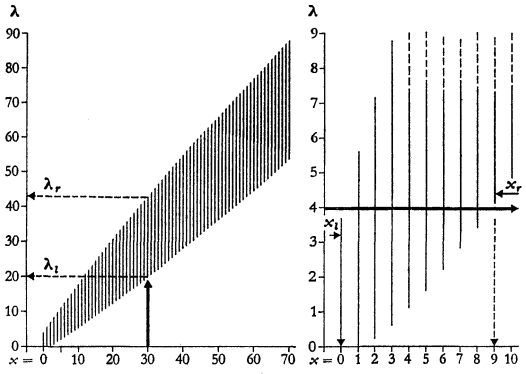


Abb. 46 POISSON-Verteilung, Vertrauensgrenzen für λ.

Für andere Signifikanzwahrscheinlichkeiten als jene der Tafeln S. 107 und 108 lassen sich für x bis 100 bzw. 99 *exakte* Grenzen aus der χ^2-Tafel, S. 36–39, bestimmen.

Anleitung. Gegeben x und α. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\,[\chi^2_{\alpha,\,\nu=2x}] &= \lambda_l \qquad \text{(a)} \\ \tfrac{1}{2}\,[\chi^2_{1-\alpha,\,\nu=2\,(x+1)}] &= \lambda_r \qquad \text{(b)} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(803)}$$

wobei χ^2_α und $\chi^2_{1-\alpha}$ die Quantile α und $1-\alpha$ bedeuten und α bzw. $1-\alpha$ bei $1\int_l$ zu suchen ist.

Beispiel 70. Gesucht $(1-2\alpha)$-Schranken für λ, wenn $x = 98$ und $\alpha = 0{,}05$. Für λ_l suchen wir bei $\nu = 2 \times 98 = 196$ und $1\int_l = 0{,}05$ und finden $\chi^2_l = 164{,}10$. λ_l ist $164{,}10/2 = 82{,}305$. Für λ_r suchen wir bei $\nu = 2\,(98+1) = 198$ und $1\int_l = 0{,}95$ und finden $\chi^2_r = 231{,}829$. $\lambda_r = 231{,}829/2 = 115{,}915$.

Für größere x ergibt sich aus (**794**) und (**796**) die *sehr gute* Approximation

$$\lambda_l, \lambda_r = \left(\frac{|c_\alpha|}{2} \mp \sqrt{x + \tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}}\right)^2 \qquad \textbf{(804)}$$

Beispiel 71. Gesucht die $(1-2\alpha)$-Vertrauensgrenzen für λ, wenn $x = 99$ und $\alpha = 0{,}025$.

$$\lambda_l = \left(\frac{1{,}96}{2} - \sqrt{99 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}}\right)^2 = 80{,}459$$

$$\lambda_r = \left(\frac{1{,}96}{2} + \sqrt{99 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}}\right)^2 = 120{,}56$$

Die exakten Werte betragen 80,458 und 120,53.

Nachtrag. Beispiel 72. In 12 Minuten wurden 24 Ereignisse beobachtet. Bestimme die 95%-Grenzen für $\lambda_{12\,\min}, \lambda_{1\,\min}, \lambda_{1\,h}$. Auf S. 107 finden wir für $x = 24$ die Grenzen 15,378 und 35,711. Daraus errechnen wir nach (**788**) Grenzen

für $\lambda_{1\,\min} = 15{,}378/12$ und $35{,}711/12 = 1{,}2815$ und $2{,}9759$

für $\lambda_{1\,h} \quad = 15{,}375 \times 5$ und $35{,}711 \times 5 = 76{,}890$ und $178{,}56$

Die Schätzung der Grenzen von λ_{kt} muß immer von der in der Beobachtungseinheit t beobachteten Anzahl der Ereignisse x ausgehen, *nicht* aber von der mit k multiplizierten Anzahl kx! *Falsch* wäre in Beispiel 72 folgende Berechnung:

$x_{1\,\min} = 24/12 = 2$; Grenzen 0,2422 — 7,2247

oder $x_{1\,h} \quad = 24 \times 5 = 120$; Grenzen 99,49 — 143,52

b) *Signifikanzschranken für x bei gegebenem* λ; Tafel S. 128

Diese Schranken entsprechen der Bedingung (**390**), indem ∞ an Stelle von N eingesetzt wird*.

Man kann diese Schranken ohne Rechnung den Vertrauensgrenzen für λ entnehmen, wie es Abbildung 46, rechts, zeigt. Das Vorgehen entspricht genau jenem bei der Bestimmung der entsprechenden Schranken der Binomialverteilung. Für $\alpha \neq 0{,}025$ oder 0,005 findet man die linke Schranke nach (**800**) und die rechte Schranke nach (**801**). Vgl. Beispiel 69. Für $n > 100$ bzw. 99 approximiere man nach (**795**) und (**797**).

22. Die hypergeometrische Verteilung

22 A. Allgemeines

Gegeben seien N Kugeln, wovon X weiße und $N - X$ rote. Die Wahrscheinlichkeit, in N_1 Zügen exakt x_1 weiße Kugeln zu ziehen, ist dann

$$\left.\begin{aligned} f(x_1 \mid X, N, N_1) &= \frac{\binom{X}{x_1}\binom{N-X}{N_1-x_1}}{\binom{N}{N_1}} \qquad \text{(a)} \\ &= \frac{N_1!\,(N-N_1)!\,X!\,(N-X)!}{N!\,x_1!\,(N-x_1)!\,(X-x_1)!\,(N-X-N_1+x_1)!} \qquad \text{(b)} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(805)}$$

$f(x_1 \mid X, N, N_1)$ wird hypergeometrische Verteilung von x_1 genannt $(X, N, N_1 = \text{konstant})$.

Die entsprechende Vierfeldertafel (für später) ist:

$$\left.\begin{array}{l|cc|c} \text{Weiß} & x_1 & N_1-x_1 & N_1 \\ \text{Rot} & X-x_1 & N-X-N_1+x_1 & N-N_1 \\ \hline & X & N-X & N \end{array} = \begin{array}{cc|c} x_1 & N_1-x_1 & N_1 \\ x_2 & N_2-x_2 & N_2 \\ \hline X & N-X & N \end{array}\right\} \quad \textbf{(806)}$$

Die Berechnung von (**805**) erfolgt für $N \leqq 100$ am besten nach (a) mit den Tafeln S. 70–77 (vgl. Anleitung S. 77) und für $N > 100$ nach (b) mit den Tafeln S. 26 und 27. Die Berechnung kann auch nach den Rekursionsformeln erfolgen:

$$f(x_1+1 \mid X) = [f(x_1 \mid X)] \times \frac{(N_1-x_1)\,(X-x_1)}{(x_1+1)\,(N-X-N_1+x_1+1)} \qquad \textbf{(807)}$$

oder

$$f(x_1 \mid X+1) = [f(x_1 \mid X)] \times \frac{(N-X-N_1+x_1)\,(X+1)}{(N-X)\,(X+1-x_1)} \qquad \textbf{(808)}$$

In den Tabellen S. 170.21 sind alle Wahrscheinlichkeiten $f(x_1 \mid X, N = 20, N_1 = 5)$ und die kumulierten Wahrscheinlichkeiten $F(x_1 \mid X)$ berechnet, in den Abbildungen 47 und 48 dargestellt.

Zur Kontrolle von Berechnungen solcher Art dienen

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{x_1=0}^{x_1=k_1} \text{Prob}\,(x_1 \mid X = K) = 1 \qquad \text{(a)} \\ &\sum_{X=0}^{X=K} \text{Prob}\,(x_1 = k_1 \mid X) = \frac{N+1}{N_1} \qquad \text{(b)} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(809)}$$

Die Abbildung 47 vermittelt ein eindrückliches Bild über gewisse Symmetrien:

$$\text{Prob}\,(x_1 = k_1 \mid X = K) = \text{Prob}\,(x_1 = N_1 - k_1 \mid X = N - K) \qquad \textbf{(810)}$$

22 B. Parameter

Der Mittelwert von x bei gegebenem X, N und N_1 ist, wenn man $X/N = \boldsymbol{p}$ setzt,

$$\mu_x = N_1 \boldsymbol{p} \qquad \textbf{(811)}$$

die Varianz

$$\sigma_x^2 = N_1 \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{q}\left(\frac{N-N_1}{N-1}\right) \qquad \textbf{(812)}$$

$X/N = \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q} = 1 - \boldsymbol{p}$

Die Varianz der hypergeometrischen Verteilung $(N, N_1, \boldsymbol{p})$ ist somit um den Faktor $(N - N_1)/(N - 1)$ *kleiner* als die Varianz der Binomialverteilung $(N_1\,\boldsymbol{p})$.

* In (**390**) ist das ≧-Zeichen falsch. Der Leser ist gebeten, es durch ein ≦-Zeichen zu ersetzen.

Hypergeometrische Verteilung, $N = 20$, $N_1 = 5$, Einzelwahrscheinlichkeiten Prob $(x_1 = k_1 \mid X = K)$

x_1	X																				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	1	0,75	0,5526	0,3991	0,2817	0,1937	0,1291	0,0830	0,0511	0,0298	0,0163	0,0081	0,0036	0,0014	0,0004	0,0001					
1		0,25	0,3947	0,4605	0,4696	0,4402	0,3874	0,3228	0,2554	0,1916	0,1354	0,0894	0,0542	0,0293	0,0135	0,0048	0,0010				
2			0,0526	0,1316	0,2167	0,2935	0,3522	0,3874	0,3973	0,3831	0,3483	0,2980	0,2384	0,1761	0,1174	0,0677	0,0310	0,0088			
3				0,0088	0,0310	0,0677	0,1174	0,1761	0,2384	0,2980	0,3483	0,3831	0,3973	0,3874	0,3522	0,2935	0,2167	0,1316	0,0526		
4					0,0010	0,0048	0,0135	0,0293	0,0542	0,0894	0,1354	0,1916	0,2554	0,3228	0,3874	0,4402	0,4696	0,4605	0,3947	0,25	
5						0,0001	0,0004	0,0014	0,0036	0,0081	0,0163	0,0298	0,0511	0,0830	0,1291	0,1937	0,2817	0,3991	0,5526	0,75	1

Hypergeometrische Verteilung, $N = 20$, $N_1 = 5$, kumulierte Wahrscheinlichkeiten Prob $(x_1 \leqq k_1 \mid X = K)$

x_1	X																				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	1	0,75	0,5526	0,3991	0,2817	0,1937	0,1291	0,0830	0,0511	0,0298	0,0163	0,0081	0,0036	0,0011	0,0004	0,0001					
1		1	0,9474	0,8596	0,7513	0,6339	0,5165	0,4058	0,3065	0,2214	0,1517	0,0975	0,0578	0,0307	0,0139	0,0049	0,0010				
2			1	0,9912	0,9680	0,9274	0,8687	0,7932	0,7038	0,6045	0,5000	0,3955	0,2962	0,2068	0,1313	0,0726	0,0320	0,0088			
3				1	0,9990	0,9951	0,9861	0,9693	0,9422	0,9025	0,8483	0,7786	0,6935	0,5942	0,4835	0,3661	0,2487	0,1404	0,0526		
4					1	0,9999	0,9996	0,9986	0,9964	0,9919	0,9837	0,9702	0,9489	0,9170	0,8709	0,8063	0,7183	0,6009	0,4474	0,25	
5						1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

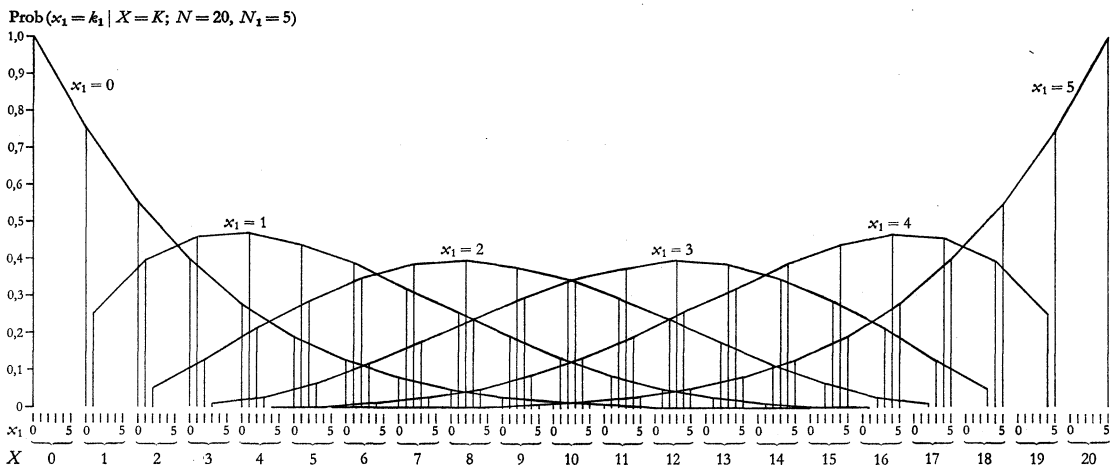


Abb. 47 Hypergeometrische Verteilung. Darstellung aller möglichen Einzelwahrscheinlichkeiten bei gegebenem N und N_1. Die senkrechten Striche 0–5 stellen die Wahrscheinlichkeiten Prob $(x_1 = 0{,}1 \ldots 5 \mid X = K)$ dar. Die gebrochenen Linienzüge verbinden die Wahrscheinlichkeiten Prob $(x_1 = k_1 \mid X = 0{,}1 \ldots N)$.

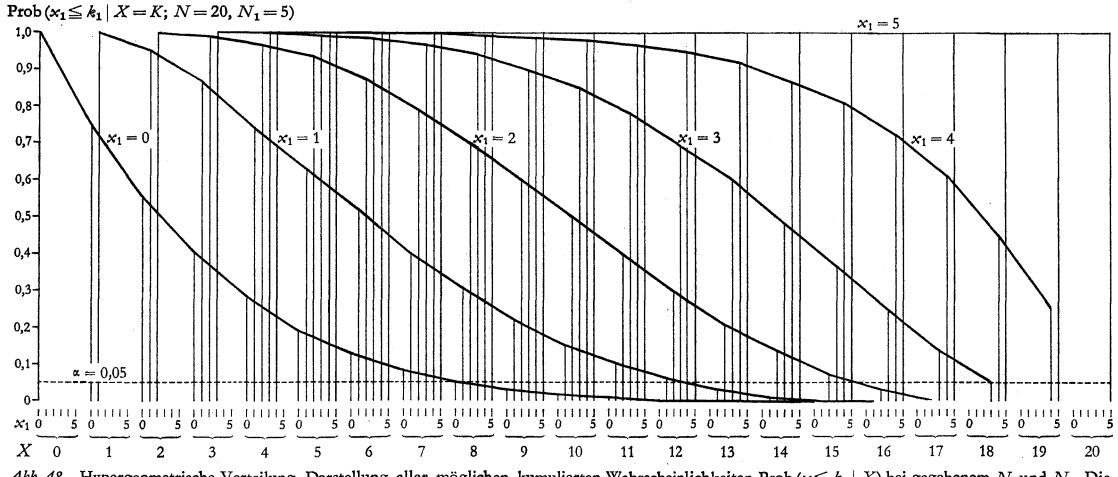


Abb. 48 Hypergeometrische Verteilung. Darstellung aller möglichen kumulierten Wahrscheinlichkeiten Prob $(x \leqq k_1 \mid X)$ bei gegebenem N und N_1. Die senkrechten Striche 0–5 stellen die Wahrscheinlichkeiten Prob $(x_1 \leqq 0{,}1 \ldots 5 \mid X = K)$ dar. Die gebrochenen Linienzüge verbinden die Wahrscheinlichkeiten Prob $(x \leqq k_1 \mid X = 0{,}1 \ldots N)$.

22 C. Hypergeometrische und andere Verteilungen

Wenn $\boldsymbol{p} < 0{,}1$ und N ziemlich groß (etwa über 60), läßt sich die hypergeometrische Verteilung ($N, N_1, \boldsymbol{p}$) durch die Binomialverteilung ($\boldsymbol{p}; N_1$) approximieren. Bei Signifikanztesten bleibt man dabei auf der *sicheren* Seite. **(813)**

Wenn $N_1/N < 0{,}1$ und N ziemlich groß, ist die POISSON-Verteilung ($\lambda = N_1\boldsymbol{p}$) eine gute Approximation. **(814)**

Wenn $N_1\boldsymbol{p} \geqq 4$ (etwa), ist schließlich die Normalverteilung [(**811**), $\sqrt{}$(**812**)] eine gute Approximation. Es ist folglich **(815)**

$$c_{\mathfrak{p}} = \frac{x_1 + \frac{1}{2} - (\mathbf{811})}{\sqrt{(\mathbf{812})}} \quad \text{(a)}$$

$$c_{1-\mathfrak{p}^*} = \frac{x_1 - \frac{1}{2} - (\mathbf{811})}{\sqrt{(\mathbf{812})}} \quad \text{(b)} \qquad \mathbf{(816)}$$

wobei das $\pm\frac{1}{2}$ bei großen N weggelassen werden kann.

22 D. Signifikanzschranken

Die Signifikanzschranken der Tafel S. 109–123 entsprechen den Bedingungen (bei gegebenen N und N_1)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Prob}\,(x_1 \geqq k_1 \mid X_l) \leqq \alpha \\ \text{Prob}\,(x_1 \geqq k_1 \mid X_{l+1}) > \alpha\end{array}\right\}\ \text{(a)}$$

und

$$\left.\begin{array}{l}\text{Prob}\,(x_1 \leqq k_1 \mid X_r) \leqq \alpha \\ \text{Prob}\,(x_1 \leqq k_1 \mid X_{r-1}) > \alpha\end{array}\right\}\ \text{(b)} \qquad \mathbf{(817)}$$

Diese Darstellung wurde gewählt, weil sie auch in jenen Situationen praktisch ist, in denen X unbekannt ist (diese Situation entspricht *nicht* der eingangs in Abschnitt 22 A geschilderten).

In Abbildung 48 ist das Suchen der oberen Schranke (**817** b) für $\alpha = 0{,}05$ dargestellt (gestrichelte waagrechte Linie).

(**817**) kann bei größeren N auf Grund von (**816**) approximiert werden durch[41]

$$x_l, x_r = \frac{N}{2k}\left(k + 2x_1 - N_1 - 1 \mp \sqrt{k^2 - \frac{2k}{N_1}[(x_1 \mp \tfrac{1}{2})^2 + (N_1 - x_1 \pm \tfrac{1}{2})^2] + (2x_1 - N_1 \mp 1)^2}\right) \quad \text{(a)}$$

oder ohne Kontinuitätskorrektur

$$x_l, x_r = \frac{N}{2k}\left(k + 2x_1 - N_1 \mp \sqrt{k^2 - \frac{2k}{N_1}[x_1^2 + (N_1 - x_1)^2] + (2x_1 - N_1)^2}\right) \quad \text{(b)} \qquad \mathbf{(818)}$$

wobei in (a) und (b) $k = N_1 + (1 - N_1/N)\,c_\alpha^2$. $c_\alpha^2 = \chi_{\alpha}^2$ für $\nu = 1$, $2\alpha = 1\int_r$, S. 36.

Die $(1-2\alpha)$-Signifikanzschranken für x_1 bei gegebenem X lassen sich approximieren, wenn $N > 60$, $N_1\boldsymbol{p} \geqq 4$, $N_2\boldsymbol{p} \geqq 4$ (etwa), nach

$$x_l, x_r = N_1\boldsymbol{p} \mp (\tfrac{1}{2} + |\,c_\alpha\,|\sqrt{N_1\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}\,(N - N_1)/(N-1)}\,); \quad \mathbf{(819)}$$

$\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$ siehe (**811**).

23. Prüfung von Häufigkeiten

23 A. Stichproben aus binomialen Bevölkerungen

a) *2 Stichproben* der Umfänge N_1 und N_2, in denen das E-Ereignis x_1- und x_2-mal eingetroffen ist. Wenn $N_1 + N_2 \leqq 60$, verfahre man, wie es in der Fußnote S. 123 angegeben ist. Wenn $N_1 + N_2 > 60$, siehe b. **(820)**

b) *Mehrere Stichproben.* Gegeben m Stichproben der Umfänge $N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots, N_m$, in denen das E-Ereignis x_1-, x_2-, …, x_i-, …, x_m-mal eingetroffen ist. Man bilde

$$p_i = \frac{x_i}{N_i},\ q_i = 1 - p_i,\ \bar{p} = (\Sigma x_i)/(\Sigma N_i) \text{ und } \bar{q} = 1 - \bar{p}$$

und transformiere danach die x_i gemäß (**764**) und (**766**) wie folgt:

$$c_i = 2\left(\sqrt{(x_i + 1)\,\bar{q}} - \sqrt{(N_i - x_i)\,\bar{p}}\right), \text{ wenn } p_i < \bar{p}$$

oder

$$c_i = 2\left(\sqrt{x_i\,\bar{q}} - \sqrt{(N_i - x_i + 1)\,\bar{p}}\right), \text{ wenn } p_i > \bar{p} \qquad \mathbf{(821)}$$

Zum Vergleich dieser transformierten Daten eignen sich zwei Methoden:

I. Vergleich auf Grund des Extrembereiches (Schnelltest).

Man bilde die Differenz

größtes c_i minus kleinstes c_i = Extrembereich m, wobei c_i nach (**821**) **(822)**

Die Signifikanzschranken für den Extrembereich m findet man in der Tafel S. 51 bei $N_1 = m$ und $\nu = \infty$. *Das α der Tafel ist in 2α zu korrigieren.* Für $m = 2$, das heißt zum Vergleich zweier Stichproben, sind diese Schranken gleich 2,772 ($2\alpha = 0{,}05$) und 3,643 ($2\alpha = 0{,}01$). *Erreicht* oder *überschreitet* der Extrembereich m die Signifikanzschranke, so ist die Interpretation

bei $m = 2$ (2 Stichproben):

einseitig: $\begin{cases}\boldsymbol{p}_1 < \boldsymbol{p}_2, \text{wenn } p_1 - p_2 < 0\ (\alpha = \frac{1}{2}\,\alpha \text{ der Tafel!}) \\ \boldsymbol{p}_1 > \boldsymbol{p}_2, \text{wenn } p_1 - p_2 > 0\ (\alpha = \frac{1}{2}\,\alpha \text{ der Tafel!})\end{cases}$

zweiseitig: $\boldsymbol{p}_1 \neq \boldsymbol{p}_2$ ($2\alpha = \alpha$ der Tafel!) **(823)**

bei $m > 2$ (mehr als 2 Stichproben)

zweiseitig: Die Stichproben entstammen nicht alle derselben Bevölkerung ($2\alpha = \alpha$ der Tafel!) **(824)**

Wenn $m = 2$ (2 Stichproben), ist dieser Test gleich mächtig wie der folgende χ^2-Test. Für $m > 10$ ist dieser Test *nicht* mehr zu empfehlen.

II. Vergleich auf Grund von χ^2.

Man quadriere die c_i und summiere deren Quadrate. Die Signifikanzschranke für die Prüfgröße

$\Sigma\, c_i^2$

ist χ^2, S. 36–39, mit Freiheitsgrad $\nu = m - 1$ (vgl. Abschnitt 12 B, S. 167). **(825)**

Erreicht oder *überschreitet* die Prüfgröße die Signifikanzschranke, so gilt Interpretation (**823**) mit $2\alpha = 1\int_r$ und $\alpha = \frac{1}{2}\int_r$. Der χ^2-Test kann bei beliebiger Stichprobenanzahl m durchgeführt werden und ist, wenn $m > 2$, *mächtiger* als der Test auf Grund des Extrembereiches.

23 B. Stichproben aus multinomialen Bevölkerungen

Gegeben m Stichproben der Umfänge $N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots, N_m$, in denen die n Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_j, \ldots, E_n$ x_{1j}-, x_{2j}-, …, x_{ij}-, …, x_{mn}-mal eingetroffen sind, wobei

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = N_i$, $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = X_j$ und $\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{i=1}^{m} N_i = N$: **(826)**

x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	… x_{1n}	N_1
x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	… x_{2n}	N_2
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	… x_{in}	N_i
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mj}	… x_{mn}	N_m
X_1	X_2		X_j	X_n	N

Man bilde die Erwartungswerte $E_{ij} = N_iX_j/N$. Der Erwartungswert für das Ereignis x_{11} (Ereignis 1 in Stichprobe 1) ist zum Beispiel N_1X_1/N. Mit diesen Erwartungswerten bilde man für jedes Ereignis ij den Quotienten

$$\frac{(x_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \quad \text{oder} \quad \left[\frac{x_{ij}^2}{X_jN_i} - N\right] \qquad \text{(a) (b)} \quad \mathbf{(827)}$$

und summiere alle so erhaltenen Quotienten. Die Signifikanzschranke für die Summe

$\sum_1^n \sum_1^m$ (**827**a) oder $N \sum_1^n \sum_1^m$ (**827**b) (**828**)

ist χ^2, S. 36–39, mit Freiheitsgrad $\nu = (n-1)(m-1)$ und $2\alpha = 1 \int_r$. *Erreicht* oder *überschreitet* die Prüfgröße (**828**) die Signifikanzschranke, so gilt die Interpretation zu (**825**).

23 C. Stichproben aus POISSON-Bevölkerungen

a) *2 Stichproben aus zwei gleich großen Beobachtungseinheiten $t_1 = t_2 = t$.*

Gegeben 2 Stichproben mit *gleich großen* Beobachtungseinheiten $t_1 = t_2 = t$, in denen das E-Ereignis x_1- und x_2-mal eingetroffen ist. Man bilde die Summe $x_1 + x_2 = N$. Signifikanzschranken für x_1 und x_2 sind dann x_l und x_r der Tafel S. 105 und 106 bei $N = x_1 + x_2$. *Erreichen* oder *überschreiten* x_1 und x_2 diese Schranken nach außen, so gelten folgende Interpretationen

einseitig: $\begin{cases} \lambda_1 < \lambda_2, \text{ wenn } x_1 \leqq x_l \text{ (Signifikanz } \alpha) \\ \lambda_1 > \lambda_2, \text{ wenn } x_1 \geqq x_r \text{ (Signifikanz } \alpha) \end{cases}$

zweiseitig: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, wenn x_1 und x_2 die Schranken x_l und x_r erreichen oder ... usw. (Signifikanz 2α)

(**829**)

Für Stichproben mit $x_1 + x_2 > 1000$ oder $t_1 \neq t_2$ siehe b.

b) *Mehrere Stichproben aus beliebigen Beobachtungseinheiten t_i*

Gegeben m Stichproben aus beliebigen Beobachtungseinheiten $t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_m$, in denen das E-Ereignis $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m$-mal eingetroffen ist. Man bilde

$$\lambda_i^* = \frac{x_i}{t_i} \quad \text{und} \quad \bar{\lambda} = (\Sigma x_i)/(\Sigma t_i)$$

und transformiere die x_i nach (**794**) und (**796**) wie folgt

$$\begin{aligned} c_i &= 2\left(\sqrt{x_i + 1} - \sqrt{t_i \bar{\lambda}}\right), \text{ wenn } \lambda_i^* < \bar{\lambda} \\ c_i &= 2\left(\sqrt{x_i} - \sqrt{t_i \bar{\lambda}}\right), \text{ wenn } \lambda_i^* > \bar{\lambda} \end{aligned} \quad (\textbf{830})$$

Vergleich dieser transformierten Daten und Interpretationen wie in Abschnitt 23 A, b, I und II, wobei λ und λ^* an Stelle von $\bar{p}$ und p zu setzen sind.

c) *Vertrauensgrenzen für die Häufigkeitszunahme eines seltenen Ereignisses*[42].

Gegeben seien zwei Stichproben der Umfänge N_1 und N_2, in denen das relativ *seltene* Ereignis E mit der relativen Häufigkeit $p_1 = x_1/N_1$ und $p_2 = x_2/N_2$ eingetroffen ist. *Die Stichproben sind so zu numerieren, daß $p_1 < p_2$.* Die Schätzung der *Zunahme* der relativen Häufigkeit von Stichprobe 1 zu Stichprobe 2 ist dann

$$Proc_{1\to 2} = \frac{p_2 - p_1}{p_1} \quad (\textbf{831})$$

mit den $(1-2\alpha)$-Vertrauensgrenzen für $\boldsymbol{Proc}_{1\to 2}$

$$k\left(\frac{1}{p_r} - 1\right) - 1 < \boldsymbol{Proc} < k\left(\frac{1}{p_l} - 1\right) - 1 \quad (\textbf{832})$$

wobei $k = N_1/N_2$ und p_r und p_l den Tafeln Vertrauensgrenzen für $\boldsymbol{p}$ der Binomialverteilung, S. 85–103, zu entnehmen sind bei $N = x_1 + x_2$ und $x = x_1$. Für Angaben in Prozenten sind (**831**) und (**832**) mit 100 zu multiplizieren. (**832**) läßt sich somit auch errechnen, wenn nur das *Verhältnis* N_1/N_2 und die absoluten Zahlen x_1 und x_2 bekannt sind. *Interpretation:* Wenn die linke Grenze von (**832**) $\leqq$ Null ist, läßt sich keine Häufigkeitszunahme feststellen.

24. Rangteste

24 A. Rangierung

a) *Nach Größe* (stetige Verteilungen). Gegeben seien 2 Stichproben 1 und 2 mit den x_1-Werten 1,06; 1,53; 1,68; 1,68; 1,69; 1,69 und den x_2-Werten 1,30; 1,55; 1,69; 1,80. Diese x_1- und x_2-Werte werden folgendermaßen rangiert:

x_1	1,06		1,53		1,68	1,68		1,69	1,69	
x_2		1,30		1,55			1,69			1,80
$O_{1,2}$	1	2	3	4	5	6	8	8	8	10
							$= (7+8+9)/3$			

(**833**)

Bei Bindungen [vgl. (**346**)] verfahre man, wie in (**833**) angegeben: Gebundene Werte *innerhalb* einer Stichprobe erhalten *fortlaufende* Ordnungszahlen, gebundene Werte *zwischen* den Stichproben den *Mittelwert* der an dieser Stelle befindlichen Ordnungszahlen. (**834**)

Die Ordnungszahlen O_1 der x_1-Werte sind im obigen Falle $O_1 = 1; 3; 5; 6; 8; 8$, ihre Summe $T_1 = \Sigma O_1 = 31$. (**835**)

Bei *gepaarten Beobachtungen* bilde man wie in Abschnitt 16 D die n Paardifferenz d_i, läßt alle d_i = Null weg unter entsprechender Verkleinerung von N und rangiert die *Absolutbeträge* dieser Differenzen. Darauf summiert man die Ordnungszahlen entweder aller negativen Differenzen und erhält T_- oder aller positiven Differenzen und erhält T_+. (**836**)

b) *Nach Reihenfolge* (diskrete Verteilungen). Wenn in einer Reihe von N Versuchen das Ereignis E beim 2., 3., 8. und 13. Versuch je einmal, total N_1-mal, zum Beispiel 4mal, eingetreten ist, so ist $O_E = 2, 3, 8$ und 13 und die Summe aller $O_E = T_E$, wie in unserem Falle $T_E = 26$. (**837**)

24 B. Der WILCOXON-Test für 2 Stichproben[43,44]

Gegeben zwei Stichproben aus *stetigen* Verteilungen *beliebiger* Gestalt. Man numeriere sie so, daß $N_1 \leqq 25$ und $N_2 \leqq 50$. Dann rangiere man die x_1-Werte nach (**833**) und (**834**) und bilde die Summe T_1 nach (**835**).

Die Signifikanzschranken für T_1 finden sich in den Tafeln S. 124–127. *Erreicht* T_1 die Signifikanzschranken oder *überschreitet sie nach außen*, so gilt

einseitig: $\begin{cases} x_1 < x_2, \text{ wenn } T_1 \leqq T_l\ (\leqq \alpha) \\ x_1 > x_2, \text{ wenn } T_1 \geqq T_r\ (\leqq \alpha) \end{cases}$

zweiseitig: $x_1 \neq x_2$, wenn $T_1 \leqq T_l$ oder $T_1 \geqq T_r\ (\leqq 2\alpha)$

(**838**)

Vgl. dazu Abschnitt 9 C.

Der Erwartungswert $\boldsymbol{T}_1$ für die Schätzung T_1 ist unter der Nullhypothese

$$\boldsymbol{T}_1 = N_1(N_1 + N_2 + 1)/2 \quad \text{oder} \quad (a)$$
$$6\,\boldsymbol{T}_1 = 3\,N_1(N_1 + N_2 + 1) \quad (b) \qquad (\textbf{839})$$

die Varianz $\sigma^2_{T_1} = N_2\,\boldsymbol{T}_1/12$ oder (a)
$\sigma^2_{6T_1} = N_2\,6\,\boldsymbol{T}_1$ (b) (**840**)

Für Stichproben außerhalb des Tafelumfanges verwende man den Prüfquotienten

$$(T_1 - \boldsymbol{T}_1)/\sqrt{\sigma^2_{T_1}} \quad \text{oder} \quad (6\,T_1 - 6\,\boldsymbol{T}_1)/\sqrt{\sigma^2_{6T_1}} \qquad (a)\ (b) \qquad (\textbf{841})$$

Signifikanzschranke c_α, S. 28.

24 C. Der WILCOXON-Test für Paardifferenzen[44]

(Vgl. dazu 24 B)

Man bilde nach (**836**) die Summe T_-. Die Anzahl der rangierten Paardifferenzen sei n (die Nullen sind ausgeschieden worden).

Signifikanzschranken für die Summe T_- finden sich auf S. 128. Sind die Differenzen gebildet worden nach $d_i = x_{1i} - x_{2i}$ und *erreicht* oder *überschreitet* die Summe T_- die Signifikanzschranken nach außen, so gilt

einseitig: $\begin{cases} x_1 > x_2, \text{ wenn } T_- \leqq T_l\ (\leqq \alpha) \\ x_1 < x_2, \text{ wenn } T_- \geqq T_r\ (\leqq \alpha) \end{cases}$

zweiseitig: $x_1 \neq x_2$, wenn $T_- \leqq T_l$ oder $T_- \geqq T_r$ $(\leqq 2\alpha)$

(**842**)

Der Erwartungswert $\boldsymbol{T}_-$ für die Schätzung T_- ist unter der Nullhypothese

$$\boldsymbol{T}_- = n(n+1)/4 \quad (\textbf{843})$$

die Varianz

$$\sigma^2_{T_-} = n\,\boldsymbol{T}/3 \quad (\textbf{844})$$

Für Stichproben außerhalb des Tafelumfanges verwende man den Prüfquotienten

$$(T_- - \boldsymbol{T}_-)/\sqrt{\sigma^2_{T_-}} \quad (\textbf{845})$$

Signifikanzschranke c_α, S. 28.

24 D. Der HALDANE-Test über den Einfluß der zeitlichen Reihenfolge[45]

Ist die zeitliche Reihenfolge vermutlich von Einfluß auf das Ereignis E, wie zum Beispiel bei der Annahme, Kinder, die in der Geburtenfolge *einer* Mutter später eintreffen, seien durch eine gewisse Krankheit mehr gefährdet, oder wenn man untersuchen will, ob die Operationssterblichkeit oder der Erfolg einer gewissen Operation im *selben* Spital mit der Zeit ab- oder zugenommen hat usw., so bietet der WILCOXON-Test die Möglichkeit einer exakten Prüfung. Er wurde von HALDANE für diese Fragestellung unabhängig von WILCOXON gefunden.

a) *Untersuchung einer zeitlichen Folge.* Man bildet nach (**837**) T_E. N_1 ist die Anzahl der Versuche (Geburten, Operationen usw.), in denen das Ereignis E eingetreten ist. N_2 ist $N - N_1$, wobei N = Gesamtanzahl der Versuche in der zu prüfenden Folge.

Die Signifikanzschranken für T_E sind dieselben wie in Abschnitt 24 B; die Interpretation ist aber vollständig anders. *Einseitige Interpretation:* Erreicht oder überschreitet T_E die *linke* Schranke, so *verkleinert* sich die Häufigkeit mit der Zeit; bei Erreichen oder Überschreiten der *rechten* Schranke ist es gerade *umgekehrt*. *Zweiseitige Interpretation:* Die zeitliche Reihenfolge beeinflußt die Häufigkeit. (**846**)

Konnten nicht alle Ereignisse der Folge spezifiziert werden, stellt sich zum Beispiel in der Folge die Sequenz ein

Versuch	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	+	+	?	−	+	?	+	−	+	?	+
O_E				5				9			
$O_?$			4			7				11	

(**847**)

dann lassen sich die Tafeln S. 124–127 nicht mehr verwenden. Man prüfe in solchen Fällen mit dem Prüfquotienten (**841** b), wobei

$$6\,T_E = 6\,\Sigma\,O_E \quad \text{(a)}$$
$$6\,\boldsymbol{T}_E = 6\,N_1\,A/N \quad \text{(b)}$$
$$\sigma^2_{6\boldsymbol{T}_E} = 36\,N_1\,N_2\,(N\,B - A^2)/N^2\,(N-1) \quad \text{(c)}$$
$$A = N(N+1)/2 - \Sigma\,O_? \quad \text{(d)}$$
$$B = N[1 + N(2\,N+3)]/6 - \Sigma\,O_?^2 \quad \text{(e)}$$

(**848**)

Sind alle Ereignisse spezifiziert, überschreitet die Stichprobe aber den Tafelumfang, so gelten für (**841** b) die Gleichungen (**839** b) und (**840** b).

b) *Untersuchung mehrerer zeitlicher Folgen als Stichproben aus der gleichen Bevölkerung.* Man untersucht zum Beispiel die Geburtenfolgen von $1, 2, 3, \ldots, i, \ldots, m$ Müttern hinsichtlich einer Krankheit der Kinder, die bei späteren Geburten häufiger zu sein scheint.

Die Prüfung erfolgt nach dem Prüfquotienten (**841** b), wobei

$$6\,T = \Sigma\,6\,T_i$$
$$6\,\boldsymbol{T} = \Sigma\,6\,\boldsymbol{T}_i$$
$$\sigma^2_{6T} = \Sigma\,\sigma^2_{6T_i}$$

(**849**)

wobei $6\,\boldsymbol{T}_i$ bzw. $\sigma^2_{6T_i}$ nach (**839** b) bzw. (**840** b) oder nach (**848** b) bzw. (**848** c) auszurechnen sind, je nachdem, ob in der Folge i alle Ereignisse spezifiziert sind oder nicht.

24 E. Der Maximum-Test für Paardifferenzen[26, 46–48]

(Name auf Vorschlag von E. WALTER. Dieser Test wurde hier eingeordnet, weil es sich auch um die Beurteilung einer Rangfolge handelt, aber auf eine andere Weise als beim WILCOXON-Test.)

Bei gepaarten Beobachtungen aus *stetigen* Bevölkerungen *beliebiger* Gestalt bilde man wie in Abschnitt 16 D die Paardifferenzen d_i, schließt alle d_i = Null aus und ordne die verbliebenen d_i nach ihrem *Absolutbetrage*. Treten zwei dem Absolutbetrage nach gleich große Differenzen mit verschiedenen Vorzeichen auf, so ordne man sie, um sicherzugehen, so ein, daß eine eventuell bestehende Folge gleichen Vorzeichens verkleinert wird. Dann zählt man die k absolut größten Differenzen mit *gleichem* Vorzeichen ab.

Die Signifikanzwahrscheinlichkeit für einen Unterschied zwischen den beiden Meßreihen (zweiseitiger Test) ist dann $2\alpha = (1/2)^{k-1}$, das heißt

$k = 5$	$2\alpha = 0{,}0625 \sim 0{,}1$	$\alpha = 0{,}031\,25 \sim 0{,}05$
6	$= 0{,}031\,25 \sim 0{,}05$	$= 0{,}015\,625 \sim 0{,}02$
8	$= 0{,}007\,8125 \sim 0{,}01$	$= 0{,}003\,906\,25 \sim 0{,}005$
11	$= 0{,}000\,9725 \sim 0{,}001$	$= 0{,}000\,486\,25 \sim 0{,}0005$

(**850**)

Beispiel 73. Die Folge $+3{,}2; +2{,}0; +1{,}0; +1{,}0; +0{,}7; +0{,}5; \underbrace{-0{,}3; +0{,}3}$

(beachte die ungünstigere Anordnung von $-0{,}3$)

führt zu einer Signifikanzwahrscheinlichkeit von $2\alpha \sim 0{,}05$.

25. Prüfung auf Nichtzufall

Alle statistischen Prüfungen auf Nichtzufall hängen von der *zeitlichen* Reihenfolge ab, mit der in der Folge der Versuche $1, 2, \ldots, N$ die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_N$ eintreffen. Die Indices $1, 2, \ldots, i, \ldots, N$ bedeuten in diesem Abschnitt *nicht eine Rang-, sondern eine zeitliche Reihenfolge.*

25 A. Die sukzessive Differenzenstreuung[49]

(Mean square successive difference)

Die sukzessive Differenzenstreuung δ^2 ist definiert

$$\delta^2 = \frac{1}{N-1}\sum_1^{N-1}(x_{i+1} - x_i)^2;\ N = \text{Umfang der Stichprobe} \quad (\mathbf{851})$$

Wenn die Stichprobe aus einer normalverteilten Bevölkerung stammt, ist der

$$\text{Erwartungswert von } \delta^2 = 2\,\sigma^2 \quad (\mathbf{852})$$

$\delta^2/2$ ist somit eine biasfreie Schätzung von σ^2 mit einer

$$\text{Effizienz} = 2/3\,[1 + 1/(3\,N - 4)] \quad (\mathbf{853})$$

Die Effizienz für $N = 2$ ist somit 1, asymptotisch, wenn $N \to \infty$, gleich $^2/_3$.

Da die sukzessive Differenzenstreuung auf Grund der sukzessiven Differenzen $x_{i+1} - x_i$ berechnet wird, ist sie *weniger* empfindlich auf *langfristige* Verschiebungen des Mittelwertes und *empfindlicher* auf schnelle *zyklische* Beeinflussung desselben als die Schätzung s^2, die auf Grund der Differenzen $x - \bar{x}$ berechnet wird.

$$\text{Das Verhältnis } \eta = \frac{\delta^2}{s^2} = \frac{\sum_1^{N-1}(x_{i+1} - x_i)^2}{\sum_1^{N}(x_i - \bar{x})^2} \quad (\mathbf{854})$$

ist deshalb ein Indikator für eventuelle nichtzufällige Beeinflussung des Mittelwertes einer *normalverteilten* Bevölkerung.

Signifikanzschranken für η finden sich auf S. 58, links. *Interpretation:* Erreicht oder unterschreitet η die *linke* Schranke, so wird der Mittelwert der Bevölkerung durch *nichtzufällige* langfristige Einwirkung beeinflußt*, bei Erreichen oder Überschreiten der *rechten* Schranke durch *kurzfristige zyklische* Einwirkungen (Signifikanz α). (**855**)

Die approximierten Schranken ($N > 60$) der Tafel S. 58 wurden berechnet mit

$$\eta_l,\ \eta_r = 2 \mp 2\,|\,c_\alpha\,|\,\sqrt{\frac{N-2}{(N-1)\,(N+1)}} \quad (\mathbf{856})$$

mit empirischer Korrektur beim Übergang zwischen exakten und approximierten Werten.

25 B. Die Serienkorrelation[50,51], auch Paarkorrelation genannt

(Serial correlation)

Gegeben sei die Stichprobe $x_1, x_1, \ldots, x_N$. Die Serienkorrelation ist definiert als die Korrelation zwischen den Beobachtungspaaren x_i und x_{i+h}. h wird Verzugsspanne (lag) genannt. Für $i + h > N$ ist in der zyklischen Definition $x_{i+h} = x_{i+h-N}$. Wir können hier nicht näher auf die Serienkorrelation eintreten und verweisen auf [50–52] und andere Publikationen.

Die Serienkorrelation in zyklischer Definition ist ein empfindliches Instrument zur Entdeckung periodischer Beeinflussung einer Bevölkerung (oder Stichprobe, wenn Bevölkerung stabil).

* Es können lineare oder nichtlineare Einflüsse sein.

Ein Maß für die Serienkorrelation mit der Verzugsspanne h ist der Serienkorrelationskoeffizient $\boldsymbol{R}_h$. Seine Schätzung ist

$$R_h = \frac{\Sigma x_i x_{i+h} - \bar{x}\,\Sigma x_i}{\Sigma (x - \bar{x})^2} \qquad \textbf{(857)}$$

Sein Wert liegt wie bei den anderen Korrelationskoeffizienten zwischen -1 und 1.

Signifikanzschranken für $R_h = 1$ unter der Annahme, daß es sich um zufällige Stichproben aus einer normalverteilten Bevölkerung handelt, findet man auf S. 58, rechts. Die approximierten Grenzen ($N > 75$) wurden berechnet mit

$$R_l,\ R_r = \frac{-1 \mp |c_\alpha| \sqrt{N-2}}{N-1} \qquad \textbf{(858)}$$

mit empirischer Korrektur beim Übergang zwischen exakten und approximierten Werten. Mit der Approximation bleibt man auf der sicheren Seite.

Für andere Verzugsspannen als 1 können die gleichen Schranken verwendet werden, sofern h und N keinen gemeinsamen Faktor besitzen. Dies ist immer der Fall, wenn N eine Primzahl ist. In der Praxis behilft man sich deshalb damit, diesen Bedingungen zu genügen, indem man einen oder mehrere Stichprobeneinzelwerte streicht.

25 C. Auf- und Ab-Iterationen[63-55]

(Runs up and down)

$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N$ seien Stichprobeneinzelwerte aus einer *stetigen* Bevölkerung *beliebiger* Gestalt. Als Auf-Iteration der Länge 1 wird die Sequenz $x_i \to x_{i+1}$ definiert, wenn $x_{i+1} - x_i > 0$. Bei der Ab-Iteration ist $x_{i+1} - x_i < 0$. Folgen sich $1 + 1 + 1$ Auf-Iterationen, so spricht man von einer Auf-Iteration der Länge $l = 3$ usw.

Ist die Stichprobe zufälliger Art, sind keine zyklischen oder konstanten nichtzufälligen Einflüsse am Werke, so sollten die Auf- und Ab-Iterationen ein zufälliges Bild bieten. Regelmäßige Iterationen oder zu viele lange oder zu wenig kurze passen nicht in dieses Bild.

Die unterste Tafel auf S. 130 bietet eine Handhabe zur Prüfung von Auf- und Ab-Iterationen. So ist zum Beispiel eine Iteration der Länge 5 in einer Stichprobe $N = 9$ nicht mehr als zufällig anzusehen ($\alpha = 0{,}01$). Desgleichen ist eine Stichprobe $N = 12$ nicht mehr als zufällig anzusehen, wenn keine Iteration der Länge 12 vorhanden ist (Signifikanzwahrscheinlichkeit $1 - 0{,}99 = 0{,}01$).

Die Anzahl $I\,(l \mid N)$ der Auf- und Ab-Iterationen der Länge l und die Anzahl $I\,(l+ \mid N)$ der Iterationen der Länge l und *länger* kann von $N = 20$ an als normalverteilt angesehen werden und läßt sich prüfen mit dem Prüfquotienten

$$(I - \boldsymbol{I})/\sqrt{\sigma_I^2};\ \text{Signifikanzschranke} \mid c_\alpha \mid,\ \text{S. 28} \qquad \textbf{(859)}$$

Der Erwartungswert $\boldsymbol{I}$ und die Varianz σ_I^2 sind Funktionen von N. Die entsprechenden Formeln finden sich bei [63]. Numerisch sind sie zum Teil mühsam auszurechnen. Ihre Werte werden in den folgenden 2 Tabellen bis zu jenen Längen gegeben, die praktisch nicht mehr vorkommen. Diese Tafeln zeigen sehr schön, wie σ^2 mit größeren Längen schnell gegen den Erwartungswert konvergiert. Nach (**789**) kann die Verteilung der Auf- und Ab-Iterationen deshalb *sehr* gut durch die POISSON-Verteilung (oder Approximationen der POISSON-Verteilung) approximiert werden, wobei $\lambda = \boldsymbol{I}$.

Erwartungswert $\boldsymbol{I}\ (l \mid N)$ und Varianz der Auf- und Ab-Iterationen der Länge l

Länge	Erwartungswert $\boldsymbol{I}(l \mid N)$ exakt: $\boldsymbol{I}(l \mid N) = aN - b$		Erwartungswert $\boldsymbol{I}(l \mid N)$ asymptotisch $\boldsymbol{I}(l \mid N) \to \boldsymbol{I}(1+\mid N) \times c$ $(N \to \infty)$	Varianz $\sigma_I^2 = d \times \boldsymbol{I}(l \mid N) + e$		Bemerkungen
l	a	b	c	d	e	Beachte
1	4,16̇ $\times 10^{-1}$	$-$ 8,3̇ $\times 10^{-2}$	6,25 $\times 10^{-1}$	1,01̇6̇	$-$ 0,397 2̇	$-$ bei b und e
2	1,83̇ $\times 10^{-1}$	2,3̇ $\times 10^{-1}$	2,75 $\times 10^{-1}$	0,614 550	$-$ 0,019 433 42	$-$ bei e
3	5,27̇ $\times 10^{-2}$	1,30̇5̇ $\times 10^{-1}$	7,91̇6̇ $\times 10^{-2}$	0,794 215	0,006 782 18	
4	1,150 793 65 $\times 10^{-2}$	4,126 984 13 $\times 10^{-2}$	1,726 190 48 $\times 10^{-2}$	0,935 800	0,000 839 24	
5	2,033 730 16 $\times 10^{-3}$	9,474 206 34 $\times 10^{-3}$	3,050 595 24 $\times 10^{-3}$	0,985 361	0,000 046 29	
6	3,031 305 11 $\times 10^{-4}$	1,730 599 65 $\times 10^{-3}$	4,546 957 67 $\times 10^{-4}$	0,997 338	0,000 001 56	
7	3,913 139 33 $\times 10^{-5}$	2,639 991 18 $\times 10^{-4}$	5,869 708 99 $\times 10^{-5}$	0,999 595	0,000 000 04	
8	4,459 275 29 $\times 10^{-6}$	3,467 211 80 $\times 10^{-5}$	6,688 912 94 $\times 10^{-6}$	0,999 947	0,000 000 00	
9	4,551 133 02 $\times 10^{-7}$	4,004 161 99 $\times 10^{-6}$	6,826 699 53 $\times 10^{-7}$	0,999 994	0,000 000 00	
10	4,207 469 48 $\times 10^{-8}$	4,130 386 07 $\times 10^{-7}$	6,311 204 22 $\times 10^{-8}$	0,999 999	0,000 000 00	

(860)

Erwartungswert $\boldsymbol{I}\ (l+ \mid N)$ und Varianz der Auf- und Ab-Iterationen der Länge l und länger

Länge	Erwartungswert $\boldsymbol{I}(l+ \mid N)$ exakt: $\boldsymbol{I}(l+ \mid N) = aN - b$		Erwartungswert $\boldsymbol{I}(l+ \mid N)$ asymptotisch $\boldsymbol{I}(l+ \mid N) \to \boldsymbol{I}(1+\mid N) \times c$ $(N \to \infty)$	Varianz $\sigma_I^2 = d \times \boldsymbol{I}(l+ \mid N) + e$		Bemerkungen
$l+$	a	b	c	d	e	Beachte
1	6,6̇ $\times 10^{-1}$	3,3̇ $\times 10^{-1}$	1	0,2̇6̇	$-$ 0,2̇3̇	$-$ bei e
2	2,5 $\times 10^{-1}$	4,16̇ $\times 10^{-1}$	3,75 $\times 10^{-1}$	0,31̇6̇	0,07 2̇	
3	6,6̇ $\times 10^{-2}$	1,83̇ $\times 10^{-1}$	1 $\times 10^{-1}$	0,710 847	0,017 294 97	
4	1,38̇ $\times 10^{-2}$	5,27̇ $\times 10^{-2}$	2,08̇3̇ $\times 10^{-2}$	0,917 857	0,001 478 17	
5	2,380 9̇5̇ $\times 10^{-3}$	1,150 793 65 $\times 10^{-2}$	3,571 428 57 $\times 10^{-3}$	0,982 145	0,000 070 53	
6	3,47 2̇ $\times 10^{-4}$	2,033 730 16 $\times 10^{-3}$	5,208 3̇ $\times 10^{-4}$	0,996 871	0,000 002 20	
7	4,409 171 08 $\times 10^{-5}$	3,031 305 11 $\times 10^{-4}$	6,613 756 61 $\times 10^{-5}$	0,999 535	0,000 000 05	
8	4,960 317 46 $\times 10^{-6}$	3,913 139 33 $\times 10^{-5}$	7,440 476 19 $\times 10^{-6}$	0,999 940	0,000 000 00	
9	5,010 421 67 $\times 10^{-7}$	4,459 275 29 $\times 10^{-6}$	7,515 632 51 $\times 10^{-7}$	0,999 993	0,000 000 00	
10	4,592 886 53 $\times 10^{-8}$	4,551 133 02 $\times 10^{-7}$	6,889 329 80 $\times 10^{-8}$	0,999 999	0,000 000 00	
11	3,854 170 52 $\times 10^{-9}$	4,207 469 48 $\times 10^{-8}$	5,781 255 78 $\times 10^{-9}$	0,999 999	0,000 000 00	

(861)

25 D. Iterationen um den Median[56]

(Tafel S. 130)

Die Tafel auf S. 130 bietet eine Handhabe zur Beurteilung von Iterationen über und/oder unter dem Median. Die dort angegebenen Anweisungen genügen für die Praxis.

25 E. Iterationen in Stichproben aus einer binomialen Bevölkerung, deren Wahrscheinlichkeiten p und q unbekannt sind

(Tafel S. 129)

Definition:

(Zeit)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Folge (I)	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{A}$	$\underline{A}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{B}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{A}$
Folge (II)	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{A}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{A}$
Folge (III)	$\underline{A}$	$\underline{A}$	$\underline{A}$	$\underline{A}$	$\underline{A}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{B}$	$\underline{B}$	$\underline{B}$

Jede der Folgen (I), (II), (III) hat einen Umfang von $N = 10$ und eine Anzahl B von $N_1 = 4$ und eine Anzahl A von $N_2 = 6$. (Man nenne, sofern $N = N_1 + N_2 < 40$, die kleinere Anzahl N_1). In diesen Folgen bilden die unterstrichenen Buchstaben je eine Iteration (englisch *run*). Das Total der Iterationen I ist bei Folge (I) = 7, bei Folge (II) = 9, bei Folge (III) = 2.

Die Tafel auf S. 129 gibt die Signifikanzschranken für die Schätzung I (total $\mid N_1, N_2$) des Erwartungswertes $\boldsymbol{I}$ (total) unter der Bedingung (N_1, N_2).

a) Wird die linke Schranke *erreicht* oder *unterschritten*, so ist:
$I < \boldsymbol{I}$ (Signifikanzwahrscheinlichkeit α) oder
$I \neq \boldsymbol{I}$ (Signifikanzwahrscheinlichkeit 2α).

b) Wird die rechte Schranke *erreicht* oder *überschritten*, so ist:
$I > \boldsymbol{I}$ (Signifikanzwahrscheinlichkeit α) oder
$I \neq \boldsymbol{I}$ (Signifikanzwahrscheinlichkeit 2α).

c) Liegt I zwischen den Schranken und *erreicht sie nicht*, so kann die Nullhypothese nicht verworfen werden.

Für N_1, N_2 außerhalb des Tafelumfanges kann der Prüfquotient (**859**) verwendet werden, wobei man (**868**a) und (**868**b) einsetzt.

Erwartungswerte und Varianzen

– für die Anzahl der Iterationen der Länge l des Ereignisses 1, das total N_1-mal eingetroffen ist (N_2 = Anzahl der Ereignisse 2, $N = N_1 + N_2$).

$$\boldsymbol{I}_1(l \mid N_1, N_2) = N_2(N_2+1)\frac{N_1!\,(N-l-1)!}{N!\,(N_1-l)!} \quad \text{(a)}$$

$$\sigma^2 = \boldsymbol{I}\left[1 - \boldsymbol{I} + N_2(N_2-1)\frac{(N-2l-2)!\,(N_1-l)!}{(N-l-1)!\,(N_1-2l)!}\right] \quad \text{(b)} \qquad \text{(862)}^{57}$$

asymptotisch für größere N

$$\boldsymbol{I}_1(l \mid N_1, N_2) = Np^lq^2 \quad \text{(a)}$$

$$\sigma^2 = \boldsymbol{I}\left\{1 - \frac{\boldsymbol{I}}{N}\left[\frac{l^2}{p} + \frac{2}{q} - (l+1)^2\right]\right\} \quad \text{(b)} \qquad p = N_1/N,\ q = N_2/N \qquad \text{(863)}^{57}$$

– für die Anzahl der Iterationen der Länge l und *länger* des Ereignisses 1

$$\boldsymbol{I}_1(l+ \mid N_1, N_2) = (N_2+1)\frac{N_1!\,(N-l)!}{N!\,(N_1-l)!} \quad \text{(a)}$$

$$\sigma^2 = \boldsymbol{I}\left[1 - \boldsymbol{I} + N_2\frac{(N-2l)!\,(N_1-l)!}{(N-l)!\,(N_1-2l)!}\right] \quad \text{(b)} \qquad \text{(864)}^{57}$$

asymptotisch

$$\boldsymbol{I}_1(l+ \mid N_1, N_2) = Np^lq \quad \text{(a)}$$

$$\sigma^2 = \boldsymbol{I}\left\{1 - \frac{\boldsymbol{I}}{N}\left[\frac{l^2q}{p} + \frac{1}{q}\right]\right\} \quad \text{(b)} \qquad p \text{ und } q \text{ wie in (863)} \qquad \text{(865)}^{57}$$

– für die Anzahl aller Iterationen des Ereignisses 1

$$\boldsymbol{I}_1(\text{total} \mid N_1, N_2) = \boldsymbol{I}_1(1+ \mid N_1, N_2) = \frac{N_1(N_2+1)}{N} \quad \text{(a)}$$

$$\sigma^2 = \frac{\boldsymbol{I}(\boldsymbol{I}-1)}{N-1} \quad \text{(b)} \qquad \text{(866)}^{58}$$

asymptotisch

$$\boldsymbol{I}_1(\text{total} \mid N_1, N_2) = \boldsymbol{I}(1+ \mid N_1, N_2) = Npq \quad \text{(a)}$$

$$\sigma^2 = \boldsymbol{I}^2/N \quad \text{(b)} \qquad p \text{ und } q \text{ wie in (863)} \qquad \text{(867)}^{57}$$

– für die Anzahl aller Iterationen der Ereignisse 1 und 2

$$\boldsymbol{I}_{1+2}(\text{total} \mid N_1, N_2) = \frac{2N_1N_2}{N} + 1 \quad \text{(a)}$$

$$\sigma^2 = \frac{(\boldsymbol{I}-1)(\boldsymbol{I}-2)}{N-1} \quad \text{(b)} \qquad \text{(868)}^{59}$$

asymptotisch

$$\boldsymbol{I}_{1+2}(\text{total} \mid N_1, N_2) = 2Npq \quad \text{(a)}$$

$$\sigma^2 = \boldsymbol{I}^2/N \quad \text{(b)} \qquad p \text{ und } q \text{ wie in (863)} \qquad \text{(869)}^{59}$$

Die Anzahl aller Iterationen des Ereignisses 1 läßt sich exakt (innerhalb des Umfanges der Tafeln S. 109–123) mit dem Vierfelder-Test prüfen[58]. Man bilde

I_1	$N_1 - I_1$	N_1
$N_2 + 1 - I_1$	$I_1 - 1$	N_2
$N_2 + 1$	$N_1 - 1$	N

(**870**)

25 F. Der WALD- und WOLFOWITZ-Test[59]

Gegeben 2 Stichproben aus *stetigen* Bevölkerungen *beliebiger* Gestalt. Man rangiert sie wie in (**833**). *Aufeinanderfolgende* Ordnungszahlen *einer* Stichprobe definieren nun eine Iteration. Man zählt die Gesamtanzahl aller Iterationen und prüft sie mit Tafel S. 129 (vgl. Abschnitt 25 E) oder außerhalb des Tafelumfanges mit (**859**), indem man (**868**a und b) oder (**869**a und b) einsetzt.

Beispiel 74: Rangierung und Bestimmung der Iteration (hier ist 1, 2, ... eine Rangfolge).

Stichprobe 1	1,55	1,58	1,70		1,92			2,20	2,21		
Stichprobe 2				1,91		1,93	2,00			2,30	2,40
$O_{1,2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Iteration 1 u. 2		1		1	1		1		1		1

Total der Iterationen: 6, $N = 11$, $N_1 = 6$, $N_2 = 5$.

Erreicht oder *unterschreitet* die Gesamtzahl der Iterationen die *linke* Schranke (nur diese ist in diesem Test zu gebrauchen!), so gilt die Interpretation: Die Stichproben entstammen nicht derselben Bevölkerung (2α).

Die Macht dieses Testes nimmt bei steigendem Stichprobenumfang ab.

25 G. Iterationen in Stichproben aus binomialen Bevölkerungen, deren Wahrscheinlichkeiten $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$ bekannt sind

Erwartungswerte und Varianzen

– für die Anzahl der Iterationen des Ereignisses 1, dessen Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden, gleich $\boldsymbol{p}$ ist

$$\boldsymbol{I}_1(l \mid N, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}^l\boldsymbol{q}\,[(N-l-1)\,\boldsymbol{q} + 2];\ (l < N)$$
$$= \boldsymbol{p}^l \qquad ;\ (l = N) \qquad \text{(871)}^{60}$$

σ^2 es ist uns keine korrekte Formel bekannt

asymptotisch

$$\boldsymbol{I}_1(l \mid N, \boldsymbol{p}) = N\boldsymbol{p}^l\boldsymbol{q}^2 \quad \text{(a)}^{60}$$

$$\sigma^2 = \boldsymbol{I}\left\{1 - \boldsymbol{p}^l\boldsymbol{q}^2\left[2\left(l - \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}\right) + 1\right]\right\} \quad \text{(b)}^{57} \qquad \text{(872)}$$

– für die Anzahl der Iterationen der Länge l und *länger*

$$\boldsymbol{I}_1(l+ \mid N, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}^l\,[(N-l)\,\boldsymbol{q} + 1]$$

σ^2 es ist uns keine korrekte Formel bekannt $\qquad$ (873)[60]

asymptotisch

$$\boldsymbol{I}_1(l+ \mid N, \boldsymbol{p}) = N\boldsymbol{p}^l\boldsymbol{q} \quad \text{(a)}^{60}$$

$$\sigma^2 = \boldsymbol{I}[1 - \boldsymbol{p}^l\boldsymbol{q}\,(2l+1)] \quad \text{(b)}^{57} \qquad \text{(874)}$$

– für die Anzahl aller Iterationen des Ereignisses 1

$$\boldsymbol{I}_1(\text{total} \mid N, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}\,[(N-1)\,\boldsymbol{q} + 1] \quad \text{(a)}^{60}$$

$$\sigma^2 = \boldsymbol{I}(1-\boldsymbol{I}) + (N-2)\,\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{q}\,[(N-3)\,\boldsymbol{q} + 2] \quad \text{(b)}^{57} \qquad \text{(875)}$$

asymptotisch

$$\boldsymbol{I}_1(\text{total} \mid N, \boldsymbol{p}) = N\boldsymbol{p}\boldsymbol{q} \quad \text{(a)}$$

$$\sigma^2 = \boldsymbol{I}(1 - 3\,\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}) \quad \text{(b)} \qquad \text{(876)}^{60}$$

– für die Anzahl aller Iterationen der Ereignisse 1 und 2

$$\boldsymbol{I}_{1+2}(\text{total} \mid N, \boldsymbol{p}) = 2(N-1)\,\boldsymbol{p}\boldsymbol{q} + 1 \quad \text{(a)}$$

$$\sigma^2 = 2\,\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}\,\{2\,[N - (3N-5)\,\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}] - 3\} \quad \text{(b)} \qquad \text{(877)}^{60}$$

asymptotisch

$$\boldsymbol{I}_{1+2}(\text{total} \mid N, \boldsymbol{p}) = 2N\boldsymbol{p}\boldsymbol{q} \quad \text{(a)}$$

$$\sigma^2 = \boldsymbol{I}(2 - 3\,\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}) \quad \text{(b)} \qquad \text{(878)}^{60}$$

25 H. Iterationen in Stichproben aus multinomialen Bevölkerungen

a) *Die Wahrscheinlichkeiten $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_i, \ldots, \boldsymbol{p}_k$ sind unbekannt.*

Erwartungswerte und Varianzen

– für die Anzahl aller Iterationen des Ereignisses i, das N_i-mal eingetroffen ist

$$\boldsymbol{I}_i(\text{total} \mid N_i, N) = \frac{N_i(N-N_i-1)}{N} \quad \text{(a)}$$

$$\sigma^2 = \frac{\boldsymbol{I}(\boldsymbol{I}-1)}{N-1} \quad \text{(b)} \qquad \text{(879)}^{57}$$

asymptotisch

$$\boldsymbol{I}_i(\text{total} \mid N_i, N) = Np_i(1-p_i) \quad \text{(a)}$$

$$\sigma^2 = \boldsymbol{I}^2/N \quad \text{(b)} \qquad p_i = \frac{N_i}{N} \qquad \text{(880)}^{57}$$

– für die Anzahl aller Iterationen aller Ereignisse

asymptotisch

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{I}(\text{total}, N) &= N(1-\sum_1^k p_i^2) \\ \sigma^2 &= N[\sum p_i^3 - 2\sum p_i^3 - (\sum p_i^2)^2] \end{aligned}\right\} p_i \text{ wie in (880)} \quad \left.\begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix}\right\} \textbf{(881)}^{57}$$

wenn $N_1 = N_2 = \ldots = N_k = N_0$, wird **(877)**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{I}(\text{total}) &= N(1-p) \\ \sigma^2 &= p\boldsymbol{I} \end{aligned}\right\} p = 1/k \quad \left.\begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix}\right\} \textbf{(882)}$$

b) *Die Wahrscheinlichkeiten $\boldsymbol{p}_i$ sind bekannt*

$\boldsymbol{p}_i$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses i, gezogen zu werden.

Erwartungswerte und Varianzen

– für die Anzahl aller Iterationen des Ereignisses i

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{I}_i(\text{total} \mid N, \boldsymbol{p}_i) &= \boldsymbol{p}_i[(N-1)(1-\boldsymbol{p}_i)+1] \\ \sigma^2 &= N\boldsymbol{p}_i(1-4\boldsymbol{p}_i+6\boldsymbol{p}_i^2-3\boldsymbol{p}_i^3)+ \\ &\quad +\boldsymbol{p}_i^2(3-8\boldsymbol{p}_i+5\boldsymbol{p}_i^2) \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix}\right\} \textbf{(883)}^{57}$$

Formel **(883)** ist identisch mit **(875)**, wenn in **(875)** $\boldsymbol{p}_i$ an Stelle von $\boldsymbol{p}$ und $1-\boldsymbol{p}$ an Stelle von $\boldsymbol{q}$ eingesetzt wird.

asymptotisch

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{I}_i(\text{total} \mid N, \boldsymbol{p}_i) &= N\boldsymbol{p}_i(1-\boldsymbol{p}_i) \\ \sigma^2 &= \boldsymbol{I}[1-3\boldsymbol{p}_i(1-\boldsymbol{p}_i)] \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix}\right\} \textbf{(884)}^{57}$$

– für die Anzahl aller Iterationen aller Ereignisse

asymptotisch

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{I}(\text{total}) &= N(1-\sum \boldsymbol{p}_i^2) \\ \sigma^2 &= N[\sum \boldsymbol{p}_i^2 + 2\sum \boldsymbol{p}_i^3 - 3(\sum \boldsymbol{p}_i^2)^2] \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix}\right\} \textbf{(885)}^{57}$$

wenn $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 = \cdots = \boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{p} = 1/k$

wird **(885)**

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{I}(\text{total}) &= N(1-\boldsymbol{p}) \\ \sigma^2 &= \boldsymbol{p}\boldsymbol{I} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix}\right\} \textbf{(886)}^{57}$$

26. Sequentialanalyse

Die Sequentialanalyse ist einer der modernsten Zweige der Statistik. Leider können wir darauf nicht eintreten.

Im folgenden sind zwei Pläne[61] gegeben, die es gestatten, ohne Rechnung zum Beispiel einen Vergleich zwischen zwei Medikamenten durchzuführen.

Anwendungsbeispiel 75. Es soll geprüft werden, ob Medikament A besser sei als Medikament B. Aus dem Patientenmaterial werden zwei Patienten herausgegriffen. Beide sind *gleichzeitig* oder *kurz* nacheinander zu behandeln, wobei ein Münzenwurf entscheide, welcher Patient das Medikament A erhalten soll. Die Beurteilung der Wirkung erfolgt nach der Skala

Mittel A besser Mittel B besser kein Unterschied

Ist Mittel A besser, kreuze man in den Abbildungen 49 und 50 das Feld *senkrecht über* dem schwarzen Quadrat an. Ist Mittel B besser, markiere man das Feld *waagrecht daneben*. Besteht kein Unterschied, wird kein Eintrag gemacht. Danach schreitet man zum zweiten Versuch, der gleich angelegt wird, wie oben beschrieben. Das Resultat wird in derselben Weise eingetragen wie beim ersten

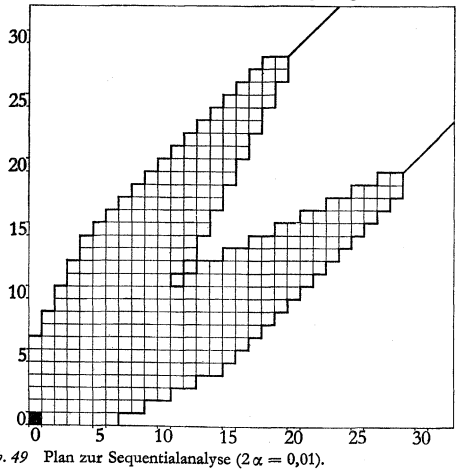


Abb. 49 Plan zur Sequentialanalyse ($2\alpha = 0{,}01$).

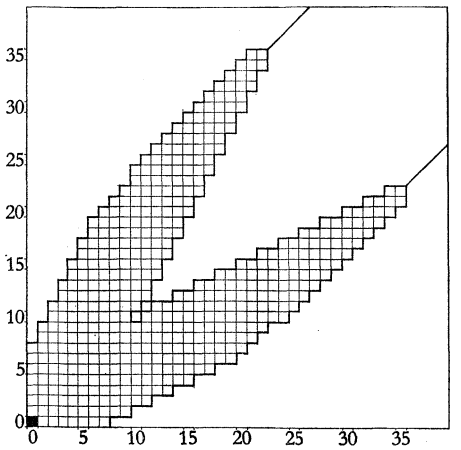


Abb. 50 Plan zur Sequentialanalyse ($2\alpha = 0{,}05$).

Versuch, als Bezugsquadrat dient hingegen das beim ersten Versuch markierte Feld, beim dritten Versuch das im zweiten Versuch markierte Feld usw. Sobald im Laufe der Versuchsserie eine Grenze überschritten wird, gilt:

a) obere Grenze: Medikament A ist besser
b) untere Grenze: Medikament B ist besser
c) mittlere Grenze: kein Unterschied festzustellen

Signifikanzwahrscheinlichkeit von a) und b): 2α.

Literatur

1) De Laplace, M., *Théorie analytique des probabilités*, 3. Aufl., Paris (1820). *2)* Molina, E. C., *Poisson's Exponential Binomial Limit*, Princeton (1942). *3)* Pearson, K., *Tables of the Incomplete Beta-Function*, Cambridge (1934). *4) Tables of the Binomial Probability Distribution*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 6, Washington (1949). *5)* Rao, C. R., *Bull. Calcutta math. Soc.*, **37**, 81 (1945). *6)* Cramér, H., *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton (1946). *7)* Neyman, J., *Ann. math. Statist.*, **6**, 111 (1935). *8)* Neyman, J., *Phil. Trans. A*, **236**, 333 (1937). *9)* Neyman, J., *Biometrika*, **32**, 128 (1941/42). *10)* Proschan, F., *J. Amer. statist. Ass.*, **48**, 550 (1953). *11) Tables of Normal Probability Functions*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 23, Washington (1953). *12)* Bliss, C. I., *Ann. appl. Biol.*, **22**, 134 (1935). *13)* Fisher und Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, 4. Aufl., Edinburgh (1953). *14)* Pearson und Hartley (Hrsg.), *Biometrika Tables for Statisticians*, Bd. 1, Cambridge (1954). *15)* Finney, D. J., *Probit Analysis*, 2. Aufl., Cambridge (1952). *16)* Wilson und Hilferty, *Proc. nat. Acad. Sci. (Wash.)*, **17**, 684 (1931). *17)* Fisher, R. A., On a Distribution Yielding the Error Function of Several Well-Known Statistics, *Proceedings of the International Mathematical Congress*, Bd. 2, Toronto (1924), S. 805. *18)* Eisenhart et al. (Hrsg.), *Selected Techniques of Statistical Analysis for Scientific and Industrial Research and Production and Management Engineering*, New York und London (1947), S. 108. *19)* Vgl. Tippett, L. H. C., *Biometrika*, **17**, 364 (1925). *20)* Davies und Pearson, Suppl. to *J. roy. statist. Soc.*, **1**, 76 (1934). *21)* Dixon, W. J., *Ann. math. Statist.*, **21**, 488 (1950). *22)* Dixon, W. J., *Ann. math. Statist.*, **22**, 68 (1951). *23)* Dixon, W. J., *Biometrics*, **9**, 74 (1953). *24)* Lord, E., *Biometrika*, **34**, 41 (1947). *25)* Walsh, J. E., *Ann. math. Statist.*, **20**, 257 (1949). *26)* Walsh, J. E., *J. Amer. statist. Ass.*, **44**, 342 (1949). *27)* Welch, B. L., *Biometrika*, **36**, 293 (1949). *28)* Bartlett, M. S., *Proc. roy. Soc. A*, **160**, 268 (1937). *29)* Duncan, D. B., *Biometrics*, **11**, 1 (1955). *30)* Bliss, C. I., *Biometrics*, **1**, 57 (1945). *31)* Berkson, J., *Biometrics*, **7**, 327 (1951). *32)* Berkson, J., *J. Amer. statist. Ass.*, **48**, 565 (1953) *33)* Kendall, M. G., *Rank Correlation Methods*, 2. Aufl., London (1955). *34)* Van der Waerden, B. L., *Mathematische Statistik*, Berlin (1957). *35)* Pearson und Wilks, *Biometrika*, **25**, 353 (1933). *36)* Freeman und Tukey, *Ann. math. Statist.*, **21**, 607 (1950). *37)* Clopper und Pearson, *Biometrika*, **26**, 404 (1934). *38)* Wilks, S. S., *Bull. Amer. math. Soc.*, **54**, 6 (1948). *39)* Scheffé und Tukey, *Memorandum Report 28*, Statistical Research Group, Princeton University (1949). *40)* Bliss, C. I., *Biometrics*, **9**, 176 (1953). *41)* Katz, L., *J. Amer. statist. Ass.*, **48**, 256 (1953). *42)* Bross, I., *Biometrics*, **10**, 245 (1954). *43)* Wilcoxon, F., *Biometrics*, **1**, 80 (1945). *44)* Wilcoxon, F., *Biometrics*, **3**, 119 (1947). *45)* Haldane und Smith, *Ann. Eugen. (Lond.)*, **14**, 117 (1947–1949). *46)* Walter, E., *Mitthl. math. Statist.*, **6**, 92 (1954). *47)* Walter, E., *Mitthl. math. Statist.*, **6**, 170 (1954). *48)* Walter, E., *Metrika*, **1**, 81 (1958). *49)* Neumann et al., *Ann. math. Statist.*, **12**, 153 (1941). *50)* Anderson, R. L., *Ann. math. Statist.*, **13**, 1 (1942). *51)* Wald und Wolfowitz, *Ann. math. Statist.*, **14**, 378 (1943). *52)* Bennett und Franklin, *Statistical Analysis in Chemistry and the Chemical Industry*, New York (1954). *53)* Levene und Wolfowitz, *Ann. math. Statist.*, **15**, 58 (1944). *54)* Wolfowitz, J., *Ann. math. Statist.*, **15**, 163 (1944). *55)* Olmstead, P. S., *Ann. math. Statist.*, **17**, 24 (1946). *56)* Olmstead, P. S., *Runs Determined in a Sample by an Arbitrary Cut*, Bell Telephone System, Technical Publications, Monograph 2937, New York (1958). *57)* Mood, A. M., *Ann. math. Statist.*, **11**, 367 (1940). *58)* Stevens, W. L., *Ann. Eugen. (Lond.)*, **9**, 10 (1939). *59)* Wald und Wolfowitz, *Ann. math. Statist.*, **11**, 147 (1940). *60)* von Bortkiewicz, L., *Die Iterationen*, Berlin (1917). *61)* Bross, I., *Biometrics*, **8**, 188 (1952).

Errata

Formel (**390**), letzte Zeile: $\geqq$ ist durch $\leqq$ zu ersetzen. Formel (**496**): $\varkappa =$ ist durch $\bar{\varkappa} =$ zu ersetzen. Formel (**571**): der Nenner des zweiten Bruches heißt: $(\nu_2 + \nu_1 F)^{(\nu_1+\nu_2)/2}$. Formel (**648**): $b_{xy} =$ ist durch $b_{yx} =$ zu ersetzen. Formeln (**758**) bis (**767**): alle p und q sind durch $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$ zu ersetzen.

Stichwortregister und Inhaltsverzeichnis zum Kapitel Statistik

Die Seitenzahlen sind in gewöhnlicher Schrift gedruckt, die Formelnummern in halbfetter Grotesk.

α, 2α (Signifikanzwahrscheinlichkeit) **376–378, 384, 409, 410, 412**
Abhängige Versuche und Ereignisse **337, 356–358, 360–362**
Additionstheorem
- der χ^2-Verteilung ... **564**
- der Normalverteilung ... **545**
- der POISSON-Verteilung ... **786**
Angepaßte Häufigkeiten ... **568**
Annahmen über die Gestalt der Bevölkerung 159
Anpassung von Normalkurven an Stichproben ... 164
Anpassungsteste (χ^2-Verteilung) ... **566, 567**
Approximationen und Transformationen
- *durch die Binomialverteilung*
- - der *F*-Verteilung ... **578, 579**
- - der hypergeometrischen Verteilung ... **813**
- *durch die χ^2-Verteilung* ... **566**
- - der *F*-Verteilung ... **576**
- - der hypergeometrischen Verteilung **818, 826–828**
- - der multinomialen Verteilung ... **826–828**
- - der POISSON-Verteilung ... **800, 801, 803**
- - verteilungsfreier Toleranzgrenzen ... **781**
- *durch die Normalverteilung* ... **546**
- - der Binomialverteilung **756–767, 771, 772, 778, 779, 821**
- - der χ^2-Verteilung ... **556, 557**
- - der sukzessiven Differenzenstreuung ... **856**
- - der hypergeometrischen Verteilung **816, 819**
- - von Iterationen (runs) ... **859**
- - des Korrelationskoeffizienten *r* ... **706–724**
- - des Paarkorrelationskoeffizienten R_h ... **858**
- - des SPEARMANschen Korrelationskoeff. *R* **728**
- - der POISSON-Verteilung ... **793–797, 804**
- *durch die POISSON-Verteilung* ... **789**
- - der Binomialverteilung ... **768**
- - der hypergeometrischen Verteilung ... **814**
- - der χ^2-Verteilung ... **561–563**
- *durch die STUDENT-Verteilung*
- - der *F*-Verteilung ... **575**
Arcus-Sinus-Transf. der Binomialverteilung. **782**
- der POISSON-Verteilung ... **799**
Asymptotisch biasfreie Schätzung ... **426**
- wirksamste Schätzung ... **429–431**
Auf- und Ab-Iterationen (runs up and down) ... 170.25

BARTLETT-Test (Normalverteilung) ... **621, 622**
Bedingtes Ereignis ... **337, 356–362**
Bestimmtheitsmaß (r^2) ... 170.10
Bevölkerung (Definition) ... **318, 327–332**
Beziehung zwischen Korrelations- und Regressionskoeffizienten ... **705**
- zwischen *r* und dem SPEARMANschen Korrelationskoeffizienten *R* ... **729**
Beziehungen zwischen Modus, Median und Mittelwert ... **504**
Bias und Erwartungswert ... 153
Bindung (Definition) ... **346**
Binomialverteilung
- Allgemeines ... 170.14
- Parameter ... 170.15
- und Normalverteilung ... 170.15
- und POISSON-Verteilung ... 170.16
- Vertrauensgrenzen und Signifikanzschranken ... 170.16 ff.
- Arcus-Sinus-Transformation ... 170.18

c-Test (Normalverteilung) ... **598**
χ^2-Teste ... **565–569, 584, 721, 791, 825–828**
χ^2-Verteilung
- Wahrscheinlichkeitsdichte ... **554**
- Parameter ... 168
- und Normalverteilung ... 168
- und POISSON-Verteilung ... 168
- Additionstheorem ... 168
- und Varianz von Stichproben ... 168
- als asymptotische Verteilung ... 168 ff.
Confidence limits (Definition) ... **439**

Definitionen, einleitende ... 146
Dezile ... **499**
Differenzenstreuung, sukzessive ... 170.24
Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung (Allgemeines) ... 149
Diskrete Zufallsveränderliche (Definition) .. **341**
Dosierung und log. Normalverteilung ... 166
DUNCAN-Test (Normalverteilung) ... 170.4

Einseitige
- Signifikanzschranken (diskr. Verteil.) **376, 377**
- - (stetige Verteilung) ... **409, 410**
- Vertrauensbereiche (Interpretation) ... **444**
- Vertrauensgrenzen (diskrete Verteilung) . **386**
- Vertrauensgrenzen (stetige Verteilung) ... **416**
- und zweiseitige Teste (allgemein) ... 158 ff.
Einseitiger
- χ^2-Test ... **558e**
Einzelwahrscheinlichkeit
- der Binomialverteilung ... **744**
- der hypergeometrischen Verteilung ... **805**
- der POISSON-Verteilung ... **784**
Endliche Bevölkerung (Definition) ... **327, 328**
Ereignis
- aufeinanderfolgendes ... **336, 337, 356–362**
- ausschließendes ... **334, 335, 353–355**
- bedingtes ... **337, 356–362**
- Definitionen ... 147
- fast sicheres ... **352**
- gleichzeitiges ... **336, 356–362**
- komplementäres ... **334, 354**
- sicheres ... **351**
- unmögliches ... **351**
- zufälliges ... **321**
- zusammengesetztes ... **338**
Ereignisse, stochastisch abhängige und unabhängige ... **356–362**
Erwartungswert und Bias ... 153
Extremabweichung und Extrembereich (Normalverteilung) ... 170.0

***F*-Verteilung** ... 169
Fehler erster Art (Signifikanzteste) ... **467**
- zweiter Art (Signifikanzteste) ... **468**
Folge, rangierte ... **342, 833–836**
- Prüfung von ... **837–845, 850**
Folge, zufällige ... **323, 836**
- Prüfung von ... **846–849, 851–886**
Fraktile siehe Quantile

Gebundene Werte (ties) ... **346**
- Rangierung ... **834**
Gekörnte Veränderliche ... **344–346**
Gesetz der großen Zahl ... **427**
Grenzen nach Wahrscheinlichkeit ... 162
Grenzwertsatz, zentraler (Normalverteilung) **546**
Gruppierte Stichproben
- Anpassung von Normalkurven an ... 165
- Schätzung von Mittelwert und Varianz ... 161
- und logarithmische Normalverteilung ... **544**
Halbachsen der Vertrauens- und Toleranzellipsen (Regression zweiter Art) ... **739–740**
Haldane-Test über den Einfluß der zeitlichen Reihenfolge ... 170.24
Häufigkeit (Definitionen) ... **347–349**
Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit, zusammengesetzte Ereignisse ... 147
Häufigkeiten, Prüfung von ... 170.22
Horizontaler Abstand zwischen zwei parallelen Regressionsgeraden erster Art **691, 692, 700, 701**
Hypergeometrische Verteilung ... 170.20
Hypothetische und unbekannte Bevölkerung 158

Identität von Median und Mittelwert bei symmetrischen stetigen Verteilungen **504, 505**
Interpretation von Signifikanztesten ... 158
Irrtumswahrscheinlichkeit **376–379, 390, 391, 409–411, 417–418**
Iterationen (runs) ... 170.25 ff.

Klassenhäufigkeit in χ^2-Testen ... **567**
Konsistenz von Schätzungen ... 154
Konvergenz
- der Signifikanzschranken ... **462**
- der Standardabweichung ... **432**
Konvergenz *(Fortsetzung)*
- stochastische ... 153
- der Toleranzgrenzen ... **449**
- der Vertrauensgrenzen ... **443**
- nach Wahrscheinlichkeit ... 153
Korrelationskoeffizient *r* ... 170.10 ff.
Kovarianz ... **633, 634, 647, 678, 682**
Kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung (Definitionen) ... **364, 368, 401–403**

Lageparameter siehe Quantile
Logarithmische Normalverteilung ... 166
Logitregression ... 170.10
lognormal ... 166
LORD-Test auf Grund des Extrembereiches . **600**

Macht eines Signifikanztestes ... 158
Maximum-Test für Paardifferenzen ... 170.24
Mean square successive difference ... 170.24
Median (Definition) ... **499**
- Beziehungen zu Modus und Mittelwert .. **504**
- Iterationen rund um den ... 170.25
- der Normalverteilung ... 163
- verteilungfreie Vertrauensgrenzen ... 162
- Vertrauensgrenzen für den Median der Normalverteilung ... **534**
Merkmal ... **317**
Merkmal und Ereignis ... 147
Midrange-Test (nach Extrembereich) ... **601**
Mittelwert der Bevölkerung ... **482**
- *der Arcus-Sinus-Transformation*
- - der Binomialverteilung ... 170.18
- - der POISSON-Verteilung ... **799**
- der Binomialverteilung ... **746**
- der χ^2-Verteilung ... **555b**
- der sukzessiven Differenzenstreuung ... **852**
- der *F*-Verteilung ... **572a**
- der hypergeometrischen Verteilung ... **811**
- der Iterationenanzahl ... **860–886**
- der logarithmischen Normalverteilung ... **535**
- der POISSON-Verteilung ... **787a**
- der Standard-Normalverteilung ... 163
Mittelwert der Stichprobe siehe Schätzungen
Mittlere quadratische Abweichung siehe Varianz
Modus ... **503**
- Beziehung zu Mittelwert und Median **504**
- der χ^2-Verteilung ... **555a**
- der logarithmischen Normalverteilung ... **533**
- der Normalverteilung ... 163
«Normal» ... **455**
Normalbereiche ... **454, 455**
Normalverteilung
- Definition und Charakteristiken ... 162
- Die standardisierte Normalverteilung 163
- Die Probittransformation ... 164
- Anpassung von Normalkurven an Stichproben ... 164
- Standardabweichungen der Quantile 166
- Die logarithmische Normalverteilung 166
- Das Additionstheorem ... 166
- Der zentrale Grenzwertsatz ... 167
- und eng verbundene Verteilungen ... 167
- Vertrauens- und Toleranzgrenzen 170.0
- Extrembereich und Extremabweichungen 170.0
- Vergleich einer Stichprobe mit der hypothetischen Bevölkerung ... 170.2
- Vergleich zweier Stichproben ... 170.3
- Prüfung mehrerer Stichproben ... 170.4
- Regression erster Art ... 170.5
- Regression zweiter Art ... 170.10
Normierte Veränderliche ... **489**
Nullhypothese (Signifikanzteste) ... 158

Ordnungszahlen
- rangierter Stichprobenwerte **342, 501, 833–836**
- der verteilungsfreien Vertrauensgrenzen für Quantile ... **502**
Orthogonaler Regressionskoeffizient ... **738**

Paarkorrelation ... 170.24
Parameter (allgemein) ... 160
- siehe auch Mittelwert, Modus, Quantile, Varianz
Perzentile ... **499**

Poisson-Verteilung ..... 170.18ff.
Probittransformation 164
Prozentuale Häufigkeit (Definition) **348**
- Vertrauensgrenzen für **769–776**
- Vertrauensgrenzen für Zunahme der . **831, 832**
Prüfungen
- Allgemeines ..... 158ff.
- BARTLETT-Test 170.4
- χ^2-*Teste*
- - Mehrfeldertafeln ..... 170.22ff.
- - Normalverteilung (Anpassung) 165
- - POISSON-Verteilung (Anpassung) ... 170.19
- c-Test 170.2
- DUNCAN-Test 170.4
- von Extremwerten ..... 170.1ff.
- F-Test 170.3
- HALDANE-Test 170.24
- von Häufigkeiten ..... 170.22ff.
- von Iterationen (runs) ..... 170.25ff.
- *von Korrelationskoeffizienten*
- - der Regression zweiter Art ..... 170.10ff.
- - Paarkorrelation 170.25
- - SPEARMANsche Korrelation 170.12
- der Linearität einer Regressionsfunktion 170.7
- LORD-Test 170.2
- Maximum-Test 170.24
- Midrange-Test 170.2
- auf Nichtzufall ..... 170.24ff.
- von Paardifferenzen 162, 170.3, 170.23, 170.24, 170.27
- von Regressionen erster Art ..... 170.7ff.
- von Regressionen zweiter Art ..... 170.12ff.
- *von Reihenfolgen*
- - von Iterationen ..... 170.25ff.
- - von Rangfolgen 170.23
- - von Zeitfolgen 170.24
- *mehrerer Stichproben*
- - aus binomialen Bevölkerungen 170.22
- - aus multinomialen Bevölkerungen .. 170.22
- - aus normalen Bevölkerungen ..... 170.3ff.
- - aus POISSON-Bevölkerungen 170.23
- t-Test 170.2
- STUDENT-Test 170.2
- auf Symmetrie 162
- Vierfeldertest 170.22
- WALD- und WOLFOWITZ-Test 170.26
- WALSH-Test 170.3
- WILCOXON-Test 170.23
- Zeichentest 162

Quadratsumme **493, 634, 636, 643–654**
Quantile stetiger Verteilungen 161
Quartil **499**

Rang (Definition) **342**
Rang-Korrelationskoeffizient 170.11
Rangierte Folge (Definition) **342**
Rangierung 170.23
Rangteste ..... 170.23ff.
Regression erster Art ..... 170.5ff.
Regression zweiter Art ..... 170.10ff.
Rekursionsformeln
- Binomialverteilung **745**
- hypergeometrische Verteilung **807, 808**
- POISSON-Verteilung **785**
Relative Häufigkeit (Definition) **347**
- Macht (Signifikanzteste) **473**
- Wirksamkeit von Schätzungen **433**

Schätzung
- *von Korrelationskoeffizienten*
- - des Paarkorrelationskoeffizienten **857**
- - bei Regressionen zweiter Art **704b**
- - des SPEARMANschen Korrelationskoeff. . **726**
- der Kovarianz **633, 647, 678, 682**
- des Mittelwertes λ (POISSON-Verteilung) .. **790**
- des Mittelwertes einer Stichprobe **491**
- von Quantilen **501**
- der Regressionsfunktion **631, 702**
- des Regressionskoeffizienten **632, 648, 683, 695**
- *von Varianzen*
- - des Korrelationskoeffizienten **707, 710, 716, 720**
- - des Mittelwertes bei Regressionen **639**
- - des Mittelwertes einer Stichprobe **495**
- - der Regressionsgeraden **638**
- - der Regressionsgeraden um den Gesamtmittelwert **657**
- - des Regressionskoeffizienten . **637, 684, 696**
- - der Restvarianz (Regress.) **635, 659, 678, 682**
- - innerhalb der Spalten **624b, 655**
- - zwischen den Spalten **624a**
- - der Spaltenmittelwerte um die Regressionsgerade **656**
- der Wahrscheinlichkeit p (Binomialvert.).. **748**

Schätzungen
- Allgemeines 153
- Symbolisierung **332**
Schnellschätzungen (Allgemeines) **436**
Schnellschätzung von σ (Normalverteilung) 170.1
Schnellteste (Normalverteilung) 170.3
Sequentialanalyse 170.27
Serienkorrelation (Prüfung auf Nichtzufall) 170.24
SHEPPARDsche Korrektur **498**
Signifikanzschranken siehe Vertrauensgrenzen
Signifikanzteste (allgemein) 158
- siehe auch unter Prüfung
Signifikanzwahrscheinlichkeit siehe Irrtums-...
SPEARMANscher Korrelationskoeffizient . 170.11
Standardabweichung siehe Varianz
Standardisierte
- Extremabweichung (Normalverteilung) 170.1
- Normalverteilung 163
- Veränderliche **489**
Stand. Extrembereich (Normalverteilung). 170.0
Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung (Allg.) 151
Stetige Zufallsveränderliche **343**
Stichprobe **322**
Stichprobenbevölkerung **329**
Stichprobensammeln
- aus endlichen Bevölkerungen **357**
- aus unendlichen Bevölkerungen **357**
- zufälliges **320**
- mit Zurücklegen **328**
Stichprobenverteilung **329**
Stochastisch abhängige Ereignisse **358, 361**
- unabhängige Ereignisse **359, 361**
Streuung siehe Varianz
STUDENT-Verteilung 167
Studentisierte Extremabweichung 170.1
Studentisierter Extrembereich 170.1
Sukzessive Differenzenstreuung 170.24
Symbole von Wahrscheinlichkeiten **349**
Symmetrie der Normalverteilung 163
Symmetrietest 162

t-Test **599**
t-Verteilung 167
Tafeln, Definitionen und Erklärungen zu
- Arcus-Sinus-Transformation 170.18
- Auf- und Ab-Iterationen 170.25
- χ^2-Verteilung 168
- Extremberreiche und -abweichungen . 170.0ff.
- F-Verteilung 169
- Iterationen um den Median 170.25
- Iterationsanzahl (total) 170.25
- Korrelationskoeffizient r 170.10
- Logits 170.10
- Normalverteilung 163
- Paarkorrelation 170.24
- Probits 164ff., 170.10
- Serienkorrelation 170.24
- Signifikanzschranken f. d. Vierfeldertest 170.22
- SPEARMANscher Korrelationskoeffizient 170.12
- STUDENT-Verteilung 167
- Sukzessive Differenzenstreuung 170.24
- t-Verteilung 167
- Toleranzfaktoren (Normalverteilung) ... 170.0
- Toleranzgrenzen, verteilungsfreie 162, 170.18
- Vertrauensfaktoren (Normalverteilung) 170.0
- Vertrauensgr. d. Binomialverteilung 170.16ff.
- - der POISSON-Verteilung 170.20
- WILCOXON-Test 170.23
- Zeichentest 162
Teste siehe Prüfung
Toleranzbereiche
- Allgemeines 155
- Normalverteilung 170.0
- Regressionsgerade erster Art ..... 170.8ff.
- Regressionsgerade zweiter Art ..... 170.13ff.
- verteilungsfreie 156, 170.18
Toleranzellipse (Regression zweiter Art) 170.13ff.
Toleranzfaktoren siehe Toleranzbereiche
Transformation siehe Approximation
TSCHEBYSCHEFFsche Ungleichung **486**
Umfang einer Stichprobe **322**
Unabhängige Versuche und Ereignisse **357**
Unendliche Bevölkerung **327–330, 357**

Varianz- und Standardabweichung
- Allgemeines ..... 154ff.
- Analyse (Normalverteilung) 170.4
- BARTLETT-Test 170.4
- Bias von s **494**
- und χ^2-Verteilung **565**
- F-Test 170.3
- von Iterationen ..... 170.25ff.
- des Mittelwertes **484, 495**
- der Rangsumme (WILCOXON) 170.23

Varianz- und Standardabweichung *(Fortsetzung)*
- bei Regressionen ..... 170.5ff.
- σ und Extremabereich ..... 170.0ff.
- σ und Probitgerade 164
- σ und sukzessive Differenzenstreuung . 170.24
- von Stichproben ..... 160ff.
- TSCHEBYSCHEFFsche Ungleichung **486**
- *von Verteilungen*
- - χ^2-Verteilung **555c**
- - Binomialverteilung 170.15
- - F-Verteilung **572b**
- - hypergeometrische Verteilung 812
- - Normalverteilung ..... 162ff.
- - POISSON-Verteilung 170.19
- Vertrauensgrenzen für σ **565, 584**
Variationskoeffizient **485**
Veränderliche, diskrete **341**
- gekörnte **344**
- normierte **489**
- standardisierte **489**
- stetige **343**
Versuch **319**
Verteilung
- Definition **326**
- diskrete ..... 149ff.
- stetige ..... 151ff.
Verteilungen
- Binomialverteilung ..... 170.14ff.
- χ^2-Verteilung ..... 167ff.
- F-Verteilung ..... 169ff.
- hypergeometrische Verteilung ..... 170.20ff.
- logarithmische Normalverteilung 166
- Normalverteilung ..... 162ff.
- POISSON-Verteilung ..... 170.18ff.
- STUDENT-Verteilung 167
- t-Verteilung 167
Verteilungsfreie
- Toleranzgrenzen 156, 170.18
- *Teste*
- - χ^2-Test **566**
- - HALDANE-Test 170.24
- - Maximum-Test 170.24
- - WALD- und WOLFOWITZ-Test 170.26
- - WILCOXON-Test 170.23
- - Zeichen-Test 162
- Vertrauensgrenzen für Quantile 156, 162, 170.18
Vertikaler Abstand zwischen zwei parallelen Regressionsgeraden erster Art **689, 690, 698, 699**
Vertrauensbereich siehe Vertrauensgrenzen
Vertrauensellipse (Regression zweiter Art) .. **736**
Vertrauensfaktoren siehe Vertrauensgrenzen
Vertrauensgrenzen
- Allgemeines ..... 155ff.
- Definitionen, mathematische **385–389, 421–423**
- für den Mittelwert μ (Normalverteilung) . **580**
- für den Korrelationskoeffizienten r ... 170.11
- für λ (POISSON-Verteilung) 170.20
- für p (Binomialverteilung) ..... 170.16ff.
- für Regressionen erster Art ..... 170.8ff.
- für Regressionen zweiter Art 170.13
- für σ (Normalverteilung) **584**
- verteilungsfreie für Quantile 162, 170.18
Vertrauenskoeffizient
- Vertr.-Wahrscheinlichkeit .. **387, 388, 397, 423**

Wahrscheinlichkeit (Definitionen) . **324, 350–423**
Wahrscheinlichkeitsdichte
- Definition **400**
- der χ^2-Verteilung **554**
- der F-Verteilung **571**
- der logarithmischen Normalverteilung ... **532**
- der Normalverteilung **506**
- der standardisierten Normalverteilung ... **510**
- der STUDENT-Verteilung **549**
- der t-Verteilung **549**
WALD- und WOLFOWITZ-Test 170.26
WALSH-Test **602**
WILCOXON-Test 170.23
Wirksamkeit (Allgemeines) 154

z-Transformation des Korrel.-Koeff. 170.10
z-Verteilung 169
Zeichentest 162
Zentraler Grenzwertsatz 167
Zentralwert siehe Median
Zufallsveränderliche **339–346**
Zufallszahlen **323**
Zweidimensionale Normalverteilung.. 170.10ff.
Zweiseitige
- Irrtumswahrscheinlichkeit, Signifik.-Schranken, Vertr.-Grenzen (Definition) **390–397, 417–423**
- Teste ..... 158ff.
- Toleranzgrenzen (allgemein) ..... 155ff.
- Vertrauensgrenzen (allgemein) 155

Einführung

Zur Darstellung physikalischer Gesetzmäßigkeiten dienen unter anderm Begriffe rein qualitativer Art, wie Länge, Masse, Zeit, Beschleunigung, Kraft, Geschwindigkeit usw., die als Größenarten[1] oder *Qualitäten*[2] (im folgenden stets so benannt) bezeichnet werden. Qualitäten werden durch entsprechende *Meßverfahren* festgelegt und definiert.

Verbindet sich mit dem abstrakten Begriff Qualität noch eine sachliche Determination, wie zum Beispiel bei den Begriffen Lichtgeschwindigkeit, Elektronenradius usw., so spricht man von *physikalischen Größen*. Eine physikalische Größe läßt sich demnach in einen qualitativen und einen quantitativen Wesensinhalt aufspalten. Zur Messung einer physikalischen Größe ist deshalb außer der Festlegung eines Meß*verfahrens* noch die Festsetzung einer Maß*einheit* erforderlich, das heißt einer Vergleichsgröße gleicher Qualität mit bekanntem und einwandfrei reproduzierbarem Betrage.

In der Physik sind die Qualitäten begrifflich und formelmäßig durch Gleichungen untereinander verknüpft. Die meisten Qualitäten (und damit auch Größen) lassen sich deshalb durch Substitution auf einige wenige zurückführen, zwischen denen nach dem derzeitigen Stande der Wissenschaft eine gesetzmäßige Verknüpfung nicht mehr zu finden ist. Solche Qualitäten werden Grundqualitäten oder *Dimensionen* genannt und müssen a priori durch Grundmeßvorschriften definiert werden. Reine Zahlenwerte, wie $^1/_2$, $^1/_4$, π usw., oder Quotienten zweier gleichartiger Qualitäten, wie zum Beispiel Winkel, relative Dichte usw., sind dimensionslos.

Je nach Art des physikalischen Stoffgebietes sind mehr oder weniger Dimensionen zur Darstellung des gesamten Gebietes erforderlich. So genügen für die Kinematik zwei, für die Mechanik drei Dimensionen, während die Darstellung der Thermodynamik, der Elektrodynamik und der Photometrie die Einführung weiterer Dimensionen erfordert.

Durch die Zusammenstellung der zugrunde liegenden Dimensionen ist die *Art* eines darauf aufgebauten Maßsystems eindeutig bestimmt. In den Dimensionen voneinander abweichende Maßsysteme werden als *artungleiche* bezeichnet, wie zum Beispiel die Länge-Masse-Zeit-Systeme (LMT-Systeme) der Physik und die korrespondierenden Länge-Kraft-Zeit-Systeme (LKT-Systeme) der Technik. Den Übergang zwischen artungleichen Maßsystemen erhält man durch Substitution der abweichenden Dimension *(Grundqualität)* des einen Systems durch die Dimensionsformel der entsprechenden *abgeleiteten Qualität* des anderen Systems. Beispiel: Übergang von LKT- zu LMT-Dimensionsformeln. Während L und T bei beiden gleich sind, besitzt die Dimension K (Kraft) der LKT-Systeme in den LMT-Systemen die Dimensionsformel LMT^{-2}. Folglich ist in LKT-Dimensionsformeln irgendwelcher Qualitäten lediglich K durch LMT^{-2} zu ersetzen, um die entsprechenden LMT-Dimensionsformeln zu erhalten.

Den *Dimensionen* (Grundqualitäten) sind entsprechende (qualitätsgleiche) *Grundeinheiten* zugeordnet. Es ist lediglich eine Frage der Zweckmäßigkeit, wie groß die Beträge dieser Grundeinheiten gewählt werden. So bestehen bei den LMT-Systemen nebeneinander das CGS-System (Grundeinheiten: Zentimeter, Gramm, mittlere Sonnensekunde), das MKS-System (Grundeinheiten: Meter, Kilogramm, mittlere Sonnensekunde), das MTS-System (Grundeinheiten: Meter, Tonne, mittlere Sonnensekunde), das ft-lb-s-System (Grundeinheiten: foot, pound, second) usw. Solche dimensionsgleiche, aber in den Beträgen ihrer Grundeinheiten differierende Maßsysteme werden als *artgleiche* bezeichnet.

Um innerhalb eines Maßsystems die Einheiten *abgeleiteter* Qualitäten zu erhalten, sind lediglich in den entsprechenden Dimensionsformeln an Stelle der einzelnen Dimensionen die entsprechenden Grundeinheiten des in Frage stehenden Maßsystems einzusetzen. So ist, wie vorhin erwähnt, in den LMT-Systemen die Dimensionsformel der Kraft LMT^{-2}. Die Krafteinheit ist danach im CGS-System $cm\,g\,s^{-2}$, im MKS-System $m\,kg\,s^{-2}$, im MTS-System $m\,t\,s^{-2}$, im ft-lb-s-System $ft\,lb\,s^{-2}$ usw. Werden solche abgeleiteten Einheiten häufig gebraucht, so erhalten sie meistens noch besondere Eigennamen, wie folgende Krafteinheiten der LMT-Systeme: $cm\,g\,s^{-2}$ = Dyn (CGS-System), $m\,kg\,s^{-2}$ = Newton (MKS-System), $m\,t\,s^{-2}$ = sthène (MTS-System), $ft\,lb\,s^{-2}$ = Poundal (ft-lb-s-System). Maßsysteme, in denen abgeleitete Einheiten den Betrag 1 ergeben, werden *abgestimmte* Maßsysteme genannt, und umgekehrt ist eine abgeleitete Maßeinheit, die den Betrag 1 besitzt, eine auf das betreffende System abgestimmte Einheit.

International in Wissenschaft und Technik anerkannt sind seit längerer Zeit die LMT-Maßsysteme mit Dezimalunterteilung der Einheiten (Zeitmaße ausgenommen), die alle auf dem metrischen System fußen. Das in der Physik bis heute führende CGS-System, auch absolutes Maßsystem genannt, wird in neuerer Zeit durch das MKS-System verdrängt, weil das seit 1948 international anerkannte absolute elektrische Maßsystem (Grundeinheiten: $m\text{-}s\text{-}V_{abs}\text{-}I_{abs}$) auf das MKS-System abgestimmt ist. In der Schweiz ist das MKS-System als Teil des Giorgi-Systems (das mit dem absoluten elektrischen Maßsystem übereinstimmt, aber andere Dimensionen [Grundqualitäten] benutzt) seit 1950, in Frankreich das MTS-System seit 1919 gesetzlich. Ebenfalls international anerkannt sind daneben die LKT-Maßsysteme der Technik, das cm-p-s-System (Grundeinheiten: Zentimeter, Gramm-Kraft [pond], Sekunde, korrespondierend mit dem CGS-System) und das m-kp-s-System (Grundeinheiten: Meter, Kilogramm-Kraft [Kilopond], Sekunde, korrespondierend mit dem MKS-System).

Daneben bestehen noch nationale Maßsysteme, wie das Yard-Pound-Second-System (Großbritannien und USA), das Foot-Pound-Second-System (Großbritannien) usw., die in den angelsächsischen Ländern noch populär, in der Wissenschaft aber nicht mehr und in der Technik immer weniger verwendet werden.

Schreibweise der Symbole für Dimensionen, Einheiten und Konstanten

International anerkannt ist folgende Schreibweise:

Symbole für Einheiten sind in senkrechter, Symbole für Qualitäten und physikalische Größen in *kursiver* Schrift wiederzugeben. Bei den Symbolen der Einheiten gilt ferner noch, daß stets kleine Buchstaben verwendet werden sollen, ausgenommen bei jenen Einheiten, die zum Andenken an berühmte Forscher mit deren Namen benannt wurden. Symbole solcher Einheiten werden mit Großbuchstaben wiedergegeben.

Als Schreibweise der Dimensionssymbole bürgert sich in neuerer Zeit jene in mageren GROTESK-GROSSBUCHSTABEN ein, während früher die Wiedergabe in *kursiven Kleinbuchstaben* üblich war.

Meterkonvention

Veröffentlichungen der Meterkonvention, der heute 33 Staaten angehören, sind in den *Procès-Verbaux des Séances, Comité international des Poids et Mesures*, und in den *Comptes rendus de la Conférence générale des Poids et Mesures* festgelegt.

---

1) Fleischmann, R., *Z. Phys.*, **129**, 377 (1951).

2) Häberli, F., *Schweiz. Arch. angew. Wiss.*, **13**, 65, 113, 136 (1947).

Symbol oder Abkürzung	Name	Seite
′	Altminute	180
″	Altsekunde	180
°	Altgrad	180
∟	Rechter Winkel	180
A		
a	Are	176
a	Jahr	179
a_{anom}	Anomalistisches Jahr	179
a_{astr}	Astronomisches Jahr, annus fictus, BESSELsches Jahr	179
a_{greg}	Gregorianisches Jahr	180
a_{jul}	Julianisches Jahr	179
a_{sid}	Siderisches Jahr	179
a_{trop}	Tropisches Jahr	179, 174
A. (ac)	Acre	176
A	Ampere	190, 193
A m	Ampere × Meter	195
A m^{-1}	Ampere pro Meter	193, 194
A m^2	Ampere × Quadratmeter	195
Å	Ångström	174
a.l.	Année-lumière, Lichtjahr	174
asb	Apostilb	200
at	Technische Atmosphäre	186
atm	Physikalische Normalatmosphäre	187
AU	Astronomische Einheit	174
B		
b (bar)	Bar	186
BTU_{mean}	British Thermal $Unit_{mean}$	187
bu	Bushel	177
C		
c	Curie	197
c	Karat	179
c	Zenti- (10^{-2})	9
c	Neuminute	180
C	Coulomb	190, 191
°C	Grad Celsius	181
cal_{15}	15°-Kalorie	187
cc	Neusekunde	180
cd	Candela	200
Cl	Clausius	188
cm	Zentimeter	174
cm^2	Quadratzentimeter	176
cm^3	Kubikzentimeter	176
cm s^{-1}	Zentimeter pro Sekunde	184
cm s^{-2}	Zentimeter/Sekunde pro Sekunde	185
cps	Cycle per second	185
cu. ft (ft^3)	Cubic foot	176
cu. in (in^3)	Cubic inch	176
cu. yd (yd^3)	Cubic yard	176
cwt	Hundredweight	178
D		
d	Dezi- (10^{-1})	9
d	Sonnentag	179
d*	Sterntag	180
da, dk	Deka- (10^1)	9
db	Dezibel	201
dl	Deziliter	176
dm	Dezimeter	175
dm^3	Kubikdezimeter	176
dr ap.	Drachm, Dram (apothecary)	179
dr av.	Dram (avoirdupois)	178
dry pt	Dry pint	177
dry qt	Dry quart	177
dwt	Pennyweight (troy)	179
dyn	Dyn	185
E		
emE	Elektromagnetische Einheit	189–196
Eq (equ., equiv.)	Grammäquivalent	203
erg	Erg	187
erg s^{-1}	Erg pro Sekunde	188
esE	Elektrostatische Einheit	189–196
E		
eV	Elektronenvolt	187
eV s	Elektronenvolt × Sekunde	188
F		
F	Farad	192
F m^{-1}	Farad pro Meter	189
°F	Grad Fahrenheit	181
fl. dr	Fluid drachm (fluid dram)	177
fl. oz	Fluid ounce	177
ft	Foot	174
ft s^{-2}	Foot/second per second	185
G		
g	Gramm	178
g-atom	Grammatom	203
g cm^{-3}	Gramm pro Kubikzentimeter	183
g. equiv.	Grammäquivalent	203
g/l	Gramm pro Liter	204
g rad	Grammrad	198
g	Neugrad	180
G	Giga- (10^9)	9
gal	Gallon	177
Gal	Galilei	185
Gb	Gilbert	193
gi	Gill	177
gr	Grain	178
Gs	Gauß	193
γ (µg)	Gamma, Mikrogramm	178
H		
h	Hekto- (10^2)	9
h (h)	Stunde	179
h*	Sternstunde	180
h	PLANCKsches Wirkungsquantum	188
H	Henry	192, 195
H m^{-1}	Henry pro Meter	193
ha	Hektare	176
hl	Hektoliter	176
Hz	Hertz	185
I		
in	Inch	174
I_γ	Dosiskonstante	198
J		
J	Joule	187, 189
K		
k	Kilo- (10^3)	9
°K	Grad Kelvin	181
$kcal_{15}$	15°-Kilokalorie	187
kg	Kilogramm	178
kg-atom	Kilogrammatom	203
kg m^{-3}	Kilogramm pro Kubikmeter	183
kHz (Kc.)	Kilohertz (Kilocycle)	185
km	Kilometer	175
km^2	Quadratkilometer	176
km h^{-1}	Kilometer pro Stunde	184
km h^{-1} s^{-1}	Kilometer/Stunde pro Sekunde	185
km s^{-1}	Kilometer pro Sekunde	184
kmol	Kilomol	203
Knot	Knoten	174, 184
kp	Kilogramm-Kraft (Kilopond)	185
kval	Kilogrammäquivalent	203
kW	Kilowatt	188
kWh	Kilowattstunde	187
L		
l	Liter	176, 177
La	Lambert	200
latm	Literatmosphäre	187
lb	Pound	178
lb ap.	Pound (apothecary)	179
lb av.	Pound (avoirdupois)	178, 179
lb troy	Pound (troy)	179
liq. pt	Liquid pint	177
liq. qt	Liquid quart	177
L		
lm	Lumen	200
lmh	Lumenstunde	200
lms	Lumensekunde	200
lm/W	Lumen pro Watt	200
l. tn	Long ton	178
lx	Lux	200
lxs	Luxsekunde	200
ly	Light year, Lichtjahr	174
M		
m	Milli- (10^{-3})	9
m	Meter	174
m^2	Quadratmeter	176
m^3	Kubikmeter	176
m min^{-1}	Meter pro Minute	184
m s^{-1}	Meter pro Sekunde	184
m s^{-2}	Meter/Sekunde pro Sekunde	185
M	Mega- (10^6)	9
mb	Millibar	186
mc	Millicurie	197
ME	Mache-Einheit	197
ME	Masseneinheit	187
mEq (m. equ., m. equiv.)	Milligrammäquivalent	203
mg	Milligramm	178
mg%	Milligrammprozent	204
mho	Reziprokes Ohm (Siemens)	192
mi	Mile	175
mi h^{-1}	Mile per hour	184
mi s^{-1}	Mile per second	184
min	Minim	177
min (m)	Minute	179
min*	Sternminute	180
mkp	Meterkilogramm-Kraft	187
mkp s^{-1}	Meterkilogramm-Kraft pro Sekunde	188
ml	Milliliter	176
mm	Millimeter	175
mm Hg	Millimeter Quecksilbersäule	187
mm H_2O	Millimeter Wassersäule	187
mmol	Millimol	203
mµ (nm)	Millimikron (Nanometer)	175
mol	Mol	203
mol/l	Mol pro Liter	204
mol%	Molprozent	204
mSt	Millistat	197
mval	Milligrammäquivalent	203
Mx	Maxwell	194
MΩ	Megohm	192
µ	Mikro- (10^{-6})	9
µ (µm)	Mikron (Mikrometer)	175
µb	Mikrobar	186
µc	Mikrocurie	197
µg	Mikrogramm	178
µl	Mikroliter	176
µm	Mikrometer	175
µmol	Mikromol	203
N		
n	Nano- (10^{-9})	9
n (engl. N)	Normallösung	204
N	Newton	185, 189
nc	Nanocurie	197
nm (mµ)	Nanometer (Millimikron)	175
n. mi	Mile (nautical), Seemeile	174
nx	Nox	200
O		
Oe	Oersted	193
oz ap., oz troy	Ounce (apothecary, troy)	179
oz av.	Ounce (avoirdupois)	178
Ω	Ohm	192
P		
p	Piko- (10^{-12})	9
p	Pond	186
P	Poise	188
pc	Parsec	174
Pdl	Poundal	186
P		
ph	Phot	200
Phon	Phon	201
pk	Peck	177
ppm	Parts per million (Konzentration 10^{-6})	
PS	Pferdestärke	188
PSh	Pferdestärkestunde	187
pt	Pint	177
pz	Pièze	186
Q		
qt	Quart	177
R		
r	Röntgen	197
r/mch	Röntgen pro Millicurie und Stunde in 1 cm Abstand	198
°R	Grad Rankine	181
°R	Grad Réaumur	181
rad	Rad	198
rad	Radiant	180
rad s^{-2}	Radiant/Sekunde pro Sekunde	185
RBE	Relative biological effectiveness, relative biologische Wirksamkeit	199
reg. tn	Register ton (Registertonne)	176
rem	Rad equivalent man	199
rev	Revolution, ganzer Winkel	180
rev s^{-2}	Umdrehung/Sekunde pro Sekunde	185
Ry	Rydberg	187
S		
s (S, sec)	Sekunde	179
s*	Sternsekunde	180
s ap.	Scruple (apothecary)	179
sb	Stilb	200
sh. tn	Short ton	178
sk	Skot	200
S m^{-1}	Siemens pro Meter	192
sn	Sthène	185
sq. ft (ft^2)	Square foot	176
sq. in (in^2)	Square inch	176
sq. mi (mi^2)	Square mile	176
sq. yd (yd^2)	Square yard	176
sr	Steradiant	180
St	Stokes	188
T		
t	Tonne	178
T	Tera- (10^{12})	9
tn	Ton	178
Torr	Torricelli	187
U		
—	—	
V		
V	Volt	189
V m^{-1}	Volt pro Meter	190
val	Grammäquivalent	203
val/l	Grammäquivalent pro Liter	204
Vol.%	Volumenprozent	204
W		
W	Watt	188, 189
Wb	Weber	194
Wb m	Weber × Meter	194
Wb m^{-1}	Weber pro Meter	193
Wb m^{-2}	Weber pro Quadratmeter	193, 194
WZ	Weltzeit	179
X		
XE	SIEGBAHNsche X-Einheit	174
Y		
yd	Yard	174
Z		
—	—	

Länge

Dimension in allen Maßsystemen = L

Grundeinheiten
MKS-System: Meter (m)
CGS-System: Zentimeter (cm)
MTS-System: Meter (m)
ft-lb-s-System: Foot (ft) *

Metrische Maßsysteme

Der primäre Standard der metrischen Systeme ist der *Meter* (m)[1]. Er ist definiert durch den Strichabstand bei 0°C des internationalen Meterprototyps, eines Platin-Iridium-Barrens, der im Internationalen Bureau für Maß und Gewicht in Sèvres (Frankreich) aufbewahrt wird. Es sind heute Bestrebungen im Gange, den Meter über die Wellenlänge einer Spektrallinie zu definieren. Voraussichtlich[2] dürfte im Jahre 1960 der Meter durch die Vakuumwellenlänge $\lambda_{Kr\text{-}86}$ der orangeroten Spektrallinie des Kryptonisotops 86 festgelegt werden

$$1 \text{ Meter} = 1{,}650\,763\,73 \times 10^6\, \lambda_{Kr\text{-}86}$$
$$\lambda_{Kr\text{-}86} = 6{,}057\,802\,1 \times 10^{-7} \text{ m}$$

Angelsächsische Maßsysteme

Der primäre Längenstandard * der angelsächsischen Maßsysteme ist das *Yard* (yd). In den USA ist das Yard durch einen gesetzlich festgelegten Umrechnungsfaktor an das metrische System angeschlossen[3]:

$$1 \text{ US-yard} = \frac{3600}{3937} \text{ Meter} = 0{,}914\,401\,829 \text{ Meter}$$

1 US-inch = 25,400 051 Millimeter

Im Vereinigten Königreich wird das Yard durch den Abstand zweier Punkte bei 62° F auf einem Bronzestab, dem Imperial Standard Yard, definiert[4], der im Standards Department of the Board of Trade in London aufbewahrt wird. Für das Imperial Yard bestehen zwei Umrechnungsbeziehungen: 1. die legale, für den Handel gültige Relation[5]

1 imp. yard = 0,914 399 208 Meter
1 imp. inch = 25,399 978 Millimeter

und 2. die für wissenschaftliche Präzisionsuntersuchungen zu verwendende Relation[6]

1 imp. yard = 0,914 398 416 Meter
1 imp. inch = 25,399 956 Millimeter

Daneben besteht sowohl im Vereinigten Königreich[5] wie in den USA[7] eine weitere *genormte* Umrechnungsbeziehung für industrielle Zwecke

1 yard = 0,9144 Meter
1 inch = 25,4 Millimeter

Die wichtigsten Länder des englischen Sprachgebiets sind vor kurzem übereingekommen, in Wissenschaft und Technologie das genormte Yard als «internationales Yard» zu verwenden, um die zur Zeit bestehenden Abweichungen auszugleichen[8].

Zwischen den verschiedenen angelsächsischen Maßsystemen bestehen demnach folgende Umrechnungsbeziehungen für *einander entsprechende Längeneinheiten:*

	Imperial		USA	Norm
	Handel	Wissenschaft		
Imperial Handel	**1**	1,000 000 866	0,999 997 133	0,999 999 133
Wissenschaft	0,999 999 133	**1**	0,999 996 267	0,999 998 267
USA	1,000 002 866	1,000 003 732	**1**	1,000 002 000
Norm	1,000 000 866	1,000 001 732	0,999 998 000	**1**

Nautische und geodätische Längenmaße

Der Definition der *Seemeile* liegt die «mittlere Meridianminute» (mittlere Breitenminute) zugrunde, wobei die vom internationalen Referenzellipsoid abgeleiteten Werte des Pol- und des Äquatorradius verwendet werden[9]:

$$1 \text{ Seemeile} = \frac{\text{Meridianquadrant } \mathcal{Q}^{Me}_{\sigma}}{90 \times 60} = 1852{,}276 \text{ Meter}$$

Als international *genormte* Umrechnungsbeziehung[10] wurde 1928 die Relation

1 internationale Seemeile = 1852 Meter

festgesetzt. Dieser Wert wurde von allen seefahrenden Nationen (USA[11] erst 1954) mit Ausnahme des Vereinigten Königreiches angenommen. Die britische Definition der Seemeile beruht auf dem Knoten:

$$1 \text{ admiralty knot} = \frac{1 \text{ nautical mile}}{\text{hour}} = 6080 \text{ imp. feet per hour}$$

Demnach ist

1 imp. nautical mile (n. mi) = 1853,181 Meter

Die *geographische Meile* wird heute über den Äquatorquadranten $\mathcal{Q}^{Ae}_{\sigma}$ definiert (4 Bogenminuten auf dem Äquator), wobei der Wert des Äquatorradius vom internationalen Referenzellipsoid abgeleitet ist[9]:

$$1 \text{ geographische Meile} = 4 \times \frac{\text{Äquatorquadrant } \mathcal{Q}^{Ae}_{\sigma}}{90 \times 60}$$
$$= 7421{,}591 \text{ Meter}$$

* Soweit man in der Physik und Technik kohärente Einheiten eines angelsächsischen Systems benutzt, ist es üblich, den Foot = ⅓ Yard zu verwenden, obwohl das Yard die gesetzliche Längeneinheit darstellt.

Astronomische und astrophysikalische Längenmaße

Die *astronomische Einheit* (AU) ist definiert als die Entfernung zwischen der Sonne und einem Planeten von vernachlässigbarem Gewicht, der die Sonne auf kreisförmiger Bahn innerhalb von 365,256 898 326 mittleren Tagen umkreist. Anders ausgedrückt: Ein Planet ist 1 AU von der Sonne entfernt, wenn er diese mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit von 0,985 607 668 601° pro mittleren Tag umkreist[12]. Die AU wird demnach durch Winkel- und Zeitmessung und nicht durch eine Längenmessung bestimmt. Sie wird deshalb in der Astronomie als *Relativgröße* und nicht als Länge angesehen. Dieser Relativgröße entspricht ($\triangleq$) im physikalischen Sinn die Länge des Radius der oben beschriebenen kreisförmigen Umlaufbahn. An Stelle dieses Radius wird die von ihm nur wenig differierende große Halbachse a der Erdbahn benutzt. Sie läßt sich aus der täglichen Sonnenparallaxe $\pi_{\odot}$ (= Winkel, unter dem der Äquatorradius a_{σ} im Abstand a erscheint) und dem Äquatorradius nach folgender Beziehung errechnen

$$a = \frac{a_{\sigma}}{\sin \pi_{\odot}} \cong \frac{a_{\sigma}}{\pi_{\odot}}$$

Nimmt man die Normwerte der Sonnenparallaxe ($\pi_{\odot} = 8{,}80''$)[13] und des Äquatorradius (6378,388 km)[9], so ist

$$1 \text{ AU} \triangleq \frac{6378{,}388 \times 60 \times 60 \times 180}{8{,}8 \times \pi} \text{ km} \triangleq 1{,}495\,042 \times 10^8 \text{ km}$$

Der 10^6-fache Betrag der astronomischen Einheit heißt *Siriometer*:

1 Siriometer $\equiv 10^6$ AU $\triangleq 1{,}495\,042 \times 10^{14}$ km

Das *Parsec* (pc) ist definiert durch die jährliche Sternparallaxe p (= Winkel, unter dem die astronomische Einheit vom betreffenden Fixstern aus gesehen erscheint), welche gleich 1″ gesetzt wird[13]. Daraus ergibt sich

$$1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ AU}}{p} = \frac{1 \text{ AU}}{\sin 1''} \cong \frac{1 \text{ AU}}{1''} = \frac{60 \times 60 \times 180}{\pi} \text{ AU} = 2{,}062\,648 \times 10^5 \text{ AU}$$
$$\triangleq 3{,}083\,745 \times 10^{13} \text{ km}$$

Die Entfernung von 5 pc wird *Siriusweite* genannt:

1 Siriusweite = 5 pc = $1{,}031\,324 \times 10^6$ AU $\triangleq 1{,}541\,873 \times 10^{14}$ km

In der *Astrophysik* hat sich als Entfernungsmaß das *Lichtjahr* (light year, ly, année-lumière, a.l.) eingebürgert. Es ist definiert als jene Wegstrecke, die das Licht mit der Vakuumgeschwindigkeit c_0 in einem tropischen Jahr (a_{trop}) zurücklegt[14]:

$$1 \text{ Lichtjahr} = c_0 \times 1\, a_{trop} = (299\,792{,}50 \pm 0{,}04) \text{ km s}^{-1} \times 3{,}155\,692\,97 \times 10^7 \text{ s}$$
$$= (9{,}460\,530 \pm 0{,}000\,001) \times 10^{12} \text{ km}$$

Spektroskopische Längenmaße

Die Wellenlängeneinheit der Röntgenspektroskopie, die Siegbahnsche *X-Einheit* (XE)[15], wird auf die Gitterkonstante des Kalkspates $d^{18\,°C}_{\infty}$ ($CaCO_3$) bezogen nach der Relation

$$d^{18\,°C}_{\infty}\,(CaCO_3) = 3029{,}45 \text{ Siegbahnsche X-Einheiten}$$

Die Länge der XE in Metern muß experimentell bestimmt werden, wobei die von der X-Ray Analysis Group des Institute of Physics (England) in Übereinstimmung mit Siegbahn und der American Society for X-Ray and Electron Diffraction festgelegte Umrechnungsbeziehung[16]

1 XE = $(1{,}002\,02 \pm 0{,}000\,03) \times 10^{-13}$ Meter

wohl am meisten verwendet wird. Zum Ångström (Å) gilt demnach (die Unsicherheitsgrenze bei der Umrechnung Å → m kann vernachlässigt werden):

1 XE = $(1{,}002\,02 \pm 0{,}000\,03) \times 10^{-3}$ Ångström

DuMond (1959)[17] errechnet den Faktor XE/Å zu $1{,}002\,031 \times 10^{-3}$, der mit dem Wert von Birge[18] (1945) 1 XE = $(1{,}002\,030 \pm 0{,}000\,020) \times 10^{-3}$ Å übereinstimmt.

Die Spektroskopie der Atom- und Molekülstrahlungen verwendet zur Angabe von Wellenlängenwerten das *Ångström*. Es ist definiert durch die Relation[19]

Wellenlänge der roten Cadmiumlinie $\lambda_{n_{Cd}}$ = 6438,469**6** Ångström.

Die Wellenlänge[13] der roten Cadmiumlinie beträgt

$(6{,}438\,469_6 \pm 0{,}000\,003) \times 10^{-7}$ Meter,

woraus sich ergibt[13] 1 Ångström = $(1{,}000\,0000 \pm 0{,}000\,0005) \times 10^{-10}$ Meter.

Literatur

1) C. R. 1re Conf. Poids Mes. 1889, Paris (1889), S. 100. *2)* Barrell, H., *Nature*, **180**, 1387 (1957); Froome, K. D., *Proc. roy. Soc. A*, **247**, 109 (1958). *3) U.S. Coast and Geodetic Survey, Treasury Department*, Bull. Nr. 26 (1893) (Mendenhall Order). *4) Weights and Measures Act 1878. 5)* British Standards Institution, *BS* **350** (1944) *(Conversion Factors and Tables). 6)* Sears et al., *Phil. Trans. A*, **227**, 281 (1928). *7)* American Standards Association, *ASA B* **48.1** (1933) *(Inch-Millimeter Conversion Tables for Industrial Use). 8)* Gould, F. A., *Nature*, **182**, 1767 (1958); Editorial, *Nature*, **183**, 80 (1959). *9)* Internationale Union für Geodäsie und Geophysik, *Bull. géod. int.*, **1925**, 157, 540, 552. *10)* International Hydrographic Bureau, *Abridged Manual of the Symbols and Abbreviations used on Charts*, Spezialpublikation 22, Monaco (1928). Auch in der *Hydrogr. Rev.*, **5**, 227 (1928). *11)* National Bureau of Standards, *Techn. News Bull. U.S. Bur. Stand.*, **38**, 122 (1954). *12)* International Astronomical Union, *Trans. int. astr. Un.*, **6**, 20, 336 (1938); Bureau des Longitudes, *Annuaire pour l'an 1954*, Paris (1954), S. 189. *13)* Siehe Stille, U., *Messen und Rechnen in der Physik*, Braunschweig (1955). *14)* c_0-Wert der *International Scientific Radio Union* und der *International Union of Geodesy and Geophysics*, erwähnt in *17). 15)* Siegbahn, M., *Ann. Phys.*, **59** (4. Folge), 56 (1919); *Spektroskopie der Röntgenstrahlen*, Berlin (1932). *16)* Wood, E. A., *Phys. Rev.*, **72**, 436 (1947); Bragg, W. L., *J. sci. Instrum.*, **24**, 27 (1947). *17)* DuMond, J. W. M., *Ann. Phys. (N.Y.)*, **7**, 365 (1959). *18)* Birge, R. T., *Amer. J. Phys.*, **13**, 69 (1945). *19)* The International Union for Co-operation in Solar Research, *Trans. int. Un. sol. Res.*, **2**, 20 (1908); **3**, 135 (1911).

Länge — Umrechnung von Längenmaßen

Als Basis der Imperial-Maße wurde die Relation 1 imp. inch = 25,399 956 mm verwendet (vgl. S. 174)

Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit dem Faktor **B** und der der gesuchten Einheit entsprechenden Zehnerpotenz unter **C** zu multiplizieren

Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **D** zu multiplizieren

A		B	C							D									A
Name	Abkürzung		nm	µm	mm	cm	dm	m	km	XE	Å	AU	pc	ly	mi (US)	yd (US)	ft (US)	in (US)	
Nanometer (Millimikron)	nm (mµ)	**1** x	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-12}	9,97984x10^{5}	1,000000x10	6,688775x10^{-21}	3,242810x10^{-26}	1,057023x10^{-25}	6,213699x10^{-13}	1,093611x10^{-9}	3,28083̇ x10^{-9}	3,937 x10^{-8}	nm
Mikrometer (Mikron)	µm (µ)	**1** x	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-9}	9,97984x10^{8}	1,000000x10^{4}	6,688775x10^{-18}	3,242810x10^{-23}	1,057023x10^{-22}	6,213699x10^{-10}	1,093611x10^{-6}	3,28083̇ x10^{-6}	3,937 x10^{-5}	µm
Millimeter	mm	**1** x	10^{6}	10^{3}	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	9,97984x10^{11}	1,000000x10^{7}	6,688775x10^{-15}	3,242810x10^{-20}	1,057023x10^{-19}	6,213699x10^{-7}	1,093611x10^{-3}	3,28083̇ x10^{-3}	3,937 x10^{-2}	mm
Zentimeter	cm	**1** x	10^{7}	10^{4}	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-5}	9,97984x10^{12}	1,000000x10^{8}	6,688775x10^{-14}	3,242810x10^{-19}	1,057023x10^{-18}	6,213699x10^{-6}	1,093611x10^{-2}	3,28083̇ x10^{-2}	3,937 x10^{-1}	cm
Dezimeter	dm	**1** x	10^{8}	10^{5}	10^{2}	10	1	10^{-1}	10^{-4}	9,97984x10^{13}	1,000000x10^{9}	6,688775x10^{-13}	3,242810x10^{-18}	1,057023x10^{-17}	6,213699x10^{-5}	1,093611x10^{-1}	3,28083̇ x10^{-1}	3,937 x 1	dm
Meter	m	**1** x	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10	1	10^{-3}	9,97984x10^{14}	1,000000x10^{10}	6,688775x10^{-12}	3,242810x10^{-17}	1,057023x10^{-16}	6,213699x10^{-4}	1,093611x 1	3,28083̇ x 1	3,937 x10	m
Dekameter	dam	**1** x	10^{10}	10^{7}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10	10^{-2}	9,97984x10^{15}	1,000000x10^{11}	6,688775x10^{-11}	3,242810x10^{-16}	1,057023x10^{-15}	6,213699x10^{-3}	1,093611x10	3,28083̇ x10	3,937 x10^{2}	dam
Hektometer	hm	**1** x	10^{11}	10^{8}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10^{-1}	9,97984x10^{16}	1,000000x10^{12}	6,688775x10^{-10}	3,242810x10^{-15}	1,057023x10^{-14}	6,213699x10^{-2}	1,093611x10^{2}	3,28083̇ x10^{2}	3,937 x10^{3}	hm
Kilometer	km	**1** x	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	1	9,97984x10^{17}	1,000000x10^{13}	6,688775x10^{-9}	3,242810x10^{-14}	1,057023x10^{-13}	6,213699x10^{-1}	1,093611x10^{3}	3,28083̇ x10^{3}	3,937 x10^{4}	km
X-Einheit (Siegbahnsche)	XE	1,00202 x	10^{-4}	10^{-7}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-16}	**1** x 1	1,00202 x10^{-3}	6,70229 x10^{-25}	3,24936 x10^{-30}	1,05916 x10^{-29}	6,22625 x10^{-17}	1,09582 x10^{-13}	3,28746 x10^{-13}	3,94495 x10^{-12}	XE
Ångström	Å	1,000000x	10^{-1}	10^{-4}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-13}	9,97984x10^{2}	**1** x 1	6,688775x10^{-22}	3,242810x10^{-27}	1,057023x10^{-26}	6,213699x10^{-14}	1,093611x10^{-10}	3,280833x10^{-10}	3,937000x10^{-9}	Å
Astronom. Einheit	AU	1,495042x	10^{20}	10^{17}	10^{14}	10^{13}	10^{12}	10^{11}	10^{8}	1,49203x10^{24}	1,495042x10^{21}	**1** x 1	4,848137x10^{-6}	1,580294x10^{-5}	9,289742x10^{9}	1,634995x10^{11}	4,904984x10^{11}	5,885980x10^{12}	AU
Siriometer		1,495042x	10^{26}	10^{23}	10^{20}	10^{19}	10^{18}	10^{17}	10^{14}	1,49203x10^{30}	1,495042x10^{27}	**1** x10^{6}	4,848137x 1	1,580294x10	9,289742x10^{15}	1,634995x10^{17}	4,904984x10^{17}	5,885980x10^{18}	Siriom.
Parsec	pc	3,083745x	10^{25}	10^{22}	10^{19}	10^{18}	10^{17}	10^{16}	10^{13}	3,07753x10^{29}	3,083745x10^{26}	2,062648x10^{5}	**1** x 1	3,259591x 1	1,916147x10^{13}	3,372418x10^{16}	1,011726x10^{17}	1,214071x10^{17}	pc
Siriusweite		1,541873x	10^{26}	10^{23}	10^{20}	10^{19}	10^{18}	10^{17}	10^{14}	1,53876x10^{30}	1,541873x10^{27}	1,031324x10^{6}	**5** x 1	1,629795x10	9,580734x10^{13}	1,686209x10^{17}	5,058628x10^{17}	6,070353x10^{17}	Siriusw.
Lichtjahr	ly	9,460530x	10^{24}	10^{21}	10^{18}	10^{17}	10^{16}	10^{15}	10^{12}	9,44146x10^{28}	9,460530x10^{25}	6,327936x10^{4}	3,067870x10^{-1}	**1** x 1	5,878489x10^{12}	1,034614x10^{16}	3,103842x10^{16}	3,724611x10^{17}	ly
Mil (imp.)*		2,539996x	10^{4}	10	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-8}	2,53488x10^{8}	2,539996x10^{5}	1,698946x10^{-16}	8,236723x10^{-22}	2,684834x10^{-21}	1,578277x10^{-8}	2,777767x10^{-5}	8,333302x10^{-5}	9,999963x10^{-4}	mil(imp.)*
Mil (US)		2,540005x	10^{4}	10	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-8}	2,53488x10^{8}	2,540005x10^{5}	1,698952x10^{-16}	8,236753x10^{-22}	2,684844x10^{-21}	1,5782̈ x10^{-8}	2,7̇ x10^{-5}	8,3̇ x10^{-5}	**1** x10^{-3}	mil (US)
Inch (imp.)*	in	2,539996x	10^{7}	10^{4}	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-5}	2,53488x10^{11}	2,539996x10^{8}	1,698946x10^{-13}	8,236723x10^{-19}	2,684834x10^{-18}	1,578277x10^{-5}	2,777767x10^{-2}	8,333302x10^{-2}	9,999963x10^{-1}	in (imp.)*
Inch (US)**	in	2,540005x	10^{7}	10^{4}	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-5}	2,53488x10^{11}	2,540005x10^{8}	1,698952x10^{-13}	8,236753x10^{-19}	2,684844x10^{-18}	1,5782̈ x10^{-5}	2,7̇ x10^{-2}	8,3̇ x10^{-2}	**1** x 1	in (US)
Foot (imp.)*	ft	3,047995x	10^{8}	10^{5}	10^{2}	10	1	10^{-1}	10^{-4}	3,04185x10^{12}	3,047995x10^{9}	2,038735x10^{-12}	9,884067x10^{-18}	3,221801x10^{-17}	1,893932x10^{-4}	3,333321x10^{-1}	9,999963x10^{-1}	1,199996x10	ft (imp.)*
Foot (US)**	ft	3,048006x	10^{8}	10^{5}	10^{2}	10	1	10^{-1}	10^{-4}	3,04186x10^{12}	3,048006x10^{9}	2,038743x10^{-12}	9,884104x10^{-18}	3,221813x10^{-17}	1,8̈9̈3̈ x10^{-4}	3,3̇ x10^{-1}	**1** x 1	1,**2** x10	ft (US)
Yard (imp.)*	yd	9,143984x	10^{8}	10^{5}	10^{2}	10	1	10^{-1}	10^{-4}	9,12555x10^{12}	9,143984x10^{9}	6,116206x10^{-12}	2,965220x10^{-17}	9,665404x10^{-17}	5,681797x10^{-4}	9,999963x 1	2,999992x 1	3,599987x10	yd (imp.)*
Yard (US)	yd	9,144018x	10^{8}	10^{5}	10^{2}	10	1	10^{-1}	10^{-4}	9,12558x10^{12}	9,144018x10^{9}	6,116228x10^{-12}	2,965231x10^{-17}	9,665440x10^{-17}	5,6̈8̈1̈ x10^{-4}	**1** x 1	**3** x 1	3,**6** x10	yd (US)
Mile (imp.)*	mi	1,609341x	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	1	1,60610x10^{16}	1,609341x10^{13}	1,076452x10^{-8}	5,218787x10^{-14}	1,701111x10^{-13}	9,999963x 1	1,759993x10^{3}	5,279980x10^{3}	6,335976x10^{4}	mi (imp.)*
Mile (US)	mi	1,609347x	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	1	1,60610x10^{16}	1,609347x10^{13}	1,076456x10^{-8}	5,218807x10^{-14}	1,701117x10^{-13}	**1** x 1	1,**76** x10^{3}	5,**28** x10^{3}	6,33**6** x10^{4}	mi (US)
Nautical mile(imp.)*	n.mi	1,853181x	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	1	1,84944x10^{16}	1,853181x10^{13}	1,239551x10^{-8}	6,009513x10^{-14}	1,958855x10^{-13}	1,151511x 1	2,026659x10^{3}	6,079977x10^{3}	7,295973x10^{4}	n.mi (imp.)*
Seemeile (int.)	n.mi	1,85**2** x	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	1	1,84827x10^{16}	1,852000x10^{13}	1,238761x10^{-8}	6,005684x10^{-14}	1,957607x10^{-13}	1,150777x 1	2,025368x10^{3}	6,076103x10^{3}	7,291324x10^{4}	n.mi (int.)

* Wissenschaft. ** Vgl. auch Umrechnungstafel auf S. 174.

Fläche

Dimension: In allen Maßsystemen aus der Länge abgeleitete Dimension = L^2.

Grundeinheiten

MKS-System: Quadratmeter (m^2), CGS-System: Quadratzentimeter (cm^2), MTS-System: Quadratmeter (m^2), ft-lb-s-System: Square foot (ft^2 oder sq.ft) = 1/9 square yard.

Angelsächsische Flächeneinheiten

Zur Umrechnung gleichlautender Flächeneinheiten der Imperial Handel- und Wissenschaft-, der USA- und Normmaßsysteme sind die auf S. 174 genannten Umrechnungsfaktoren ins Quadrat zu erheben. Sie betragen dann:

	Imperial Handel	Imperial Wissenschaft	USA	Norm
Imperial Handel	**1**	1,000 001 732	0,999 994 266	0,999 998 266
Wissenschaft	0,999 998 266	**1**	0,999 992 534	0,999 996 534
USA	1,000 005 732	1,000 007 464	**1**	1,000 004 000
Norm	1,000 001 732	1,000 003 464	0,999 996 000	**1**

Definition des *Circular Inch:* das Circular Inch entspricht der Fläche eines Kreises mit 1 inch Durchmesser:

$$1 \text{ circular inch} = \frac{\pi}{4} \text{ in}^2 = 10^6 \text{ circular mils}$$

Umrechnung von Flächenmaßen

A Name	Abkürzung	Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit dem Faktor **B** und der gesuchten Einheit entspr. Zehnerpotenz unter **C** zu multiplizieren: B						C						Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Maßeinheit entsprechenden Faktoren unter **D** zu multiplizieren: D									
			µm²	mm²	cm²	dm²	m²	km²	circ.in (US)	in² (US)	ft² (US)	yd² (US)	acre (US)	mi² (US)
Quadratmikrometer	µm²	**1**	×	1	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}	10^{-18}	1,973517x10^{-9}	1,549997x10^{-9}	1,076387x10^{-11}	1,195985x10^{-12}	2,471044x10^{-16}	3,861006x10^{-19}
Quadratmillimeter	mm²	**1**	×	10^{6}	1	10^{-4}	10^{-6}	10^{-12}	10^{-18}	1,973517x10^{-3}	1,549997x10^{-3}	1,076387x10^{-5}	1,195985x10^{-6}	2,471044x10^{-10}	3,861006x10^{-13}
Quadratzentimeter	cm²	**1**	×	10^{8}	10^{2}	1	10^{-2}	10^{-10}	10^{-12}	1,973517x10^{-1}	1,549997x10^{-1}	1,076387x10^{-3}	1,195985x10^{-4}	2,471044x10^{-8}	3,861006x10^{-11}
Quadratdezimeter	dm²	**1**	×	10^{10}	10^{4}	10^{2}	1	10^{-2}	10^{-8}	1,973517x10	1,549997x10	1,076387x10^{-1}	1,195985x10^{-2}	2,471044x10^{-6}	3,861006x10^{-9}
Quadratmeter	m²	**1**	×	10^{12}	10^{6}	10^{4}	10^{2}	1	10^{-6}	1,973517x10^{3}	1,549997x10^{3}	1,076387x10	1,195985x 1	2,471044x10^{-4}	3,861006x10^{-7}
Quadratdekameter (Are)	dam² (a)	**1**	×	10^{14}	10^{8}	10^{6}	10^{4}	10^{2}	10^{-4}	1,973517x10^{5}	1,549997x10^{5}	1,076387x10^{3}	1,195985x10^{2}	2,471044x10^{-2}	3,861006x10^{-5}
Quadrathektometer (Hektare)	hm² (ha)	**1**	×	10^{16}	10^{10}	10^{8}	10^{6}	10^{4}	10^{-2}	1,973517x10^{7}	1,549997x10^{7}	1,076387x10^{5}	1,195985x10^{4}	2,471044x 1	3,861006x10^{-3}
Quadratkilometer	km²	**1**	×	10^{18}	10^{12}	10^{10}	10^{8}	10^{6}	1	1,973517x10^{9}	1,549997x10^{9}	1,076387x10^{7}	1,195985x10^{6}	2,471044x10^{2}	3,861006x10^{-1}
Circular inch* (imp.)		5,067057x		10^{8}	10^{2}	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-10}	9,999925x10^{-1}	7,853923x10^{-1}	5,454113x10^{-3}	6,060126x10^{-4}	1,252092x10^{-7}	1,956394x10^{-10}
Circular inch (US)		5,067095x		10^{8}	10^{2}	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-10}	**1** x 1	7,853982x10^{-1}	5,454154x10^{-3}	6,060171x10^{-4}	1,252101x10^{-7}	1,956409x10^{-10}
Square inch* (imp.)	sq.in od. in²	6,451578x		10^{8}	10^{2}	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-10}	1,273230x 1	9,999925x10^{-1}	6,944393x10^{-3}	7,715992x10^{-4}	1,594213x10^{-7}	2,490958x10^{-10}
Square inch (US)	sq.in od. in²	6,451626x		10^{8}	10^{2}	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-10}	1,273240x 1	**1** x 1	6,94 x10^{-3}	7,716049x10^{-4}	1,594225x10^{-7}	2,490977x10^{-10}
Square foot* (imp.)	sq.ft od. ft²	9,290272x		10^{10}	10^{4}	10^{2}	1	10^{-2}	10^{-8}	1,833451x10^{2}	1,439989x10^{2}	9,999925x10^{-1}	1,111103x10^{-1}	2,295667x10^{-5}	3,586980x10^{-8}
Square foot (US)	sq.ft od. ft²	9,290341x		10^{10}	10^{4}	10^{2}	1	10^{-2}	10^{-8}	1,833465x10^{2}	1,44 x10^{2}	**1** x 1	1,1 x10^{-1}	2,295684x10^{-5}	3,587006x10^{-8}
Square yard* (imp.)	sq.yd od. yd²	8,361245x		10^{11}	10^{5}	10^{3}	10	10^{-1}	10^{-7}	1,650106x10^{-1}	1,295990x10^{3}	8,999933x 1	9,999925x10^{-1}	2,066100x10^{-4}	3,228282x10^{-7}
Square yard (US)	sq.yd od. yd²	8,361307x		10^{11}	10^{5}	10^{3}	10	10^{-1}	10^{-7}	1,650118x10^{-3}	1,296 x10^{3}	**9** x 1	**1** x 1	2,066116x10^{-4}	3,228306x10^{-7}
Acre* (imp.)	A. od. ac	4,046842x		10^{15}	10^{9}	10^{7}	10^{5}	10^{3}	10^{-3}	7,986514x10^{6}	6,272593x10^{6}	4,355967x10^{4}	4,839964x10^{3}	9,999925x10^{-1}	1,562488x10^{-3}
Acre (US)	A. od. ac	4,046873x		10^{15}	10^{9}	10^{7}	10^{5}	10^{3}	10^{-3}	7,986573x10^{6}	6,27264 x10^{6}	4,356 x10^{4}	4,84 x10^{3}	**1** x 1	1,5625 x10^{-3}
Square mile* (imp.)	sq.mi od. mi²	2,589979x		10^{18}	10^{12}	10^{10}	10^{8}	10^{6}	1	5,111369x10^{9}	4,014460x10^{9}	2,787819x10^{7}	3,097577x10^{6}	6,399952x10^{2}	9,999925x10^{-1}
Square mile (US)	sq.mi od. mi²	2,589998x		10^{18}	10^{12}	10^{10}	10^{8}	10^{6}	1	5,111407x10^{9}	4,014490x10^{9}	2,78784 x10^{7}	3,09976 x10^{6}	6,4 x10^{2}	**1** x 1

* Wissenschaft.

Umrechnung von Volumen- und Hohlmaßen

A Name	Abkürzung	Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit dem Faktor **B** und der gesuchten Einheit entsprechenden Zehnerpotenz unter **C** zu multiplizieren: B						C						Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **D** zu multiplizieren: D									
			mm³	cm³	dm³	m³	µl	ml	dl	l	hl	in³ (US)	ft³ (US)	yd³ (US)
Kubikmikrometer	µm³	**1**	×	1	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	9,999720x10^{-10}	9,999720x10^{-13}	9,999720x10^{-15}	9,999720x10^{-16}	9,999720x10^{-18}	6,102338x10^{-14}	3,531445x10^{-17}	1,307943x10^{-18}
Kubikmillimeter	mm³	**1**	×	10^{9}	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	9,999720x10^{-7}	9,999720x10^{-10}	9,999720x10^{-12}	9,999720x10^{-13}	9,999720x10^{-15}	6,102338x10^{-11}	3,531445x10^{-14}	1,307943x10^{-15}
Kubikzentimeter	cm³	**1**	×	10^{12}	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-6}	9,999720x10^{4}	9,999720x10^{-1}	9,999720x10^{-3}	9,999720x10^{-4}	9,999720x10^{-6}	6,102338x10^{-2}	3,531445x10^{-5}	1,307943x10^{-6}
Kubikdezimeter	dm³	**1**	×	10^{15}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1	9,999720x10^{6}	9,999720x 1	9,999720x10^{3}	9,999720x10^{-1}	9,999720x10^{-3}	6,102338x10	3,531445x10^{-2}	1,307943x10^{-3}
Kubikmeter (Ster)	m³	**1**	×	10^{18}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1	9,999720x10^{9}	9,999720x10^{6}	9,999720x10^{3}	9,999720x10^{2}	9,999720x 1	6,102338x10^{4}	3,531445x10	1,307943x 1
Mikroliter	µl	1,000028x	**1**	10^{9}	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	**1** x 1	**1** x10^{-3}	**1** x10^{-5}	**1** x10^{-6}	**1** x10^{-8}	6,102509x10^{-5}	3,531544x10^{-8}	1,307979x10^{-9}
Milliliter	ml	1,000028x	**1**	10^{12}	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-6}	**1** x10^{3}	**1** x 1	**1** x10^{-2}	**1** x10^{-3}	**1** x10^{-5}	6,102509x10^{-2}	3,531544x10^{-5}	1,307979x10^{-6}
Deziliter	dl	1,000028x	**1**	10^{14}	10^{5}	10^{2}	1	10^{-1}	**1** x10^{5}	**1** x10^{2}	**1** x 1	**1** x10^{-1}	**1** x10^{-3}	6,102509x 1	3,531544x10^{-3}	1,307979x10^{-4}
Liter	l	1,000028x	**1**	10^{15}	10^{6}	10^{3}	1	10^{-3}	**1** x10^{6}	**1** x10^{3}	**1** x10	**1** x 1	**1** x10^{-2}	6,102509x10	3,531544x10^{-2}	1,307979x10^{-3}
Hektoliter	hl	1,000028x	**1**	10^{17}	10^{8}	10^{5}	10^{2}	10^{-1}	**1** x10^{8}	**1** x10^{5}	**1** x10^{2}	**1** x10^{1}	**1** x 1	6,102509x10^{3}	3,531544x 1	1,307979x10^{-1}
Cubic inch* (imp.)	cu. in od. in³	1,638698x	10^{18}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1	9,999720x10^{9}	9,999720x10^{6}	9,999720x10^{3}	9,999720x10^{2}	9,999888x10^{-1}	5,786972x10^{-4}	2,143323x10^{-5}
Cubic inch (US)	cu. in od. in³	1,638716x	10^{23}	10^{14}	10^{11}	10^{8}	10^{5}	10^{2}	1,638670x10^{4}	1,638670x10	1,638670x10^{-1}	1,638670x10^{-2}	1,638670x10^{-4}	**1** x 1	5,78703 x10^{-4}	2,143347x10^{-5}
Cubic foot* (imp.)	cu. ft od. ft³	2,831670x	10^{24}	10^{16}	10^{13}	10^{10}	10^{7}	10^{4}	2,831591x10^{7}	2,831591x10^{4}	2,831591x10^{3}	2,831591x10	2,831591x10^{-1}	1,727981x10^{3}	9,999888x10^{-1}	3,703662x10^{-2}
Cubic foot (US)	cu. ft od. ft³	2,831702x	10^{24}	10^{16}	10^{13}	10^{10}	10^{7}	10^{4}	2,831622x10^{7}	2,831622x10^{4}	2,831622x10^{3}	2,831622x10^{2}	2,831622x10^{-1}	1,728 x10^{3}	**1** x 1	3,703 x10^{-2}
Cubic yard* (imp.)	cu. yd od. yd³	7,645599x	10^{27}	10^{18}	10^{15}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	7,645295x10^{8}	7,645295x10^{5}	7,645295x10^{4}	7,645295x10^{3}	7,645295x 1	4,665548x10^{4}	2,699970x10	9,999888x10^{-1}
Cubic yard (US)	cu. yd od. yd³	7,645594x	10^{27}	10^{18}	10^{15}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	7,645380x10^{8}	7,645380x10^{5}	7,645380x10^{4}	7,645380x10^{3}	7,645380x 1	4,6656 x10^{4}	2,7 x10	**1** x 1
Register Ton* (imp.)	reg. tn	2,831670x	10^{18}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1	2,831591x10^{3}	2,831591x10^{6}	2,831591x10^{4}	2,831591x10^{3}	2,831591x10	2,831591x10^{-1}	1,727981x10^{3}	9,999888x10	3,703662x 1
Register Ton (US)	reg. tn	2,831702x	10^{18}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1	2,831622x10^{3}	2,831622x10^{6}	2,831622x10^{4}	2,831622x10^{3}	2,831622x10	2,831622x10^{-1}	1,728 x10^{3}	**1** x10^{3}	3,703 x 1

* Wissenschaft.

Volumen- und Hohlmaße

Dimension: In allen Maßsystemen aus Länge und Fläche abgeleitete Dimension = L^3.

Grundeinheiten

MKS-System: Kubikmeter (m^3), CGS-System: Kubikzentimeter (cm^3), MTS-System: Kubikmeter (m^3), ft-lb-s-System: Cubic foot (ft^3 oder cu.ft) = 1/27 cubic yard.

Volumen- und Hohlmaße

Physikalisch besteht zwischen Volumen- und Hohlmaßen kein theoretischer Unterschied, das heißt, die Dimension ist bei beiden L^3. Die Volumen- oder Raummaße sind definiert als dritte Potenz der entsprechenden Längeneinheiten (zum Beispiel m^3, in^3 usw.). Eine genaue Realisierung dieser geometrischen Definition ist aber in der Praxis schwierig. Andererseits führt eine

praktisch sehr genau realisierbare physikalische Definition zu den sogenannten Hohlmaßen, denen an Stelle eines Raum- ein *Gewichts*meßverfahren zugrunde liegt: Die Hohlmaße entsprechen einem Volumen, das von einer bestimmten Menge Wasser unter festgelegten Bedingungen eingenommen wird.

Metrische Maßsysteme

Das *Hohlmaß* der metrischen Systeme ist der Liter[1]. Er ist definiert als das Volumen, das von einem Kilogramm reinem, luftfreiem Wasser bei seiner größten Dichte (3,98 ° C) unter normalem atmosphärischem Druck (1 atm = 760 Torr) eingenommen wird[2]. 1950 legte das Internationale Komitee für Maß und Gewicht folgende Umrechnungsbeziehung zwischen Liter und metrischen *Raumeinheiten* fest[2]:

1 Liter = 1,000028 dm^3 = 1000,028 cm^3 usw.

Der Umrechnungsfaktor 1,000 028 wird heute als fehlerfreier Wert für die Umrechnung zwischen metrischen Raum- und Hohlmaßeinheiten angesehen.

---

1) C. R. 3e Conf. Poids Mes., 1901, Paris (1901), S. 37.

2) Comité international des Poids et Mesures, P. V. Com. int. Poids Mes., **22**, 77 und 94 (1950).

Angelsächsische Maßsysteme

Hohlmaße. Im allgemeinen werden in den angelsächsischen Maßsystemen das Gallon (gal) und die darauf bezogenen Einheiten als Hohlmaße für Flüssigkeiten, das Bushel (bu) und die darauf bezogenen Einheiten als Hohlmaße für Trockensubstanzen benutzt. Dabei ist darauf hinzuweisen, daß im Vereinigten Königreich sowohl das Gallon als auch das Bushel und die darauf bezogenen Einheiten für Flüssigkeiten und Trockensubstanzen zugelassen sind, während in den USA das Gallon und entsprechende Einheiten nur für Flüssigkeiten, das Bushel und

Umrechnung von US-Hohlmaßen für Trockensubstanzen

A		B: Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **B** zu multiplizieren							C: siehe Anmerkung
Name	Abkürzung	m^3	l	in^3 (US)	dry pt (US)	dry qt (US)	pk	bu	Imperial
Kubikmeter	m^3	**1** x 1	9,999720x10^2	6,102338x10^4	1,816155x10^3	9,080775x10^2	1,135097x10^2	2,837742x10	—
Liter	l	1,000028x10^{-3}	**1** x 1	6,102509x10	1,816206x 1	9,081030x10^{-1}	1,135129x10^{-1}	2,837822x10^{-2}	—
Cubic inch (US)	cu.in od.in^3 (US)	1,638716x10^{-5}	1,638670x10^{-2}	**1** x 1	2,976163x10^{-2}	1,488081x10^{-2}	1,860102x10^{-3}	4,650254x10^{-4}	1,000011 20
Dry pint (US)	dry pt (US)	5,506138x10^{-4}	5,505984x10^{-1}	3,360031x10	**1** x 1	**5** x10^{-1}	6,**25** x10^{-2}	1,562**5** x10^{-2}	0,96894472
Dry quart (US)	dry qt (US)	1,101228x10^{-3}	1,101197x 1	6,720062x10	**2** x 1	**1** x 1	1,**25** x10^{-1}	3,12**5** x10^{-2}	0,96894472
Peck (US)	pk (US)	8,809820x10^{-3}	8,809574x 1	5,37605 x10^2	1,**6** x10	**8** x 1	**1** x 1	2,**5** x10^{-1}	0,96894472
Bushel (US)	bu (US)	3,523928x10^{-2}	3,523829x10	2,15042 x10^3	6,**4** x10	3,**2** x10	**4** x 1	**1** x 1	0,96894472

Umrechnung von US-Hohlmaßen für Flüssigkeiten

A		B: Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **B** zu multiplizieren										C: siehe Anmerkung
Name	Abkürzung	m^3	l	in^3 (US)	min (US)	fl. dr (US)	fl. oz (US)	gi (US)	liq. pt (US)	liq. qt (US)	gal (US)	Imperial
Kubikmeter	m^3	**1** x 1	9,999720x10^2	6,102338x10^4	1,623063x10^7	2,705106x10^5	3,381382x10^4	8,453455x10^3	2,113364x10^3	1,056682x10^3	2,641705x10^2	—
Liter	l	1,000028x10^{-3}	**1** x 1	6,102509x10	1,623109x10^4	2,705181x10^2	3,381477x10	8,453692x 1	2,113423x 1	1,056711x 1	2,641779x10^{-1}	—
Cubic inch (US)	cu. in od.in^3 (US)	1,638716x10^{-5}	1,638670x10^{-2}	**1** x 1	2,659740x10^2	4,432900x 1	5,541126x10^{-1}	1,385281x10^{-1}	3,463203x10^{-2}	1,731602x10^{-2}	4,329004x10^{-3}	1,000011 20
Minim (US)	min (US)	6,161189x10^{-8}	6,161016x10^{-5}	3,759766x10^{-3}	**1** x 1	1,6 x10^{-2}	2,083 x10^{-3}	5,2083 x10^{-4}	1,302083x10^{-4}	6,510416x10^{-5}	1,627604x10^{-5}	0,96075424
Fluid dram (US)	fl. dr (US)	3,696713x10^{-6}	3,696610x10^{-3}	2,255859x10^{-1}	**6** x10	**1** x 1	1,**25** x10^{-1}	3,12**5** x10^{-2}	7,812**5** x10^{-3}	3,906**25** x10^{-3}	9,765625x10^{-4}	0,96075424
Fluid ounce* (US)	fl. oz (US)	2,957371x10^{-5}	2,957288x10^{-2}	1,804688x 1	4,**8** x10^2	**8** x 1	**1** x 1	2,**5** x10^{-1}	6,**25** x10^{-2}	3,12**5** x10^{-2}	7,812**5** x10^{-3}	0,96075424
Gill (US)	gi (US)	1,182948x10^{-4}	1,182915x10^{-1}	7,21875 x 1	1,**92** x10^3	3,**2** x10	**4** x 1	**1** x 1	2,**5** x10^{-1}	1,**25** x10^{-1}	3,**125** x10^{-2}	0,83267913
Liquid pint* (US)	liq. pt (US)	4,731793x10^{-4}	4,731661x10^{-1}	2,8875 x10	7,**68** x10^3	1,**28** x10^2	1,**6** x10	**4** x 1	**1** x 1	**5** x10^{-1}	1,**25** x10^{-1}	0,83267913
Liquid quart (US)	liq. qt (US)	9,463586x10^{-4}	9,463321x10^{-1}	5,775 x10	1,**536** x10^4	2,**56** x10^2	3,**2** x10	**8** x 1	**2** x 1	**1** x 1	2,**5** x10^{-1}	0,83267913
Gallon* (US)	gal (US)	3,785434x10^{-3}	3,785329x 1	2,31 x10^2	6,**144** x10^4	1,**024** x10^3	1,**28** x10^2	3,**2** x10	**8** x 1	**4** x 1	**1** x 1	0,83267913

Umrechnung von Imperial-Hohlmaßen (die Imperial-Hohlmaße sind für Flüssigkeiten und Trockensubstanzen zulässig)

A		B: Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **B** zu multiplizieren														C: siehe Anmerkung	
Name	Abkürzung	m^3	l	in^3 (imp.)	min (imp.)	fl. dr (imp.)	fl. oz (imp.)	gi (imp.)	pt (imp.)	qt (imp.)	gal (imp.)	pk (imp.)	bu (imp.)	US liquid	US dry
Kubikmeter	m^3	**1** x 1	9,999720x10^2	6,102406x10^4	1,689364x10^7	2,815606x10^5	3,519508x10^4	7,039015x10^3	1,759754x10^3	8,798769x10^2	2,199692x10^2	1,099846x10^2	2,749615x10	—	—
Liter	l	1,000028x10^{-3}	**1** x 1	6,102577x10	1,689411x10^4	2,815685x10^2	3,519606x10	7,039213x 1	1,759803x 1	8,799016x10^{-1}	2,199754x10^{-1}	1,099877x10^{-1}	2,749692x10^{-2}	—	—
Cubic inch (imp.)	cu. in od. in^3 (imp.)	1,638698x10^{-5}	1,638652x10^{-2}	**1** x 1	2,768357x10^2	4,613928x 1	5,767410x10^{-1}	1,153482x10^{-1}	2,883705x10^{-2}	1,441852x10^{-2}	3,604631x10^{-3}	1,802316x10^{-3}	4,505789x10^{-4}	0,99998880	0,99998880
Minim (imp.)	min (imp.)	5,919388x10^{-8}	5,919223x10^{-5}	3,612251x10^{-3}	**1** x 1	1,6 x10^{-2}	2,083 x10^{-3}	4,16 x10^{-4}	1,0416 x10^{-4}	5,2083 x10^{-5}	1,302083x10^{-5}	6,510416x10^{-6}	1,627604x10^{-6}	1,04084891	keine Einh.
Fluid drachm (imp.)	fl. dr (imp.)	3,551633x10^{-6}	3,551534x10^{-3}	2,167351x10^{-1}	**6** x10	**1** x 1	1,**25** x10^{-1}	2,**5** x10^{-2}	6,**25** x10^{-3}	3,12**5** x10^{-3}	7,812**5** x10^{-4}	3,906**25** x10^{-4}	9,765625x10^{-5}	1,04084891	keine Einh.
Fl. ounce* (imp.)	fl. oz (imp.)	2,841306x10^{-5}	2,841227x10^{-2}	1,733881x 1	4,**8** x10^2	**8** x 1	**1** x 1	**2** x10^{-1}	**5** x10^{-2}	2,**5** x10^{-2}	6,**25** x10^{-3}	3,**125** x10^{-3}	7,812**5** x10^{-4}	1,04084891	keine Einh.
Gill (imp.)	gi (imp.)	1,420653x10^{-4}	1,420613x10^{-1}	8,669403x 1	2,**4** x10^3	**4** x10	**5** x 1	**1** x 1	2,**5** x10^{-1}	1,**25** x10^{-1}	3,**125** x10^{-2}	1,562**5** x10^{-2}	3,906**25** x10^{-3}	1,20094280	keine Einh.
Pint* (imp.)	pt (imp.)	5,682613x10^{-4}	5,682454x10^{-1}	3,467761x10	9,**6** x10^3	1,**6** x10^2	**2** x10	**4** x 1	**1** x 1	**5** x10^{-1}	1,**25** x10^{-1}	6,**25** x10^{-2}	1,562**5** x10^{-2}	1,20094280	1,03205062
Quart (imp.)	qt (imp.)	1,136523x10^{-3}	1,136491x 1	6,935522x10	1,**92** x10^4	3,**2** x10^2	**4** x10	**8** x 1	**2** x 1	**1** x 1	2,**5** x10^{-1}	1,**25** x10^{-1}	3,**125** x10^{-2}	1,20094280	1,03205062
Gallon* (imp.)	gal (imp.)	4,546090x10^{-3}	4,545963x 1	2,774209x10^2	7,**68** x10^4	1,**28** x10^3	1,**6** x10^2	3,**2** x10	**8** x 1	**4** x 1	**1** x 1	**5** x10^{-1}	1,**25** x10^{-1}	1,20094280	keine Einh.
Peck (imp.)	pk (imp.)	9,092181x10^{-3}	9,091926x 1	5,548418x10^2	1,**536** x10^5	2,**56** x10^3	3,**2** x10^2	6,**4** x10	1,**6** x10	**8** x 1	**2** x 1	**1** x 1	2,**5** x10^{-1}	keine Einh.	1,03205062
Bushel (imp.)	bu (imp.)	3,636872x10^{-2}	3,636770x10	2,219367x10^3	6,**144** x10^5	1,**024** x10^4	1,**28** x10^3	2,**56** x10^2	6,**4** x10	3,**2** x10	**8** x 1	**4** x 1	**1** x 1	keine Einh.	1,03205062

Anmerkung zu C: Man multipliziere den gegebenen US- (Imperial-) Wert unter **A** mit dem auf der gleichen Zeile stehenden Faktor unter **C**, um den entsprechenden Imperial- (US-) Wert zu erhalten. Das gleiche gilt für die Äquivalente unter **B**: zum Beispiel 3,696 610 × 10^{-3} l (= 1 fl. dr US) × 0,960 754 24 = 3,551 534 × 10^{-3} l (= 1 fl. dr imp.).

* Vgl. Umrechnungstafel auf S. 735.

entsprechende Einheiten nur für Trockensubstanzen verwendet werden dürfen.

Im Vereinigten Königreich wird durch die Weights and Measures Act 1878 das Gallon als jenes Volumen festgelegt, das von 10 imperial pound destilliertem Wasser bei 62 °F, gewogen in Luft mit Messinggewichten und bei einem Barometerdruck von 30 inches, eingenommen wird. Diese Definition ist mangelhaft, weshalb in einer Order in Council vom 19. Mai 1898 folgende Umrechnungsbeziehung definiert wurde

1 imp. gallon = 4,545 9631 Liter und
1 imp. bushel = 8 imp. gallons

Mit den Umrechnungsfaktoren zwischen Liter und Kubikmeter und zwischen Kubikmeter und Cubic Inch ergibt sich

1 imp. gallon (Handel) = 277,420 imp. (Handel) cubic inches
1 imp. gallon (Wissenschaft) = 277,421 imp. (Wissenschaft) cubic inches

In den USA gelten heute folgende Definitionen

1 US-gallon = 231 US-cubic inches
1 US-bushel = 2150,42 US-cubic inches

Zwischen Imperial- und US-Hohlmaßen bestehen größere Differenzen, die am besten aus den beigefügten Umrechnungstabellen abgelesen werden können. Es ist noch nachzutragen, daß die Hohlmaße Minim, Fluid Scruple (in den Umrechnungstabellen weggelassen, da nur im Vereinigten Königreich gültig), Fluid Drachm (imp.) bzw. Fluid Dram (US) und die Fluid Ounce Apothekermaße darstellen, die auf die entsprechenden Masseneinheiten abgestimmt sind, das heißt 1 minim : 1 fl. scruple : 1 fl. drachm bzw. dram : 1 fl. ounce = 1 grain : 1 scruple : 1 drachm bzw. dram apoth. : 1 ounce apoth. = 1 : 20 : 60 : 480.

Volumenmaße (in³, ft³ usw.). Zur Umrechnung gleichlautender Volumeneinheiten der Imperial-Handel- und -Wissenschaft-, der USA- und Normmaßsysteme sind die auf S. 174 genannten Umrechnungsfaktoren in die dritte Potenz zu erheben. Sie betragen dann:

	Imperial		USA	Norm
	Handel	Wissenschaft		
Imperial Handel	**1**	1,000 002 598	0,999 991 399	0,999 997 399
Wissenschaft	0,999 997 399	**1**	0,999 988 801	0,999 994 801
USA	1,000 008 598	1,000 011 196	**1**	1,000 006 000
Norm	1,000 002 598	1,000 005 196	0,999 994 000	**1**

Masse

Dimension

in den Länge-Masse-Zeit-Systemen (LMT-Systemen) = M
in den Länge-Kraft-Zeit-Systemen (LKT-Systemen) = $L^{-1} K T^2$

Grundeinheiten

LMT-Systeme: MKS-System: Kilogramm (kg), CGS-System: Gramm (g), MTS-System: Tonne (t), ft-lb-s-System: Pound (lb).

LKT-Systeme: Im Meter-Kilogramm-Kraft-Sekunde- (m-kp-s-) System, das in der Technik viel verwendet wird, ist die Einheit der Masse eine abgeleitete Einheit der Formel $m^{-1} kp s^2$, die 9,806 **65** kg entspricht. Diese Einheit trägt keinen Eigennamen und wird mit der rasch fortschreitenden Verbreitung des MKS-Systems jegliche Bedeutung verlieren, da sie schon bisher selten benutzt und in der Technik in der Regel durch Gewicht/Fallbeschleunigung ersetzt wurde. In diesem Falle ist die technische Einheit = kp/9,806 **65** $m\,s^{-2}$ und entspricht damit dem Kilogramm des MKS-Systems.

Metrische Maßsysteme

Die metrische Fundamentaleinheit der Masse ist das *Kilogramm* (kg). Es wird durch den internationalen Kilogrammprototyp verkörpert, einem Platin-Iridium-Zylinder, der im Internationalen Bureau für Maß und Gewicht in Sèvres (Frankreich) aufbewahrt wird[1].

Angelsächsische Maßsysteme

In den angelsächsischen Ländern bestehen drei Masseneinheitensysteme nebeneinander: Das *Avoirdupois*-System für Handel, Industrie und Wissenschaft, das *Troy*-System für den Edelmetall- und Edelsteinhandel sowie für die staatliche Münze und das *Apothecary*-System. Diesen drei Systemen gemeinsam ist das Grain (gr), das seinerseits als der 7000. Teil des Avoirdupois Pound (lb av.) definiert ist.

Im Vereinigten Königreich wird das Avoirdupois Pound durch das Imperial Standard Pound verkörpert, einem Platinzylinder, der im Standards Department of the Board of Trade aufbewahrt wird. Dieses Imperial Pound ist durch die Weights and Measures Act 1878 legalisiert worden. Nach einer Order in Council vom 19. Mai 1898 besteht dafür die für den Handel gesetzliche Umrechnungsbeziehung

1 imp. pound = 0,453 592 43 Kilogramm

Für wissenschaftliche Untersuchungen höchster Präzision gilt die vom National Physical Laboratory (NPL) ermittelte Relation

1 imp. pound = 0,453 592 338 Kilogramm

Die wichtigsten Länder des englischen Sprachgebiets sind neulich übereingekommen, in Wissenschaft und Technologie ein «internationales Pound» zu verwenden[2].

1 int. pound = 0,453 592 37 Kilogramm

In den Vereinigten Staaten ist das Avoirdupois Pound nach der Mendenhall Order von 1893[3] auf das Kilogramm bezogen nach der Relation

1 US-pound avoirdupois = 1/2,204**6** Kilogramm

was einen Umrechnungsfaktor von 0,453 597 024 ergäbe. Nach dem National Bureau of Standards (NBS) gilt heute die definierende Umrechnungsbeziehung

1 US-pound avoirdupois = 0,453 592 4**277** Kilogramm

Im Vereinigten Königreich ist das Troy Pound nicht mehr legal, eine Reihe darauf bezogener Untereinheiten ist aber noch im Edelmetall- und Edelsteinhandel zugelassen (vgl. Umrechnungstabelle). In den Vereinigten Staaten hingegen ist das Troy Pound die gesetzliche Grundeinheit für Münzen.

1 US-pound troy = 5760/7000 US-pound avoirdupois

Den beigefügten Umrechnungstafeln ist der USA-Wert des NBS zugrunde gelegt.

Internationale Einheit für den Edelmetall- und Edelsteinhandel

1 Karat (c) = 0,0002 Kilogramm = 0,2 Gramm = 200 Milligramm

Umrechnung von Masseneinheiten

A | **B** | **C** | **D**

B: Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit dem Faktor **B** und der gesuchten Einheit entsprechenden Zehnerpotenz unter **C** zu multiplizieren

D: Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **D** zu multiplizieren

Name	Abkürzung	**A**	**B** µg	mg	g	kg	**C** t	gr	dr av.	oz av.	lb av.	ctl (imp.), sh. cwt (US)	cwt (imp.), l. cwt (US)	sh. tn (US)	tn (imp.), l. tn (US)
Mikrogramm (Gamma. *Sollte nicht mehr verwendet werden!*)	µg (γ)	**1**	× 1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	1,543236x10^{-5}	5,643833x10^{-7}	3,527396x10^{-8}	2,204622x10^{-9}	2,204622x10^{-11}	1,968413x10^{-11}	1,102311x10^{-12}	9,842064x10^{-13}
Milligramm	mg	**1**	× 10^3	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	1,543236x10^{-2}	5,643833x10^{-4}	3,527396x10^{-5}	2,204622x10^{-6}	2,204622x10^{-8}	1,968413x10^{-8}	1,102311x10^{-9}	9,842064x10^{-10}
Gramm	g	**1**	× 10^6	10^3	1	10^{-3}	10^{-6}	1,543236x10	5,643833x10^{-1}	3,527396x10^{-2}	2,204622x10^{-3}	2,204622x10^{-5}	1,968413x10^{-5}	1,102311x10^{-6}	9,842064x10^{-7}
Kilogramm	kg	**1**	× 10^9	10^6	10^3	1	10^{-3}	1,543236x10^4	5,643833x10^2	3,527396x10	2,204622x 1	2,204622x10^{-2}	1,968413x10^{-2}	1,102311x10^{-3}	9,842064x10^{-4}
Tonne	t	**1**	× 10^{12}	10^9	10^6	10^3	1	1,543236x10^7	5,643833x10^5	3,527396x10^4	2,204622x10^3	2,204622x10	1,968413x10	1,102311x 1	9,842064x10^{-1}
Grain*, avoirdupois, apothecary oder troy (imp., US)	gr	6,479892x	10^4	10	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	**1**	x 1	3,657143x10^{-2}	2,285714x10^{-3}	1,428571x10^{-4}	1,428571x10^{-6}	1,275511x10^{-6}	7,142587x10^{-8}	6,377551x10^{-8}
Dram, avoirdupois (imp., US)	dr av.	1,771845x	10^6	10^3	1	10^{-3}	10^{-6}	2,734375x10	**1**	x 1	6,**25**	x10^{-2}	3,906**25** x10^{-3}	3,906**25** x10^{-5}	3,487723x10^{-5}	1,95312**5**x10^{-6}	1,743862x10^{-6}
Ounce**, avoirdup. (imp., US)	oz av.	2,834953x	10^7	10^4	10	10^{-2}	10^{-5}	4,37**5** x10^3	1,**6** x10	**1**	6,**25** x10^{-2}	6,**25** x10^{-4}	5,580357x10^{-4}	3,1**25** x10^{-5}	2,790179x10^{-5}
Pound*, avoirdup. (imp., US)	lb av.	4,535924x	10^8	10^5	10^2	10^{-1}	10^{-4}	**7** x10^3	2,**56** x10^3	1,**6** x10	**1** x 1	x10^{-2}	8,928571x10^{-3}	**5** x10^{-4}	4,464286x10^{-4}
Cental (imp.)	ctl	4,535924x	10^{10}	10^7	10^4	10	10^{-2}	**7** x10^5	2,**56** x10^4	1,**6** x10^3	**1** x10^3	x 1	8,928571x10^{-1}	**5** x10^{-2}	4,464286x10^{-2}
Short hundredweight (US)	sh. cwt	5,080235x	10^{10}	10^7	10^4	10	10^{-2}	7,**84** x10^5	2,86**72** x10^4	1,**792** x10^3	1,**12** x10^2	1,**12** x 1	**1** x 1	**5**,**6** x10^{-2}	**5** x10^{-2}
Hundredweight (imp.)	cwt	5,080235x	10^{10}	10^7	10^4	10	10^{-2}	7,**84** x10^5	2,86**72** x10^4	1,**792** x10^3	1,**12** x10^2	1,**12** x 1	**1** x 1	**5**,**6** x10^{-2}	**5** x10^{-2}
Long hundredweight (US)	l. cwt	9,071849x	10^{11}	10^8	10^5	10^2	10^{-1}	**1**,**4** x10^6	**5**,**12** x10^5	**3**,**2** x10^4	**2** x10^3	**2** x10	1,785714x10	**1** x 1	8,928571x10^{-1}
Short ton (US)	sh. tn	9,071849x	10^{11}	10^8	10^5	10^2	10^{-1}	**1**,**4** x10^6	**5**,**12** x10^5	**3**,**2** x10^4	**2** x10^3	**2** x10	1,785714x10	**1** x 1	8,928571x10^{-1}
Ton (imp.)	tn	1,016047x	10^{12}	10^9	10^6	10^3	1	**1**,**568** x10^6	**5**,**7344** x10^5	**3**,**584** x10^4	**2**,**24** x10^3	**2**,**24** x10	**2** x10	**1**,**12** x 1	**1** x 1
Long ton (US)	l. tn	1,016047x	10^{12}	10^9	10^6	10^3	1	**1**,**568** x10^6	**5**,**7344** x10^5	**3**,**584** x10^4	**2**,**24** x10^3	**2**,**24** x10	**2** x10	**1**,**12** x 1	**1** x 1

* Vgl. Umrechnungstafeln auf S. 736 und 737. ** Vgl. Umrechnungstafel auf S. 735.

1) C. R. 3e Conf. Poids Mes., 1901, Paris (1901), S. 68. *2)* Editorial, *Nature*, **183**, 80 (1959). *3) U.S. Coast and Geodetic Survey, Treasury Department*, Bull. Nr. 26 (1893) (Mendenhall Order).

Umrechnung von Troy-Einheiten

Name	Abkürzung	A			B														
		Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **B** zu multiplizieren																	
		g		c		gr		s ap.		dwt		dr ap.		oz ap., oz troy		lb ap., lb troy		lb av.	
Gramm	g	**1**	x 1	**5**	x 1	1,543236x10		7,716179x10^{-1}		6,430149x10^{-1}		2,572059x10^{-1}		3,215074x10^{-2}		2,679229x10^{-3}		2,204622x10^{-3}	
Karat	c	**2**	x10^{-1}	**1**	x 1	3,086471x10		—		1,286030x10^{-1}		—		6,430148x10^{-2}		5,358457x10^{-3}		4,409245x10^{-3}	
Grain, avoirdupois, apothecary oder troy (imp., US)	gr	6,479892x10^{-2}	3,239946x10^{-1}	**1**	x 1	**5**	x10^{-2}	4,16	x10^{-2}	1,6	x10^{-2}	2,083	x10^{-3}	1,7361	x10^{-4}	1,428571x10^{-4}			
Scruple, apothecary (imp., US)	s ap.	1,295978x 1	—	**2**	x10	**1**	x 1	—		3,3	x10^{-1}	4,16	x10^{-2}	3,472	x10^{-3}	2,857143x10^{-3}			
Pennyweight, troy (imp., US)	dwt	1,555174x 1	7,775870x 1	2,4	x10	**1**	x 1	—		**1**	x 1	—		**5**	x10^{-2}	4,16	x10^{-3}	3,428571x10^{-3}	
Drachm, apothecary (imp.)	} dr ap.	3,887935x 1	—	**6**	x10	**3**	x 1	—		**1**	x 1	**1,25**	x10^{-1}	1,0416	x10^{-2}	8,571429x10^{-3}			
Dram, apothecary (US)																			
Ounce*, apothecary oder troy (imp., US)	oz ap., oz troy	3,110348x10	1,555174x10^{2}	4,8	x10^{2}	2,4	x10	**2**	x10	**8**	x 1	**1**	x 1	8,3	x10^{-2}	6,857143x10^{-2}			
Pound, apothecary oder troy (US)	lb ap., lb troy	3,732418x10^{2}	1,866209x10^{3}	5,76	x10^{3}	2,88	x10^{2}	2,4	x10^{2}	9,6	x10	1,2	x10	**1**	x 1	8,228571x10^{-1}			
Pound, avoirdupois (imp., US)	lb av.	4,535924x10^{2}	2,267962x10^{3}	**7**	x10^{3}	3,5	x10^{2}	2,916	x10^{2}	1,16	x10^{2}	1,4583	x10	1,21527	x 1	**1**	x 1		

* Vgl. Umrechnungstafel auf S. 735.

Zeit

Dimension in allen Maßsystemen = T

Grundeinheit in allen Maßsystemen: mittlere Sonnensekunde = Sekunde (s oder ^{s} oder sec).

Die Einheiten der Zeitmessung[1] werden einerseits aus der Rotation der Erde (Sekunde, Minute, Stunde, Tag), anderseits aus ihrem Bahnumlauf (Jahr) abgeleitet. Sowohl Rotation als Bahnumlauf können nur relativ zu einer außerhalb der Erde befindlichen Beobachtungsmarke bestimmt und gemessen werden. Als Zeitmarke dient im bürgerlichen Leben die Sonne: *Sonnenzeit*. Für astronomische Zwecke wird der Fixsternhimmel und speziell der Widderpunkt, auch Frühlingspunkt genannt, als Zeitmarke gewählt: *Sternzeit*.

Aus der Erdrotation abgeleitete Zeiteinheiten

Die Elliptizität der Erdbahn und die Schiefe der Ekliptik bewirken eine ungleichförmige Bewegung der wahren Sonne, welche daher als Grundlage einer gleichmäßigen Zeitmessung ungeeignet ist. Man denkt sich deshalb die wahre Sonne durch eine «mittlere» Sonne ersetzt, welcher die Bedingung auferlegt ist, daß sie ihre scheinbare Bahn am Himmelsäquator während eines Jahres mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchläuft, sich dabei von der wahren Sonne möglichst wenig entfernt und gleichzeitig mit einer gleichförmig in der Ekliptik bewegten Sonne durch den Widderpunkt geht.

Der wahre Sonnentag ist als Zeitdifferenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen der wahren Sonne durch den Meridian des Beobachters definiert, der mittlere Sonnentag (d) wird durch die Meridiandurchgänge der mittleren Sonne bestimmt. Die algebraische Differenz mittlere Sonnenzeit minus wahre Sonnenzeit (oder Rektaszension der wahren Sonne minus Rektaszension der mittleren Sonne) heißt Zeitgleichung und ist in allen astronomischen und nautischen Jahrbüchern tabelliert.

Der Tag, das heißt die Zeitspanne einer Erdumdrehung, wird in 24 Stunden (h oder ^{h}) zu 60 Minuten (min oder ^{m}) zu je 60 Sekunden (s oder ^{s} oder sec) eingeteilt. Weitere Äquivalente sowie die Relationen zwischen mittlerer Sonnen- und Sternzeit können aus der entsprechenden Umrechnungstafel abgelesen werden.

Die mittlere Sonnensekunde, der 86 400. Teil des mittleren Sonnentages, ist der primäre Standard der Zeit in den metrischen Systemen. Da die Erdrotationsgeschwindigkeit im Laufe der Zeit etwas abnimmt und auch jahreszeitlichen Schwankungen unterliegt (neben anderen, unbekannten Ursachen ist vor allem auch die Gezeitenreibung daran beteiligt), ist die astronomisch gemessene mittlere Sonnensekunde (UT2) nicht ganz konstant[2]. Eine von der internationalen Meterkonvention angenommene Definition für eine konstante Sekunde gibt es noch nicht, dürfte aber bald zu erwarten sein. Die Sekunde wird darin aller Wahrscheinlichkeit nach als fixierter Bruchteil des tropischen Jahres (siehe unten) zur Zeit 1900,**0** (Weltzeit, 1. Januar, 12 Uhr mittags) festgelegt werden:

1 Sekunde = 1/31 556 925,975 a_{trop} (1900,**0**)[2]

Die Definition «Ephemeriszeit-Sekunde» wurde 1955 von der Internationalen Astronomischen Union angenommen[3]. Der obgenannte Wert ist in den Zeitumrechnungstafeln auf S. 739 verwendet. Die Weltzeit- und die Ephemeriszeit-Sekunde sind für viele genauere wissenschaftliche Messungen nur mit ungenügender Präzision meßbar. Kürzlich wurden neue, genauere Meßmethoden entwickelt, die auf Frequenzmessungen des Caesiumatoms beruhen[4].

Die Tageslänge und die davon abgeleiteten Einheiten sind vom Meridian des Beobachters unabhängig. Anders steht es aber mit der *Zeitfestlegung*. Der Tagesbeginn verschiebt sich von Westen nach Osten; es bestehen deshalb auf der Erde verschiedene gesetzliche Ortszeiten. Als Bezugsmeridian für die Astronomie sowie für die Ortszeiten wurde der Meridian von Greenwich bestimmt. *Weltzeit* (WZ) ist die auf diesen Meridian bezogene mittlere Sonnenzeit[5]. Für Abweichungen zwischen den verschiedenen Ortszeiten siehe Zeitzonenkarte, S. 732 und 733.

Aus dem Bahnumlauf der Erde abgeleitete Zeiteinheiten

Die Zeiteinheit des Jahres (a) wird definiert durch die Dauer des Bahnumlaufes der Erde um die Sonne. Auf Grund dreier in der Astronomie üblicher Bezugssysteme werden folgende Jahreseinheiten unterschieden:

Das *siderische Jahr* (a_{sid}) bezieht sich auf den Fixsternhimmel und wird durch die Zeit gegeben, während der die Sonne auf ihrer scheinbaren Himmelsbahn von einem betrachteten Fixstern wieder bis zu diesem zurückkehrt (unter der Annahme, daß der Fixstern inzwischen seinen Platz am Himmel nicht verändert hat). Das siderische Jahr ist 4,7 (Sonnen-) Minuten kürzer als das anomalistische Jahr und 20,4 bzw. 9,2 bzw. 20,0 Minuten länger als das tropische bzw. Julianische bzw. Gregorianische Jahr.

Das *tropische Jahr* (a_{trop}) wird durch die Zeit gegeben, die zwischen zwei Durchgängen der wahren Sonne durch den mittleren Widderpunkt verstreicht. Das astronomische Jahr (a_{astr}), annus fictus oder Besselsches Jahr, wird analog durch die Durchgänge der mittleren Sonne definiert. Der Unterschied zwischen tropischem und astronomischem Jahr ist so geringfügig, daß sie einander gleichgesetzt werden können. Das tropische Jahr ist 20,4 bzw. 25,1 bzw. 11,2 bzw. 0,4 Minuten kürzer als das siderische, anomalistische, Julianische und Gregorianische Jahr.

Das *anomalistische Jahr* (a_{anom}) ist mit der Elliptizität der Erdbahn in Beziehung und stellt die Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Periheldurchgängen dar. Es ist um 4,7 bzw. 25,1 bzw. 13,9 bzw. 24,7 Minuten länger als das siderische, tropische, Julianische und Gregorianische Jahr.

Zu den obengenannten drei Jahreseinheiten ist noch zu bemerken, daß im Verlaufe der Zeit sich das siderische Jahr nur unmerklich verändert, während das tropische Jahr in 100 Jahren um 0,5303 Sekunden abnimmt und das anomalistische Jahr in der gleichen Zeitspanne um 0,27 Sekunden zunimmt. In der Umrechnungstabelle ist die Dauer dieser Jahreseinheiten zum Zeitpunkt 1900,**0** (Weltzeit, 1. Januar, 12 Uhr mittags) angegeben.

Neben diesen drei sich in den astronomischen Bezugspunkten unterscheidenden Jahren ist noch das Kalenderjahr zur Festlegung der Zeitdaten wichtig. Die erste genauere Zeitfestlegung wurde durch das von Julius Caesar 45 v. Chr. eingeführte, bis 1581 benutzte *Julianische Jahr* ermöglicht. Es umfaßt durchschnittlich 365,**25** Tage, das heißt, drei Jahren mit 365 Tagen folgt ein Schaltjahr mit 366 Tagen

1 Julianisches Jahr = (3 × 365 + 366)/4 Tage = 365,**25** Tage

---

1) Siehe Westphal, W. H. (Hrsg.), *Physikalisches Wörterbuch*, Berlin (1952).

2) Essen et al., *Nature*, **181**, 1054 (1958).

3) Jones, H. Spencer, *Nature*, **176**, 669 (1955); Essen, L., *Nature*, **178**, 34 (1956).

4) Essen und Parry, *Nature*, **176**, 280 (1955); Bullard, E. C., *Nature*, **176**, 282 und 381 (1955); Essen, L., *Nature*, **178**, 34 (1956). Übersicht: Essen und Parry, *The Times Science Review*, Herbst (1957), S. 4.

5) International Astronomical Union, *Trans. int. astr. Un.*, **3**, 300 (1928).

Die Schaltjahre haben durch 4 teilbare Jahreszahlen, der zusätzliche Schalttag ist der 29. Februar.

Das Julianische Jahr ist, wie oben erwähnt, etwa 11 Minuten länger als das dem tatsächlichen Erdumlauf entsprechende tropische Jahr. Der Julianische Kalender blieb deshalb der wirklichen Zeit gegenüber immer mehr zurück. Dies veranlaßte Papst GREGOR XIII., mit der Bulle vom 24. Februar 1582 eine Kalenderreform durchzuführen, nach der 10 Tage, vom 5. bis und mit 14. Oktober 1582, gestrichen wurden, um die angewachsene Differenz zwischen dem tatsächlichen und dem Kalenderdatum zu beheben. In Frankreich wurde der 10. bis und mit 19. Dezember 1582 gestrichen, während in England, das die Gregorianische Zeitrechnung erst 1752 einführte, schon 11 Tage, vom 3. bis und mit 13. September 1752, gestrichen werden mußten.

Die Gregorianische Kalenderreform bestimmte weiter, daß die regelmäßig alle 4 Jahre eingeschalteten Schaltjahre des Julianischen Kalenders dann ausfallen, wenn sie auf eine Jahreszahl fallen, die ein ganzes Vielfaches von 100 ist. Ausgenommen von dieser Regel sind die Jahre 1600, 2000, 2400 usw. Es ergibt sich somit für die mittlere Dauer eines *Gregorianischen Jahres*

$$1\ \text{Gregorianisches Jahr} = (400\, a_{jul} - 3\ \text{Tage}) / 400\ \text{Tage} = 365{,}2425\ \text{Tage}$$

(a_{jul} in Tagen)

Es ist damit nur 0,4 Minuten länger als das dem tatsächlichen Erdumlauf entsprechende tropische Jahr. Mit dem Gregorianischen Kalender ist deshalb die Übereinstimmung zwischen tatsächlichem und Kalenderdatum auf lange Zeit hinaus gesichert.

Umrechnung von Zeiteinheiten

	A		B: Man multipliziere die gegebene Einheit **A** mit den der gesuchten Einheit unter **B** entsprechenden Faktoren								A
			Mittlere Sonnenzeit 1900,**0**								
	Name	Abkürzung	Sekunde		Minute		Stunde		Tag		Abkürzung
	Sekunde†	s	**1**	× 1	$1{,}\dot{6}$	× 10^{-2}	$2{,}\dot{7}$	× 10^{-4}	$1{,}15\dot{7}4\dot{0}$	× 10^{-5}	s
	Minute†	min	**6**	× 10	**1**	× 1	$1{,}\dot{6}$	× 10^{-2}	$6{,}9\dot{4}$	× 10^{-4}	min
	Stunde†	h	3,**6**	× 10^2	**6**	× 10	**1**	× 1	$4{,}1\dot{6}$	× 10^{-2}	h
	Tag	d	8,64	× 10^4	1,**44**	× 10^3	2,**4**	× 10	**1**	× 1	d
	Monat (28 Tage)		2,419**2**	× 10^6	4,03**2**	× 10^4	6,7**2**	× 10^2	2,**8**	× 10	Monat (28 d)
	Monat (29 Tage)		2,505**6**	× 10^6	4,17**6**	× 10^4	6,9**6**	× 10^2	2,**9**	× 10	Monat (29 d)
	Monat (30 Tage)		2,59**2**	× 10^6	4,3**2**	× 10^4	7,**2**	× 10^2	**3**	× 10	Monat (30 d)
	Monat (31 Tage)		2,678**4**	× 10^6	4,46**4**	× 10^4	7,**44**	× 10^2	3,**1**	× 10	Monat (31 d)
Mittlere Sonnenzeit	Jahr (365 Tage)	a_{365}	3,153**6**	× 10^7	5,25**6**	× 10^5	8,7**6**	× 10^3	3,6**5**	× 10^2	a_{365}
	Jahr (366 Tage)	a_{366}	3,162**24**	× 10^7	5,270**4**	× 10^5	8,78**4**	× 10^3	3,6**6**	× 10^2	a_{366}
	Sternsekunde[1]	s*	9,972 695 66	× 10^{-1}	1,662 115 94	× 10^{-2}	2,770 193 24	× 10^{-4}	1,154 247 18	× 10^{-5}	s*
	Sternminute[1]	min*	5,983 617 40	× 10	9,972 695 66	× 10^{-1}	1,662 115 94	× 10^{-2}	6,925 483 10	× 10^{-4}	min*
	Sternstunde[1]	h*	3,590 170 44	× 10^2	5,983 617 40	× 10	9,972 695 66	× 10^{-1}	4,155 289 86	× 10^{-2}	h*
Sternzeit	Sterntag[1]	d*	8,616 409 05	× 10^4	1,436 068 18	× 10^3	2,393 446 96	× 10	9,972 695 66	× 10^{-1}	d*
	Siderisches Jahr[1]	a_{sid}	3,155 814 95	× 10^7	5,259 691 58	× 10^5	8,766 152 64	× 10^3	3,652 563 60	× 10^2	a_{sid}
Zur Zeit 1900,**0**	Tropisches Jahr[1]	a_{trop}	3,155 692 60	× 10^7	5,259 487 66	× 10^5	8,765 812 77	× 10^3	3,652 421 99	× 10^2	a_{trop}
	Anomalistisches Jahr[1]	a_{anom}	3,155 843 30	× 10^7	5,259 738 83	× 10^5	8,766 231 38	× 10^3	3,652 596 41	× 10^2	a_{anom}
Kalenderjahre	Julianisches Jahr	a_{jul}	3,155**76**	× 10^7	5,259**6**	× 10^5	8,76**6**	× 10^3	3,652**5**	× 10^2	a_{jul}
Kalenderjahre	Gregorianisches Jahr	a_{greg}	3,155 695**2**	× 10^7	5,259 49**2**	× 10^5	8,765 8**2**	× 10^3	3,652 42**5**	× 10^2	a_{greg}

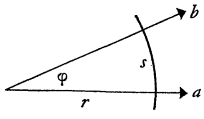
† Vgl. auch Umrechnungstafel auf S. 739.

1) Werte nach oder errechnet nach Werten aus: Bureau des Longitudes, *Annuaire pour l'an 1954*, Paris (1954), S. 220 und 221.

Winkel

Ebene Winkel

Der ebene Winkel φ zwischen den Halbgeraden a und b wird definiert als Quotient aus Kreisbogenlänge s und dem Radius r eines Kreises, dessen Zentrum im Schnittpunkt dieser Halbgeraden liegt.



$$\varphi = \frac{s}{r}$$

In dieser Definition ist der Winkel φ als Quotient zweier Längen dimensionslos[1].

Als *Radiant* (englisch *radian*), Symbol rad, wird der Winkel bezeichnet, bei dem das Verhältnis $s/r \equiv 1$ ist. Der rechte Winkel, genannt *Rechter*, Symbol ∟, entspricht $\pi/2$; der *Altgrad*, Symbol °, entspricht $\pi/180$; der *Neugrad*, Symbol ^{g}, entspricht $\pi/200$. Der Neugrad wird im deutschen Sprachgebiet auch als Gon bezeichnet, der englische Ausdruck ist *grade*. Für den ganzen Kreiswinkel 2π rad = 4 ∟ = 360° = 400^g besteht kein offizieller Name. Wir nennen ihn in der Umrechnungstabelle «Ganzer» und entlehnen die Abkürzung rev dem Englischen, das den «Ganzen» mit *revolution* bezeichnet (in dieser Beziehung nicht mit «Umdrehung» verwechseln!).

Die Unterteilung der Winkeleinheiten ist beim Altgrad sexagesimal:

1 Altgrad = 60 Altminuten = 60 × 60 Altsekunden
1° = 60′ = 60 × 60″

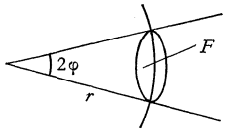
Der Neugrad wird zentesimal unterteilt:

1 Neugrad = 100 Neuminuten = 100 × 100 Neusekunden
1^g = 100^c = 100 × 100^{cc}

Der Radiant, der Rechte und der Ganze werden ohne weitere Benennung dezimal unterteilt.

Räumliche Winkel

Der räumliche Winkel Ω ist definiert als Quotient F/r^2. F ist die Kugelfläche, die durch einen mit der Spitze im Zentrum der Kugel liegenden Kegel mit Öffnungswinkel 2φ aus der Kugelfläche ausgeschnitten wird, r ist der Radius der Kugel.



$$\Omega = \frac{F}{r^2}$$

Der räumliche Winkel ist als Quotient zweier Flächen ebenfalls dimensionslos. Zum ebenen Winkel φ besteht die Beziehung

$$\Omega = 2\pi\,(1 - \cos\varphi)$$

Beim *Steradiant*, Symbol sr, ist $F/r^2 \equiv 1$. Der *Quadratalt*grad, Symbol □° oder (°)^2, wird durch den Quotienten $(\pi/180)^2$, der *Quadratneu*grad, Symbol (^{g})^2, durch den Quotienten $(\pi/200)^2$ definiert.

1) LANDOLT, M., *Bull. schweiz. elektrotech. Ver.*, **41**, 473 (1950).

Umrechnung ebener Winkel

Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **B** zu multiplizieren

A		B															
Name	Abkürzung	Altgrad		Altminute		Altsekunde		Neugrad		Neuminute		Neusekunde		Radiant	Rechter		Ganzer	
Altgrad*	°	**1**	x 1	**6**	x10	3,**6**	x10^{3}	1,$\dot{1}$	x 1	1,$\dot{1}$	x10^{2}	1,$\dot{1}$	x10^{4}	1,745329x10^{-2}	1,$\dot{1}$	x10^{-2}	2,$\dot{7}$	x10^{-3}
Altminute*	′	1,$\dot{6}$	x10^{-2}	**1**	x 1	**6**	x10	1,85$\dot{1}\dot{8}\dot{5}$	x10^{-2}	1,85$\dot{1}\dot{8}\dot{5}$	x 1	1,85$\dot{1}\dot{8}\dot{5}$	x10^{2}	2,908882x10^{-4}	1,85$\dot{1}\dot{8}\dot{5}$	x10^{-4}	4,$\dot{6}\dot{2}\dot{9}$	x10^{-5}
Altsekunde*	″	2,$\dot{7}$	x10^{-4}	1,$\dot{6}$	x10^{-2}	**1**	x 1	3,086420x10^{-4}		3,086420x10^{-2}		3,086420x 1		4,848137x10^{-6}	3,086420x10^{-6}		7,716049x10^{-7}	
Neugrad	g	**9**	x10^{-1}	5,**4**	x10	3,**24**	x10^{3}	**1**	x 1	**1**	x10^{2}	**1**	x10^{4}	1,570796x10^{-2}	**1**	x10^{-2}	2,**5**	x10^{-3}
Neuminute	c	**9**	x10^{-3}	5,**4**	x10^{-1}	3,**24**	x10	**1**	x10^{-2}	**1**	x 1	**1**	x10^{2}	1,570796x10^{-4}	**1**	x10^{-4}	2,**5**	x10^{-5}
Neusekunde	cc	**9**	x10^{-5}	5,**4**	x10^{-3}	3,**24**	x10^{-1}	**1**	x10^{-4}	**1**	x10^{-2}	**1**	x 1	1,570796x10^{-6}	**1**	x10^{-6}	2,**5**	x10^{-7}
Radiant	rad	5,729578x10		3,437747x10^{3}		2,062648x10^{5}		6,366198x10		6,366198x10^{3}		6,366198x10^{5}		**1**	x 1		6,366198x10^{-1}	
Rechter	L	**9**	x10	5,**4**	x10^{3}	3,**24**	x10^{5}	**1**	x10^{2}	**1**	x10^{4}	**1**	x10^{6}	1,570796	**1**	x 1	2,**5**	x10^{-1}
Ganzer	rev	3,**6**	x10^{2}	2,**16**	x10^{4}	1,29**6**	x10^{6}	**4**	x10^{2}	**4**	x10^{4}	**4**	x10^{6}	6,283185	**4**		**1**	x 1

* Vgl. auch Umrechnungstafel für Zeiteinheiten, S. 739.

Umrechnung räumlicher Winkel

Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **B** zu multiplizieren

A		B		
Name	Abkürzung	Quadrataltgrad	Quadratneugrad	Steradiant
Quadrataltgrad	□° oder $(°)^2$	**1** x 1	1,234 568 x 1	3,046 174 x 10^{-4}
Quadratneugrad	$(g)^2$	8,**1** x 10^{-1}	**1** x 1	2,467 401 x 10^{-4}
Steradiant	sr	3,826 806 x 10^{3}	4,052 847 x 10^{3}	**1** x 1

Temperatur

Dimensionen

In allen Maßsystemen = grd oder Θ

Grundeinheiten

Im MKS-, CGS- und MTS-System: Grad Celsius (°C) bzw. Grad Kelvin (°K); in den angelsächsischen Maßsystemen: Grad Fahrenheit (°F) bzw. Grad Rankine (°R).

Im physikalischen Sprachgebrauch ist der Begriff *Temperatur* streng vom Begriff *Wärme* (= Wärmemenge) zu unterscheiden. Die gleiche Wärmemenge kann sich auf eine größere oder kleinere Menge des gleichen Stoffes verteilen, dieser hat dann im ersteren Falle eine geringere Temperatur als im zweiten. In diesem Sinne spricht man auch davon, daß die Wärme selbst eine höhere oder tiefere Temperatur hat.

Die Wärme ist eine Energieform (siehe Energie), die Temperatur ein Maß für die durchschnittliche kinetische Energie je Freiheitsgrad der untergeordneten Molekularbewegung. Da sie sich auf das räumliche und zeitliche Mittel der letzteren bezieht, hat die Anwendung des Temperaturbegriffes nur einen Sinn bei Körpern, die aus einer großen Zahl von Molekülen bestehen. Bei hinreichend tiefen Temperaturen gilt dieser einfache Zusammenhang nicht mehr.

Thermodynamische Temperatur und Temperaturskalen

Die thermodynamische Temperatur wird mit den Gesetzen der Thermodynamik definiert, zum Beispiel mit der Zustandsgleichung idealer Gase

$$T = \frac{pv}{R_0}$$

(T = Temperatur, p = Gasdruck, v = Gasvolumen, R_0 = universelle Gaskonstante)

und ist damit von zufälligen stofflichen Eigenschaften unabhängig. Aus den thermodynamischen Gesetzen geht auch hervor, daß die Temperatur einen Nullpunkt besitzt, unter den sie nicht sinken kann. Dieser Nullpunkt heißt *absoluter Nullpunkt*[1]. Temperaturskalen, die an diesem Punkt mit Null beginnen, werden deshalb auch absolute Temperaturskalen und die mit ihnen gemessene Temperatur wird absolute Temperatur genannt. Sie werden verkörpert durch die auf Lord KELVIN (1848) zurückgehende *Kelvin-Skala* und durch die *Rankine-Skala*. Daneben bestehen noch thermodynamische *Celsius-* und *Fahrenheit-Skalen*, deren Nullpunkt nicht mit dem absoluten zusammenfällt.

Thermodynamische Temperaturskalen

Name	Einheitensymbol	Gradeinheit*	Temperaturwert am Eispunkt	Dampfpunkt**
Kelvin	°K	$\frac{T_D - T_E}{100}$	273,**15**	373,15
Celsius	$°C_{therm.}$	$\frac{T_D - T_E}{100}$	**0**	100
Rankine	°R	$\frac{T_D - T_E}{180}$	491,6**7**	671,67
Fahrenheit	$°F_{therm.}$	$\frac{T_D - T_E}{180}$	**32**	212

* T_D und T_E = Temperatur des Dampf- bzw. des Eispunktes des Wassers.
** Thermodynamisch gemessen.

Die thermodynamischen Skalen haben somit zwar einen Fundamentalabstand $T_D - T_E$, der für die thermodynamische Skalierung benötigt wird, besitzen aber nur *einen* Fundamentalpunkt mit zugeordnetem Temperaturwert, den Eispunkt des Wassers. Die heute gültige Festlegung dieses Wertes erfolgte 1954[2].

Empirische Temperatur und Temperaturskalen

Die Definition der empirischen Temperaturen beruht auf temperaturabhängigen Eigenschaften realer Stoffe, wie zum Beispiel Längeänderungen von Flüssigkeitssäulen, Eis- und Dampfpunkt des Wassers, Widerstandsänderungen von Metallen usw. Zwischen empirischer und thermodynamischer Temperatur besteht weder analytisch noch algebraisch eine Verknüpfung, was aber nicht von Belang ist, weil die empirische Temperatur sich im Bereich der erreichbaren Meßgenauigkeit der thermodynamischen Temperatur beliebig annähern läßt. So sind die heutigen internationalen empirischen Temperaturskalen als Annäherung der thermodynamischen Skalen aufzufassen, die für die meisten Zwecke der Praxis genügen.

Der Fundamentalabstand aller heutigen empirischen Temperaturskalen ist wie bei den thermodynamischen der Abstand zwischen Eis- und Dampfpunkt des Wassers, die aber *beide* wertmäßig fixiert sind. Darüber hinaus wurden bei den internationalen Temperaturskalen noch weitere primäre und sekundäre Fixpunkte bestimmt. Die heute gültigen Werte wurden 1948 festgelegt[3, 4] und sind in der Tafel am Schluß dieses Abschnittes zusammengestellt.

Empirische Temperaturskalen

Name	Einheitensymbol	Gradeinheit*	Temperaturwert am Eispunkt	Dampfpunkt
Internationale Skalen 1948[3, 4]				
Kelvin	$°K_{int.}$	$\frac{T_D - T_E}{100}$	273,**15**	373,**15**
Celsius	°C	$\frac{T_D - T_E}{100}$	**0**	10**0**
Angelsächsische Skala				
Fahrenheit	°F	$\frac{T_D - T_E}{180}$	3**2**	21**2**
Alte französische Skala				
Réaumur	°R	$\frac{T_D - T_E}{80}$	**0**	**80**

* T_D und T_E = Dampf- bzw. Eispunkt des Wassers.

Die Kelvin- und Celsius-Skalen, deren Gradspannen übereinstimmen, sind auf die dezimalen Maßsysteme zugeschnitten. Die Rankine- und Fahrenheit-Skalen, ebenfalls mit übereinstimmenden Gradspannen, sind den angelsächsischen, hexagesimalen Maßsystemen angepaßt. Die Réaumur-Skala wird kaum mehr verwendet.

---

1) DALTON, *Mem. Manchr lit. phil. Soc.*, Serie 1, 601 (1802). *2) C. R. 10e Conf. Poids Mes., 1954*, Paris (1955). *3)* Comité international des Poids et Mesures, *P. V. Com. int. Poids Mes.*, **21**, 16 (1948). *4) C. R. 9e Conf. Poids Mes., 1948*, Paris (1949).

Umrechnung der Temperaturgrade

Um aus der gegebenen Gradeinheit **A** die gesuchte Gradeinheit **B** zu errechnen, setze man in die Formeln unter **B** die Beträge der gegebenen Gradeinheit ein.

A		B				
Name	Abkürzung	Grad Kelvin	Grad Celsius	Grad Rankine	Grad Fahrenheit	Grad Réaumur
Grad Kelvin	°K	°K	°K — 273,15	1,8 °K	1,8 °K — 459,67	0,8 °K — 218,52
Grad Celsius*	°C	°C + 273,15	°C	1,8 °C + 491,67	1,8 °C + 32	0,8 °C
Grad Rankine	°R	0,5̇ °R	0,5̇ °R — 273,15	°R	°R — 459,67	0,4̇ °R — 218,52
Grad Fahrenheit*	°F	0,5̇ °F + 255,372̇	0,5̇ °F — 17,7̇	°F + 459,67	°F	0,4̇ °F — 14,2̇
Grad Réaumur	°R	1,25 °R + 273,15	1,25 °R	2,25 °R + 491,67	2,25 °R + 32	°R

* Umrechnung von Celsius in Fahrenheit und umgekehrt siehe S. 738.

Gegenseitige Lagen und Verhältnisse der empirischen Temperaturskalen

demonstriert an Hand der internationalen **Fundamentalpunkte** und der internationalen *primären* und sekundären Fixpunkte. Normdruck 1 atm = 760 Torr = 1,013 25 × 10^6 dyn/cm².

Internationale Fixpunkte 1948	Temperatur in Grad				
	Kelvin	Celsius	Rankine	Fahrenheit	Réaumur
Absoluter Nullpunkt (theoretisch)	0	—273,15	0	—459,67	—218,52
Sauerstoffpunkt (Gleichgewichtstemperatur zwischen flüssigem Sauerstoff und seinem Dampf, *primärer Fixpunkt*)	90,180	—182,970	162,324	—297,346	—146,376
Sublimationspunkt der Kohlensäure (sekundärer Fixpunkt)	194,65	— 78,5	350,37	—109,3	— 62,8
Erstarrungspunkt des Quecksilbers (sekundärer Fixpunkt)	234,28	— 38,87	421,704	— 37,966	— 31,096
Eispunkt (Gleichgewichtstemperatur zwischen Eis und luftgesättigtem Wasser, **Fundamentalpunkt**)	273,15	**0**	491,67	32	**0**
Tripelpunkt des Wassers (sekundärer Fixpunkt)	273,1600	0,0100	491,6880	32,0180	0,0800
Umwandlungspunkt des Dekahydrates des Natriumsulfates (sekundärer Fixpunkt)	305,53	32,38	549,954	90,284	25,904
Dampfpunkt (Gleichgewichtstemperatur zwischen flüssigem Wasser und seinem Dampf, **Fundamentalpunkt**)	373,15	100	671,67	212	80
Tripelpunkt der Benzoesäure (sekundärer Fixpunkt)	395,51	122,36	711,918	252,248	97,888
Siedepunkt des Naphthalins (sekundärer Fixpunkt)	491,15	218,0	884,07	424,40	174,40
Erstarrungspunkt des Zinns (sekundärer Fixpunkt)	505,05	231,9	909,09	449,42	185,52
Siedepunkt des Benzoephenons (sekundärer Fixpunkt)	579,05	305,9	1042,29	582,62	244,72
Erstarrungspunkt des Cadmiums (sekundärer Fixpunkt)	594,05	320,9	1069,29	609,62	256,72
Erstarrungspunkt des Bleis (sekundärer Fixpunkt)	600,45	327,3	1080,81	621,14	261,84
Siedepunkt des Quecksilbers (sekundärer Fixpunkt)	629,73	356,58	1133,514	673,844	285,264
Erstarrungspunkt des Zinks (sekundärer Fixpunkt)	692,65	419,5	1246,77	787,1	335,6
Schwefelpunkt (Gleichgewichtstemperatur zwischen flüssigem Schwefel und seinem Dampf, *primärer Fixpunkt*)	717,750	444,600	1291,950	832,280	355,680
Erstarrungspunkt des Antimons (sekundärer Fixpunkt)	903,65	630,5	1626,57	1166,9	504,4
Erstarrungspunkt des Aluminiums (sekundärer Fixpunkt)	933,25	660,1	1679,85	1220,18	528,08
Silberpunkt (Gleichgewichtstemperatur zwischen festem und flüssigem Silber, *primärer Fixpunkt*)	1233,95	960,8	2221,11	1761,44	768,64
Goldpunkt (Gleichgewichtstemperatur zwischen festem und flüssigem Gold, *primärer Fixpunkt*)	1336,15	1063,0	2405,07	1945,4	850,4
Erstarrungspunkt des Kupfers in reduzierender Atmosphäre (sekundärer Fixpunkt)	1356,15	1083	2441,07	1981,4	866,4
Erstarrungspunkt des Nickels (sekundärer Fixpunkt)	1726,15	1453	3107,07	2647,4	1162,4
Erstarrungspunkt des Cobalts (sekundärer Fixpunkt)	1765,15	1492	3177,27	2717,6	1193,6
Erstarrungspunkt des Palladiums (sekundärer Fixpunkt)	1825,15	1552	3285,27	2825,6	1241,6
Erstarrungspunkt des Platins (sekundärer Fixpunkt)	2042,15	1769	3675,87	3216,2	1415,2
Erstarrungspunkt des Rhodiums (sekundärer Fixpunkt)	2233,15	1960	4019,67	3560	1568
Erstarrungspunkt des Iridiums (sekundärer Fixpunkt)	2716,15	2443	4889,07	4429,4	1954,4
Erstarrungspunkt des Wolframs (sekundärer Fixpunkt)	3653,15	3380	6575,67	6116	2704

A		Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit dem Faktor **B** und der der gesuchten Einheit entsprechenden Zehnerpotenz unter **C** zu multiplizieren												Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit dem Faktor **D** und der der gesuchten Einheit entsprechenden Zehnerpotenz unter **E** zu multiplizieren										Die gegebene Maßeinheit ist mit der der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **F** zu multiplizieren				
		B								C				D	E							F				
Name	Abkürzung			µg/ 100 cm³	µg cm⁻³ mg dm⁻³ g m⁻³	mg/ 100 cm³	mg cm⁻³ g dm⁻³ kg m⁻³	g cm⁻³ kg dm⁻³ t m⁻³						µg/ 100 ml	µg ml⁻¹ mg l⁻¹ g hl⁻¹	mg/ 100 ml	mg ml⁻¹ g l⁻¹ kg hl⁻¹	g ml⁻¹ kg l⁻¹ t hl⁻¹	gr ft⁻³ (techn.)	gr in⁻³ (US)	lb ft⁻³ (techn.)	lb gal⁻¹ (imp.)	lb gal⁻¹ (US)	lb in⁻³ (techn.)
Mikrogramm pro 100 Kubikzentimeter	µg/100 cm³	**1**	×	1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-8}	1,000028	×				1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-8}	4,369957	$2{,}528925 \times 10^{-6}$	$6{,}242795 \times 10^{-7}$	$1{,}002241 \times 10^{-7}$	$8{,}345453 \times 10^{-8}$	$3{,}612729 \times 10^{-10}$
Mikrogramm pro Kubikzentimeter	µg cm⁻³	**1**	×	10^{2}	1	10^{-1}	10^{-3}	10^{-6}	1,000028	×				10^{2}	1	10^{-1}	10^{-3}	10^{-6}	4,369957	$2{,}528925 \times 10^{-4}$	$6{,}242795 \times 10^{-5}$	$1{,}002241 \times 10^{-5}$	$8{,}345453 \times 10^{-6}$	$3{,}612729 \times 10^{-8}$
Milligramm pro Kubikzentimeter	mg dm⁻³	**1**	×	10^{3}	10	1	10^{-2}	10^{-5}	1,000028	×				10^{3}	10	1	10^{-2}	10^{-5}	4,369957	$2{,}528925 \times 10^{-3}$	$6{,}242795 \times 10^{-4}$	$1{,}002241 \times 10^{-4}$	$8{,}345453 \times 10^{-5}$	$3{,}612729 \times 10^{-7}$
Gramm pro Kubikmeter	g m⁻³	**1**	×	10^{3}	10	1	10^{-2}	10^{-5}	1,000028	×				10^{3}	10	1	10^{-2}	10^{-5}	4,369957	$2{,}528925 \times 10^{-3}$	$6{,}242795 \times 10^{-4}$	$1{,}002241 \times 10^{-4}$	$8{,}345453 \times 10^{-5}$	$3{,}612729 \times 10^{-7}$
Milligramm pro 100 Kubikzentimeter	mg/100 cm³	**1**	×	10^{3}	10	1	10^{-2}	10^{-5}	1,000028	×				10^{3}	10	1	10^{-2}	10^{-5}	4,369957	$2{,}528925 \times 10^{-3}$	$6{,}242795 \times 10^{-4}$	$1{,}002241 \times 10^{-4}$	$8{,}345453 \times 10^{-5}$	$3{,}612729 \times 10^{-7}$
Milligramm pro Kubikzentimeter	mg cm⁻³	**1**	×	10^{5}	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-6}	1,000028	×				10^{5}	10^{3}	10^{2}	1	10^{-3}	4,369957	$2{,}528925 \times 10^{-1}$	$6{,}242795 \times 10^{-2}$	$1{,}002241 \times 10^{-2}$	$8{,}345453 \times 10^{-3}$	$3{,}612729 \times 10^{-5}$
Gramm p. Kubikzentimeter	g dm⁻³	**1**	×	10^{5}	10^{3}	10^{2}	10^{-3}	10^{-6}	1,000028	×				10^{5}	10^{3}	10^{2}	1	10^{-3}	4,369957	$2{,}528925 \times 10^{-1}$	$6{,}242795 \times 10^{-2}$	$1{,}002241 \times 10^{-2}$	$8{,}345453 \times 10^{-3}$	$3{,}612729 \times 10^{-5}$
Kilogramm p. Kubikmeter	kg m⁻³	**1**	×	10^{5}	10^{3}	10^{2}	10^{-3}	10^{-6}	1,000028	×				10^{5}	10^{3}	10^{2}	1	10^{-3}	4,369957	$2{,}528925 \times 10^{-1}$	$6{,}242795 \times 10^{-2}$	$1{,}002241 \times 10^{-2}$	$8{,}345453 \times 10^{-3}$	$3{,}612729 \times 10^{-5}$
Demal																								
Gramm p. Kubikzentimeter	g cm⁻³																							
Kilogramm pro Kubikdezimeter	kg dm⁻³	**1**	×	10^{8}	10^{6}	10^{5}	10^{3}	1	1,000028	×				10^{8}	10^{6}	10^{5}	10^{3}	1	4,369957	$2{,}528925 \times 10^{-2}$	$6{,}242795 \times 10^{-3}$	$1{,}002241 \times 10^{-1}$	8,345453 × 1	$3{,}612729 \times 10^{-2}$
Tonne pro Kubikmeter	t m⁻³																							
Mikrogramm pro 100 Milliliter	µg/100 ml	9,999270	×	10^{-1}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-9}	**1**	×	1			10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-11}	4,369834	$2{,}528854 \times 10^{-6}$	$6{,}242620 \times 10^{-7}$	$1{,}002213 \times 10^{-7}$	$8{,}345220 \times 10^{-8}$	$3{,}612628 \times 10^{-10}$
Mikrogramm pro Milliliter	µg ml⁻¹	9,999270	×	10	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-7}	**1**	×	10^{3}	1		10^{3}	1	10^{-1}	10^{-3}	10^{-6}	4,369834	$2{,}528854 \times 10^{-4}$	$6{,}242620 \times 10^{-5}$	$1{,}002213 \times 10^{-5}$	$8{,}345220 \times 10^{-6}$	$3{,}612628 \times 10^{-8}$
Milligramm pro Liter	mg l⁻¹	9,999270	×	10	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-7}	**1**	×	10^{3}	1		10^{3}	1	10^{-1}	10^{-3}	10^{-6}	4,369834	$2{,}528854 \times 10^{-4}$	$6{,}242620 \times 10^{-5}$	$1{,}002213 \times 10^{-5}$	$8{,}345220 \times 10^{-6}$	$3{,}612628 \times 10^{-8}$
Gramm pro Hektoliter	g hl⁻¹																							
Milligramm p. 100 Milliliter	mg/100 ml	9,999270	×	10^{3}	1	10^{-1}	10^{-3}	10^{-6}	**1**	×	10^{3}	10	1	10^{-2}	10^{-5}	4,369834	× 1	$2{,}528854 \times 10^{-3}$	$6{,}242620 \times 10^{-4}$	$1{,}002213 \times 10^{-4}$	$8{,}345220 \times 10^{-5}$	$3{,}612628 \times 10^{-7}$		
Milligramm pro Milliliter	mg ml⁻¹	9,999270	×	10^{4}	10^{2}	10	10^{-1}	10^{-4}	**1**	×	10^{5}	10^{3}	10^{2}	1	10^{-3}	4,369834	$\times 10^{2}$	$2{,}528854 \times 10^{-1}$	$6{,}242620 \times 10^{-2}$	$1{,}002213 \times 10^{-2}$	$8{,}345220 \times 10^{-3}$	$3{,}612628 \times 10^{-5}$		
Gramm pro Liter	g l⁻¹																							
Kilogramm pro Hektoliter	kg hl⁻¹																							
Gramm pro Milliliter	g ml⁻¹	9,999270	×	10^{7}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{-1}	**1**	×	10^{8}	10^{6}	10^{5}	10^{3}	1	4,369834	$\times 10^{5}$	2,528854	$\times 10^{2}$	6,242620	$\times 10$	1,002213	8,345220	$3{,}612628 \times 10^{-2}$
Kilogramm pro Liter	kg l⁻¹																						× 1	
Tonne pro Hektoliter	t hl⁻¹																							
Grain per cubic foot (techn.)	gr ft⁻³ (techn.)	$2{,}288352 \times$		10^{3}	1	10^{-1}	10^{-3}	10^{-6}	$2{,}288416 \times$		10^{3}	1		10^{3}	1	10^{-1}	10^{-3}	10^{-6}	**1**	× 1	$5{,}787072 \times 10^{-4}$	$1{,}428571 \times 10^{-4}$	$2{,}293481 \times 10^{-5}$	$1{,}909734 \times 10^{-5}$	$8{,}267196 \times 10^{-8}$
Grain per cubic inch (US)	gr in⁻³ (US)	$3{,}954249 \times$		10^{5}	10^{3}	10^{2}	1	10^{-3}	$3{,}954360 \times$		10^{5}	10^{3}	10^{2}	10^{3}	1	10^{-1}	10^{-3}	10^{-6}	**1**	× 1	$1{,}727990 \times 10^{3}$	**1**	× 1	$2{,}468557 \times 10^{-1}$	$3{,}963112 \times 10^{-2}$	$3{,}267196 \times 10^{-8}$
Pound p. cubic foot (techn.)	lb ft⁻³ (techn.)	$1{,}601847 \times$		10^{6}	10^{4}	10^{3}	10	10^{-2}	$1{,}601891 \times$		10^{6}	10^{4}	10^{3}	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-5}	**7**	$\times 10^{3}$	4,050950 ×	1	**1**	× 1	$1{,}605437 \times 10^{-1}$	$1{,}428563 \times 10^{-4}$
Pound per gallon (imp.)	lb gal⁻¹ (imp.)	$9{,}977636 \times$		10^{6}	10^{4}	10^{3}	10	10^{-2}	$9{,}977915 \times$		10^{6}	10^{4}	10^{3}	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-5}	4,360184	$\times 10^{4}$	2,523270 ×	10	6,228834 ×	1	**1**	× 1	$1{,}336814 \times 10^{-1}$	$5{,}787037 \times 10^{-4}$
Pound per gallon (US)	lb gal⁻¹ (US)	$1{,}198257 \times$		10^{7}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{-1}	$1{,}198291 \times$		10^{7}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10	1	10^{-1}	10^{-4}	5,236332	$\times 10^{4}$	3,03 •	$\times 10$	7,480475 ×	1	1,200943 ×	1	**1**	× 1
Pound p. cubic inch (techn.)	lb in⁻³ (techn.)	$2{,}767991 \times$		10^{9}	10^{7}	10^{6}	10^{4}	10	$2{,}768068 \times$		10^{9}	10^{7}	10^{6}	10^{4}	10^{3}	10	1	10^{-3}	1,2096	$\times 10^{7}$	7,000042 ×	10^{3}	1,728	$\times 10^{3}$	2,774195 ×	10^{3}	2,31001 ×	10^{2}	**1**	× 1

Dimensionsformeln

In den Länge-Masse-Zeit-Systemen (LMT-Systemen) $= L^{-3} M$.

Abgeleitete Einheiten in den betreffenden Maßsystemen:

MKS-System: Kilogramm pro Kubikmeter (kg m^{-3});
CGS-System: Gramm pro Kubikzentimeter (g cm^{-3});
MTS-System: Tonne pro Kubikmeter (t m^{-3}).

In den Länge-Kraft-Zeit-Systemen (LKT-Systemen) $= L^{-4} K T^2$.

Die Dichte einer Substanz ist das Verhältnis ihrer Masse zu ihrem Rauminhalt. Sie wird deshalb auch als *spezifische Masse* bezeichnet. Die Dichte ist temperatur- und druckabhängig. Dichteangaben sind daher näher zu spezifizieren. Als physikalische *Normdichte* wird die Dichte eines Stoffes bezeichnet, die er im physikalischen Normzustand besitzt (0° C, 760 Torr).

Wichtige Dichtekonstanten sind die maximale Dichte luftfreien Wassers* bei 4° C und 760 Torr: $\rho_m(H_2O) =$ 0,999 972 kg/dm³ = **1** kg/l und die Normdichte des Quecksilbers[1]: ρ_n (Hg) = 13,595 05 kg/dm³ = 13,595 43 kg/l.

Das Produkt aus Dichte und Fallbeschleunigung heißt *Wichte* oder auch *spezifisches Gewicht*. Letzteres darf aber nicht mit dem «spezifischen Gewicht» des üblichen Sprachgebrauchs verwechselt werden, bei dem es sich um eine relative Dichte handelt.

Die *relative Dichte* ist das Verhältnis der Dichte (oder Wichte) einer Substanz zu jener einer Bezugssubstanz. Als Quotient zweier gleicher Dimensionen ist die relative Dichte eine dimensionslose oder *Dichtezahl*. *Sie beißt im üblichen Sprachgebrauch «spezifisches Gewicht»*, wobei in der Regel als Bezugsdichte für flüssige und feste Substanzen die maximale Wasser-, für Gase die Normdichte der Luft (trocken, kohlensäurefrei, $\rho_n = 1{,}292\,84 \times 10^{-3}$ kg/l)[2] verwendet wird. Da die maximale Wasserdichte im metrischen System praktisch gleich1 kg/dm³ oder identisch 1 kg/l ist (siehe oben), kann das «spezifische Gewicht» in den meisten Fällen der Praxis dem Zahlenwert der Dichte gleichgesetzt werden. Beim «spezifischen Gewicht» als Verhältnis zweier Dichten sind zwei Temperaturangaben erforderlich. Ein «spezifisches Gewicht» der Substanz A bei 20°/4° C entspricht zum Beispiel dem Quotienten:

$$\frac{\text{Dichte der Substanz A bei } 20^\circ\text{C}}{\text{Dichte von Wasser bei } 4^\circ\text{C}}$$

Die nebenstehende Tafel kann auch zur Umrechnung von Konzentrationen verwendet werden. Es sind deshalb auch einige Einheiten aufgenommen worden, die bei Konzentrations-, nicht aber bei Dichteangaben üblich sind.

* Vgl. S. 177 unter Liter.

1) Nach STILLE, U., *Messen und Rechnen in der Physik*, Braunschweig (1955). *2)* Nach LANDOLT-BÖRNSTEIN, *Physikalisch-Chemische Tabellen*, 5. Aufl., 1. Ergänzungsbd., Berlin (1927).

Geschwindigkeit

Dimension in allen Maßsystemen = LT^{-1}

Abgeleitete Einheit im MKS- und MTS-System: Meter pro Sekunde (Meter/Sekunde, m s^{-1}).
Abgeleitete Einheit im CGS-System: Zentimeter pro Sekunde (Zentimeter/Sekunde, cm s^{-1}).

Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **B** zu multiplizieren

A		B																	
Name	Abkürzung	cm s^{-1}		m min^{-1}		km h^{-1}		m s^{-1}		km s^{-1}		ft min^{-1} (techn.)	ft s^{-1} (techn.)	mi h^{-1} (techn.)	Knot int.	Knot imp.	mi s^{-1} (techn.)
Zentimeter pro Sekunde	cm s^{-1}	**1**	x 1	**6**	$x10^{-1}$	3,**6**	$x10^{-2}$	**1**	$x10^{-2}$	**1**	$x10^{-5}$	1,968504x 1	3,280840$x10^{-2}$	2,236936$x10^{-2}$	1,943844$x10^{-2}$	1,942606$x10^{-2}$	6,213712$x10^{-6}$
Meter pro Minute	m min^{-1}	1,$\dot{6}$	x 1	**1**	x 1	**6**	$x10^{-2}$	1,$\dot{6}$	$x10^{-2}$	1,$\dot{6}$	$x10^{-5}$	3,280840x 1	5,468066$x10^{-2}$	3,728227$x10^{-2}$	3,239741$x10^{-2}$	3,237677$x10^{-2}$	1,035619$x10^{-5}$
Kilometer pro Stunde	km h^{-1}	2,$\dot{7}$	x10	1,$\dot{6}$	x10	**1**	x 1	2,$\dot{7}$	$x10^{-1}$	2,$\dot{7}$	$x10^{-4}$	5,468066x10	9,113444$x10^{-1}$	6,213712$x10^{-1}$	5,399568$x10^{-1}$	5,396128$x10^{-1}$	1,726031$x10^{-4}$
Meter pro Sekunde	m s^{-1}	**1**	$x10^{2}$	**6**	x10	3,**6**	x 1	**1**	x 1	**1**	$x10^{-3}$	1,968504$x10^{2}$	3,280840x 1	2,236936x 1	1,943844x 1	1,942606x 1	6,213712$x10^{-4}$
Kilometer pro Sekunde	km s^{-1}	**1**	$x10^{5}$	**6**	$x10^{4}$	3,**6**	$x10^{3}$	**1**	$x10^{3}$	**1**	x 1	1,968504$x10^{5}$	3,280840$x10^{3}$	2,236936$x10^{3}$	1,943844$x10^{3}$	1,942606$x10^{3}$	6,213712$x10^{-1}$
Foot per minute (techn.)	ft min^{-1} (techn.)	5,0**8**	$x10^{-1}$	3,04**8**	$x10^{-1}$	1,828**8**	$x10^{-2}$	5,0**8**	$x10^{-3}$	5,0**8**	$x10^{-6}$	**1** x 1	1,$\dot{6}$	$x10^{-2}$	1,1$\dot{3}\dot{6}$	$x10^{-2}$	9,874730$x10^{-3}$	9,868438$x10^{-3}$	3,1$\dot{5}\dot{6}$	$x10^{-6}$
Foot per second (techn.)	ft s^{-1} (techn.)	3,04**8**	x10	1,828**8**	x10	1,0972**8**	x 1	3,04**8**	$x10^{-1}$	3,04**8**	$x10^{-4}$	**6**	x10	**1**	x 1	6,8$\dot{1}$	$x10^{-1}$	5,924838$x10^{-1}$	5,921063$x10^{-1}$	1,8$\dot{9}\dot{3}$	$x10^{-4}$
Mile per hour (techn.)	mi h^{-1} (techn.)	4,470**4**	x10	2,6822**4**	x10	1,609344x 1		4,470**4**	$x10^{-1}$	4,470**4**	$x10^{-4}$	8,**8**	x10	1,4$\dot{6}$	x 1	**1**	x 1	8,689762$x10^{-1}$	8,684226$x10^{-1}$	2,$\dot{7}$	$x10^{-4}$
Knot (international) Nautical mile (int.) per hour	Knot int.	5,1$\dot{4}$	x10	3,08$\dot{6}$	x10	1,85**2**	x 1	5,1$\dot{4}$	$x10^{-1}$	5,1$\dot{4}$	$x10^{-4}$	1,012686$x10^{2}$	1,687810x 1	1,150779x 1	**1**	x 1	9,993628$x10^{-1}$	3,196610x10-		
Knot (imperial) Nautical mile (imp.) per hour	Knot imp.	5,147724x10		3,088635x10		1,853181x 1		5,147724$x10^{-1}$		5,147724$x10^{-4}$		1,013332$x10^{2}$	1,688886x 1	1,151513x 1	1,000638x 1	**1**	x 1	3,198648$x10^{-4}$		
Mile per second (techn.)	mi s^{-1} (techn.)	1,609344$x10^{5}$		9,656064$x10^{4}$		5,793638$x10^{3}$		1,609344$x10^{3}$		1,609344x 1		3,16**8**	$x10^{5}$	5,2**8**	$x10^{3}$	3,**6**	$x10^{3}$	3,128314$x10^{3}$	3,126321$x10^{3}$	**1**	x 1

Winkelgeschwindigkeit

Dimension in allen Maßsystemen = T^{-1}

Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **B** zu multiplizieren

A		B																	
Name	Abkürzung	rev d^{-1}		^{g} min^{-1}		° min^{-1}		rev h^{-1}		^{g} s^{-1}		rad min^{-1}		° s^{-1}		rev min^{-1}		rad s^{-1}	rev s^{-1}
Umdrehung pro Tag	rev d^{-1}	**1**	x 1	2,$\dot{7}$	$x10^{-1}$	2,**5**	$x10^{-1}$	4,1$\dot{6}$	$x10^{-2}$	4,6$\dot{2}\dot{9}$	$x10^{-3}$	4,363323$x10^{-3}$	4,1$\dot{6}$	$x10^{-3}$	6,9$\dot{4}$	$x10^{-4}$	7,272005$x10^{-5}$	1,15$\dot{7}\dot{4}\dot{0}\dot{7}$	$x10^{-5}$
Neugrad pro Minute	^{g} min^{-1}	3,**6**	x 1	**1**	x 1	**9**	$x10^{-1}$	1,**5**	$x10^{-1}$	1,$\dot{6}$	$x10^{-2}$	1,570796$x10^{-2}$	1,**5**	$x10^{-2}$	2,**5**	$x10^{-3}$	2,617994$x10^{-4}$	4,1$\dot{6}$	$x10^{-5}$
Altgrad pro Minute	° min^{-1}	**4**	x 1	1,$\dot{1}$	x 1	**1**	x 1	1,$\dot{6}$	$x10^{-1}$	1,8$\dot{5}\dot{1}$	$x10^{-2}$	1,745329$x10^{-2}$	1,$\dot{6}$	$x10^{-2}$	2,$\dot{7}$	$x10^{-3}$	2,908882$x10^{-4}$	4,629	$x10^{-5}$
Umdrehung pro Stunde	rev h^{-1}	2,**4**	x10	6,$\dot{6}$	x 1	**6**	x 1	**1**	x 1	1,$\dot{1}$	$x10^{-1}$	1,047198$x10^{-1}$	**1**	$x10^{-1}$	1,$\dot{6}$	$x10^{-2}$	1,745329$x10^{-3}$	2,$\dot{7}$	$x10^{-4}$
Neugrad pro Sekunde	^{g} s^{-1}	2,**16**	$x10^{2}$	**6**	x10	5,**4**	x10	**9**	x 1	**1**	x 1	9,424778$x10^{-1}$	**9**	$x10^{-1}$	1,5	$x10^{-1}$	1,570796$x10^{-2}$	2,**5**	$x10^{-3}$
Radiant pro Minute	rad min^{-1}	2,291831$x10^{2}$		6,366198x10		5,729578x10		9,549297x 1		1,061033 x1		**1**	x 1	9,549297$x10^{-1}$		1,591549$x10^{-1}$		1,$\dot{6}$	$x10^{-2}$	2,652582$x10^{-3}$
Altgrad pro Sekunde	° s^{-1}	2,**4**	$x10^{2}$	6,$\dot{6}$	x10	**6**	x10	**1**	x10	1,$\dot{1}$	x 1	1,047198x 1	**1**	x 1	1,$\dot{6}$	$x10^{-1}$	1,745329$x10^{-2}$	2,$\dot{7}$	$x10^{-3}$
Umdrehung pro Minute	rev min^{-1}	1,**44**	$x10^{3}$	**4**	$x10^{2}$	3,**6**	$x10^{2}$	**6**	x10	6,$\dot{6}$	x 1	6,283185x 1	**6**	x 1	**1**	x 1	1,047198$x10^{-1}$	1,$\dot{6}$	$x10^{-2}$
Radiant pro Sekunde	rad s^{-1}	1,375099$x10^{4}$		3,819719$x10^{3}$		3,437747$x10^{3}$		5,729578$x10^{2}$		6,366198x10		**6**	x10	5,729578x10		9,549297x 1		**1**	x 1	1,591549$x10^{-1}$
Umdrehung pro Sekunde	rev s^{-1}	8,**64**	$x10^{4}$	2,**4**	$x10^{4}$	2,**16**	$x10^{4}$	3,**6**	$x10^{3}$	**4**	$x10^{2}$	3,769911$x10^{2}$	3,**6**	$x10^{2}$	**6**	x10	6,283185x 1	**1**	x 1

Frequenz

Dimension in allen Maßsystemen = T^{-1}

Grundeinheit in allen Maßsystemen: s^{-1} = Hertz (Hz), sofern s^{-1} für Schwingungen pro Sekunde geschrieben wird. Die Bezeichnung Hertz für die dimensionsgleiche Frequenz f der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ ist unzulässig. Kilohertz (kHz) (Kilocycle, Kc.) = 1000 Hertz.

Die Bezeichnung für Hertz in den angelsächsischen Ländern ist das cycle per second, kurz auch cps oder cycle (c.) geschrieben.

Beschleunigung

Dimension in allen Maßsystemen = LT^{-2}

Abgeleitete Einheit im MKS- und MTS-System: Meter/Sekunde pro Sekunde ($m\,s^{-2}$).
Abgeleitete Einheit im CGS-System: Zentimeter/Sekunde pro Sekunde ($cm\,s^{-2}$) = Galilei (Gal).

Der internationale Standard[1] der Normfallbeschleunigung ist g_n = 9,806 65 $m\,s^{-2}$ = 980,665 Gal ($cm\,s^{-2}$)
= 32,173 96 $ft\,s^{-2}$ (US)
= 32,174 05 $ft\,s^{-2}$ (techn.)

Über die Werte der Fallbeschleunigung an verschiedenen Breitegraden des Erdgeoids siehe S. 205.

Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **B** zu multiplizieren

A		B									
Name	Abkürzung	$cm\,s^{-2}$ Gal		$km\,h^{-1}\,s^{-1}$		$m\,s^{-2}$		$ft\,s^{-2}$ (techn.)		$mi\,h^{-1}\,s^{-1}$ (techn.)	
Galilei Zentimeter/Sekunde pro Sekunde	Gal $cm\,s^{-2}$	1	$\times 1$	3,6	$\times 10^{-2}$	1	$\times 10^{-2}$	3,280 840	$\times 10^{-2}$	2,236 936	$\times 10^{-2}$
Kilometer/Stunde pro Sekunde	$km\,h^{-1}\,s^{-1}$	2,$\dot{7}$	$\times 10$	1	$\times 1$	2,$\dot{7}$	$\times 10^{-1}$	9,113 444	$\times 10^{-1}$	6,213 712	$\times 10^{-1}$
Meter/Sekunde pro Sekunde	$m\,s^{-2}$	1	$\times 10^{2}$	3,6	$\times 1$	1	$\times 1$	3,280 840	$\times 1$	2,236 936	$\times 1$
Foot/second per second (techn.)	$ft\,s^{-2}$	3,048	$\times 10$	1,097 28	$\times 1$	3,048	$\times 10^{-1}$	1	$\times 1$	6,8$\ddot{1}$	$\times 10^{-1}$
Mile/hour per second (techn.)	$mi\,h^{-1}\,s^{-1}$	4,4704	$\times 10$	1,609 344	$\times 1$	4,4704	$\times 10^{-1}$	1,4$\dot{6}$	$\times 1$	1	$\times 1$

1) *C. R. 3e Conf. Poids Mes., 1901*, Paris (1901).

Winkelbeschleunigung

Dimension in allen Maßsystemen = T^{-2}

Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **B** zu multiplizieren

A		B									
Name	Abkürzung	rev min^{-2}		g s^{-2}		° s^{-2}		rev $min^{-1}\,s^{-1}$		rad s^{-2}		rev s^{-2}	
Umdrehung/Minute pro Minute	rev min^{-2}	1	$\times 1$	1,1$\dot{1}$	$\times 10^{-1}$	1	$\times 10^{-1}$	1,6$\dot{6}$	$\times 10^{-2}$	1,745 329	$\times 10^{-3}$	2,7$\dot{7}$	$\times 10^{-4}$
Neugrad/Sekunde pro Sekunde	g s^{-2}	9	$\times 1$	1	$\times 1$	9	$\times 10^{-1}$	1,5	$\times 10^{-1}$	1,570 796	$\times 10^{-2}$	2,5	$\times 10^{-3}$
Altgrad/Sekunde pro Sekunde	° s^{-2}	1	$\times 10$	1,1$\dot{1}$	$\times 1$	1	$\times 1$	1,6$\dot{6}$	$\times 10^{-1}$	1,745 329	$\times 10^{-2}$	2,7$\dot{7}$	$\times 10^{-3}$
Umdrehung/Minute pro Sekunde	rev $min^{-1}\,s^{-1}$	6	$\times 10$	6,6$\dot{6}$	$\times 1$	6	$\times 1$	1	$\times 1$	1,047 198	$\times 10^{-1}$	1,6$\dot{6}$	$\times 10^{-2}$
Radiant/Sekunde pro Sekunde	rad s^{-2}	5,729 578	$\times 10^{2}$	6,366 198	$\times 10$	5,729 578	$\times 10$	9,549 297	$\times 1$	1	$\times 1$	1,591 549	$\times 10^{-1}$
Umdrehung/Sekunde pro Sekunde	rev s^{-2}	3,6	$\times 10^{3}$	4	$\times 10^{2}$	3,6	$\times 10^{3}$	6	$\times 10$	6,283 185	$\times 1$	1	$\times 1$

Kraft, Gewicht

Dimensionsformeln

In den Länge-Masse-Zeit-Systemen (LMT-Systemen) = LMT^{-2}

Abgeleitete Einheiten in den dazugehörenden Maßsystemen:
MKS-System: Newton (N) ≡ $m\,kg\,s^{-2}$
CGS-System: Dyn (dyn) ≡ $cm\,g\,s^{-2}$
MTS-System: sthène (sn) ≡ $m\,t\,s^{-2}$

In den Länge-Kraft-Zeit-Systemen (LKT-Systemen) = K

Grundeinheit: Im dazugehörenden m-kp-s-System der Technik = Kilogramm-Kraft (kp) = 9,806 65 Newton = Gewicht eines Kilogramms am Orte der Normfallbeschleunigung.

In Deutschland, Österreich und Schweden wird für die technische Krafteinheit der Name Kilopond verwendet. Wegen Verwechslungsgefahr (holländisch Pfund = pond, englisch = pound) ist dieser Name international nicht durchgedrungen. Auf alle Fälle sollte der Name Kilogramm nicht ohne nähere Kennzeichnung als Kraft- oder Gewichtseinheit verwendet werden. Wir halten uns an folgende Regeln:

Definition	Name
Gewicht eines Kilogramms am Orte der Normfallbeschleunigung = technische Krafteinheit = $g_n \times$ kg	Kilogramm-Kraft kilogramme-force (französisch) kilogram-force (englisch)
Gewicht eines Kilogramms an einem Orte mit Fallbeschleunigung g_{lokal} = Lokalgewicht = $g_l \times$ kg	Kilogramm-Gewicht kilogramme-poids (französisch) kilogram-weight (englisch)

Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **B** zu multiplizieren

A		B						
Name	Abkürzung	dyn	p	N	kp	Gr*	Pdl (US)**	Lb***
Dyn	dyn $cm\,g\,s^{-2}$	**1** × 1	1,019716×10⁻³	**1** ×10⁻⁵	1,019716×10⁻⁶	1,573662×10⁻²	7,232998×10⁻⁵	2,248089×10⁻⁶
Gramm-Kraft Pond	p	9,80665 ×10²	**1** × 1	9,80665 ×10⁻³	**1** ×10³	1,543236×10	7,093148×10⁻²	2,204622×10⁻³
Newton	N $m\,kg\,s^{-2}$	**1** ×10⁵	1,019716×10³	**1** × 1	1,019716×10⁻¹	1,573662×10³	7,232998× 1	2,248089×10⁻¹
Kilogramm-Kraft Kilopond	kp	9,80665 ×10⁵	**1** ×10³	9,80665 × 1	**1** × 1	1,543236×10⁴	7,093148×10	2,204622× 1
Grain-force* (grain-weight)	Gr (gr wt)	6,354603×10	6,479892×10⁻¹	6,354603×10⁻⁴	6,479892×10⁻⁵	**1** × 1	4,596283×10⁻³	1,428571×10⁻⁴
Poundal** (US)	Pdl (US)	1,382552×10⁴	1,409811×10	1,382552×10⁻¹	1,409811×10⁻²	2,175671×10²	**1** × 1	3,108101×10⁻²
Pound-force*** (pound-weight)	Lb (lb wt)	4,448222×10⁵	4,535924×10²	4,448222× 1	4,535924×10⁻¹	**7** ×10³	3,217398× 1	**1** × 1

* 1 Gr = 9,80665 $m\,s^{-2}$ gr.
** 1 Poundal = 1 ft lb s^{-2} (US)
*** 1 Lb = 9,80665 $m\,s^{-2}$ lb

Druck

Dimensionsformel in den LMT-Systemen = $L^{-1}MT^{-2}$

Abgeleitete Einheiten in den dazugehörenden Maßsystemen:

MKS-System: Newton pro Quadratmeter (N m^{-2}) ≡ $m^{-1}\,kg\,s^{-2}$

CGS-System: Dyn p. Quadratzentimeter (dyn cm^{-2}) ≡ $cm^{-1}\,g\,s^{-2}$ ≡ Mikrobar (µb)

MTS-System: Pièze (pz) ≡ $m^{-1}\,t\,s^{-2}$

Dimensionsformel in den LKT-Systemen der Technik = $L^{-2}K$

Abgeleitete Einheit im dazugehörenden m-kp-s-System der Technik: Kilogramm-Kraft pro Quadratmeter (kp m^{-2}) = 9,806 65 N m^{-2}. Der 10⁴fache Betrag ist unter der Bezeichnung **technische Atmosphäre** (at) die in der Technik meist gebrauchte Druckeinheit: 1 at = kp cm^{-2} = 9,806 65 × 10⁴ N m^{-2}.

Der 10⁶fache Betrag des dyn cm^{-2} heißt Bar (b oder bar); das Millibar (mb) ist heute die international gebräuchliche Druckeinheit der Meteorologie, das Mikrobar (µb) wird in der Akustik für Schalldruckangaben benutzt.

Umrechnung von Druckeinheiten

Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit dem Faktor **B** und der der gesuchten Einheit entsprechenden Zehnerpotenz unter **C** zu multiplizieren

Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit dem Faktor **D** und der der gesuchten Einheit entsprechenden Zehnerpotenz unter **E** zu multiplizieren

Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **F** zu multiplizieren

A		B	C				D	E			F							
Name	Abkürzung		µb	Nm^{-2}	mb	b		$kp\,m^{-2}$	pcm^{-2}	at	mm H_2O	Torr	atm	Lb ft^{-2} (tech.)	in H_2O (US)	ft H_2O (tech.)	in Hg (US)	Lb in^{-2} (tech.)	Tn ft^{-2} (tech.)
Mikrobar	µb	**1** x	1	10^{-1}	10^{-3}	10^{-6}	1,019716x	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	1,019745x10^{-2}	7,500617x10^{-4}	9,869233x10^{-7}	2,088543x10^{-3}	4,014735x10^{-4}	3,345619x10^{-5}	2,952992x10^{-5}	1,450377x10^{-5}	9,323853x10^{-7}
Newton pro Quadratmeter	N m^{-2}	**1** x	10	1	10^{-2}	10^{-5}	1,019716x	10^{-1}	10^{-2}	10^{-5}	1,019745x10^{-1}	7,500617x10^{-3}	9,869233x10^{-6}	2,088543x10^{-2}	4,014735x10^{-3}	3,345619x10^{-4}	2,952992x10^{-4}	1,450377x10^{-4}	9,323853x10^{-6}
Millibar	mb	**1** x	10^3	10^2	1	10^{-3}	1,019716x	10	1	10^{-3}	1,019745x10	7,500617x10^{-1}	9,869233x10^{-4}	2,088543x 1	4,014735x10^{-1}	3,345619x10^{-2}	2,952992x10^{-2}	1,450377x10^{-2}	9,323853x10^{-4}
Bar	b	**1** x	10^6	10^5	10^3	1	1,019716x	10^4	10^3	1	1,019745x10^4	7,500617x10^2	9,869233x10^{-1}	2,088543x10^3	4,014735x10^2	3,345619x10	2,952992x10	1,450377x10	9,323853x10^{-1}
Kilogramm-Kraft pro Quadratmeter	kp m^{-2}	9,80665 x	10	1	10^{-2}	10^{-5}	**1** x	1	10^{-1}	10^{-4}	1,000028x 1	7,355592x10^{-2}	9,678411x10^{-5}	2,048161x10^{-1}	3,937110x10^{-2}	3,280932x10^{-3}	2,895896x10^{-3}	1,422334x10^{-3}	9,143577x10^{-5}
Gramm-Kraft pro Quadratzentimeter	p cm^{-2}	9,80665 x	10^2	10	10^{-1}	10^{-4}	**1** x	10	1	10^{-3}	1,000028x10	7,355592x10^{-1}	9,678411x10^{-4}	2,048161x 1	3,937110x10^{-1}	3,280932x10^{-2}	2,895896x10^{-2}	1,422334x10^{-2}	9,143577x10^{-4}
Techn. Atmosphäre	at	9,80665 x	10^5	10^4	10^2	10^{-1}	**1** x	10^4	10^3	1	1,000028x10^4	7,355592x10^2	9,678411x10^{-1}	2,048161x10^3	3,937110x10^2	3,280932x10	2,895896x10	1,422334x10	9,143577x10^{-1}
Millim. Wassersäule	mm H_2O	9,806375x	10	1	10^{-2}	10^{-5}	9,999720x	10^{-1}	10^{-2}	10^{-5}	**1** x 1	7,355386x10^{-2}	9,678140x10^{-5}	2,048104x10^{-1}	3,937 x10^{-2}	3,280840x10^{-3}	2,895815x10^{-3}	1,422294x10^{-3}	9,143207x10^{-5}
Torricelli	Torr	1,333224x	10^3	10^2	1	10^{-3}	1,359510x	10	1	10^{-3}	1,359548x10	**1** x 1	1,315789x10^{-3}	2,784495x 1	5,352540x10^{-1}	4,460459x10^{-2}	3,936999x10^{-2}	1,933677x10^{-2}	1,243078x10^{-3}
Physikalische Atmosphäre	atm	1,01325 x	10^6	10^5	10^3	1	1,033227x	10^4	10^3	1	1,033256x10^4	7,6 x10^2	**1** x 1	2,116216x10^3	4,067930x10^2	3,389949x10	2,992120x10	1,469595x10	9,447394x10^{-1}
Pound-force per square foot (tech.)	Lb ft^{-2} (lb_{wt} ft^{-2})	4,788027x	10^2	10	10^{-1}	10^{-4}	4,882428x	1	10^{-1}	10^{-4}	4,882565x 1	3,591315x10^{-1}	4,725415x10^{-4}	**1** x 1	1,922266x10^{-1}	1,601891x10^{-2}	1,413901x10^{-2}	6,94 x10^{-3}	4,464286x10^{-4}
Inch of water (US)	in H_2O	2,490824x	10^3	10^2	1	10^{-3}	2,539934x	10	1	10^{-3}	2,540005x10	1,868272x 1	2,458252x10^{-3}	5,202194x 1	**1** x 1	8,333350x10^{-2}	7,355385x10^{-2}	3,612635x10^{-2}	2,322408x10^{-3}
Foot of water (tech.)	ft H_2O	2,988983x	10^4	10^3	10	10^{-2}	3,047915x	10^2	10	10^{-2}	3,048 x10^2	2,241922x10	2,949897x10^{-2}	6,242620x10	1,199998x10	**1** x 1	8,826445x10^{-1}	4,335153x10^{-1}	2,786884x10^{-2}
Inch of mercury (US)	in Hg	3,386395x	10^4	10^3	10	10^{-2}	3,453162x	10^2	10	10^{-2}	3,453259x10^2	2,540005x10	3,342112x10^{-2}	7,072633x10	1,359548x10	1,132959x 1	**1** x 1	4,911551x10^{-1}	3,157425x10^{-2}
Pound-force per square inch (tech.)	Lb in^{-2} (lb_{wt} in^{-2})	6,894758x	10^4	10^3	10	10^{-2}	7,030697x	10^2	10	10^{-2}	7,030894x10^2	5,171494x10	6,804597x10^{-2}	1,44 x10^2	2,768063x10	2,306724x 1	2,036017x 1	1 x 1	6,428571x10^{-2}
Ton-force per square foot (tech.)	Tn ft^{-2} (tn_{wt} ft^{-2})	1,072518x	10^6	10^5	10^3	1	1,093664x	10^4	10^3	1	1,093695x10^4	8,044546x10^2	1,058493x 1	2,24 x10^3	4,305875x10^2	3,588237x10	3,167137x10	1,5 x10	**1** x 1

Spezielle, auf das CGS-, MKS- und m-kp-s-System nicht abgestimmte Druckeinheiten sind:

Physikalische Normalatmosphäre (atm). Sie wurde im Zusammenhang mit der internationalen Temperaturskala von 1948 definiert[1, 2]:

$$1\ \text{atm} = 1\,013\,250\ \text{dyn/cm}^2$$

Torricelli (Torr). Es ist definiert

$$1\ \text{Torr} = 1\ \text{atm}/760 = 1333{,}22368\ \text{dyn/cm}^2$$

Millimeter Wassersäule (mm H_2O). Es ist definiert als das Gewicht eines Wasservolumens von 1 mm Höhe und 1 cm² Querschnitt am Ort der Normfallbeschleunigung bei 4° C und 760 Torr:

$$1\ \text{mm}\ H_2O = 0{,}1\ \text{cm} \times 0{,}999972\ \text{g/cm}^3 \times 980{,}665\ \text{cm/s}^2 = 98{,}0638\ \text{dyn/cm}^2$$

Millimeter Quecksilbersäule (mm Hg). Es ist definiert[3] als der 760. Teil der veralteten Normalatmosphäre von 1927. Diese wurde definiert als der Druck einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe, bei einer Dichte des Quecksilbers von 13,5951 g/cm³ am Ort der Normfallbeschleunigung:

$$1\ \text{atm}_{1927} = 76 \times 13{,}5951\ \text{g/cm}^3 \times 980{,}665\ \text{cm/s}^2 = 1{,}013\,250\,144\ \text{dyn/cm}^2 = 1{,}000\,000\,14\ \text{atm}$$

und daraus

$$1\ \text{mm Hg} = 1\ \text{atm}_{1927}/760 = 1333{,}22387\ \text{dyn/cm}^2 = 1{,}000\,000\,14\ \text{Torr}$$

An Stelle des mm Hg ist heute das Torr zu verwenden, das im Gegensatz zum mm Hg eine von Materialkonstanten unabhängige Maßeinheit ist.

Als *Normdruck* wird heute sowohl in der Physik als in der Meteorologie 1 atm = 760 Torr verwendet. Er entspricht dem mittleren Luftdruck in Meereshöhe am Ort der Normfallbeschleunigung.

Die nichtkohärenten angelsächsischen Druckeinheiten Inch of water, Foot of water und Inch of mercury berechnen sich nach den Formeln für Millimeter Wassersäule und Atmosphäre von 1927 (bei mm Hg), indem an Stelle der metrischen Längeneinheit (0,1 cm bzw. 76 cm) 1 Inch oder 1 Foot eingesetzt werden.

1) C. R. 9e Conf. Poids Mes., 1948, Paris (1949). *2) C. R. 10e Conf. Poids Mes., 1954*, Paris (1955). *3) C. R. 7e Conf. Poids Mes., 1927*, Paris (1927).

Energie (Arbeit, Wärmemenge)

Dimensionsformel in den LMT-Systemen = $L^2\,M\,T^{-2}$

Abgeleitete Einheiten in den dazugehörenden Maßsystemen:

MKS-System: Joule (J) ≡ Newton mal Meter ≡ $m^2\,kg\,s^{-2}$
CGS-System: Erg (erg) ≡ Dyn mal Zentimeter ≡ $cm^2\,g\,s^{-2}$

Dimensionsformel in den LKT-Systemen = LK

Abgeleitete Einheit im dazugehörenden m-kp-s-System:

Meterkilogramm-Kraft (mkp) ≡ Meter mal Kilogramm-Kraft = 9,806 65 Joule

Energie ist *gespeicherte Arbeit* oder *Arbeitsfähigkeit*. Da Energie somit ein Arbeitsvorrat ist, wird sie in den gleichen Einheiten gemessen wie die Arbeit.

Ein Körper kann Energie grundsätzlich auf zwei Weisen besitzen: entweder auf Grund seiner Lagebeziehungen zu den Körpern seiner Umgebung (potentielle Energie) oder infolge seiner Bewegung (Bewegungsenergie). Daneben besitzt jeder Körper in Gestalt seiner Masse m die potentielle Energie $E = m\,c^2$ (c = Vakuumlichtgeschwindigkeit), weshalb zum Beispiel in der Atomphysik die Masseneinheit (ME) als Energieeinheit benutzt wird. Die Wärme (Wärmemenge) ist Bewegungsenergie der Moleküle, die früher in Kalorien, heute in Joule gemessen wird. Das Verhältnis dieser beiden Einheiten zueinander (1 cal_{15} = 4,1855 Joule) wurde als sogenanntes Wärmeäquivalent bezeichnet, eine Konstante, die bei der heutigen Wärmemessung in Joule überflüssig geworden ist.

Energetische Einheiten der Atom- und Kernphysik. Die in der Atom- und Kernphysik verwendeten Energieeinheiten enthalten alle als Faktoren eine oder mehrere physikalische Konstanten: Die Vakuumlichtgeschwindigkeit c, die Elementarladung e, das Wirkungsquantum h, die spezifische Molekülzahl N, die BOLTZMANNsche Entropiekonstante k und die RYDBERG-Wellenzahl R_H des Wasserstoffs. Die daraus gebildeten Energieeinheiten sind im Gegensatz zu den üblichen Einheiten nicht per definitionem gegeben, sondern durch Messung von physikalischen Konstanten, es sind *natürliche* Energieeinheiten. Über den Wert dieser Konstanten und die Formeln zur Berechnung der Einheiten vgl. Physikalische Konstanten, S. 206 und 207.

Umrechnung von Energieeinheiten der Makrophysik

Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **B** zu multiplizieren

A		B								
Name	Abkürzung	J	erg	kWh	PSh	mkp	latm	cal_{15}	$kcal_{15}$	BTU_{mean}
Joule	J	1	10^7	$2{,}\dot{7}\times10^{-7}$	$3{,}776727\times10^{-7}$	$1{,}019716\times10^{-1}$	$9{,}868956\times10^{-3}$	$2{,}3892\times10^{-1}$	$2{,}3892\times10^{-4}$	$9{,}4716\times10^{-4}$
Erg	erg	10^{-7}	1	$2{,}\dot{7}\times10^{-14}$	$3{,}776727\times10^{-14}$	$1{,}019716\times10^{-8}$	$9{,}868956\times10^{-10}$	$2{,}3892\times10^{-8}$	$2{,}3892\times10^{-11}$	$9{,}4716\times10^{-11}$
Kilowattstunde	kWh	$3{,}6\times10^6$	$3{,}6\times10^{13}$	1	$1{,}359622\times1$	$3{,}670978\times10^5$	$3{,}552824\times10^4$	$8{,}6011\times10^5$	$8{,}6011\times10^2$	$3{,}4098\times10^3$
Pferdestärkestunde	PSh	$2{,}647796\times10^6$	$2{,}647796\times10^{13}$	$7{,}354989\times10^{-1}$	1	$2{,}7\times10^5$	$2{,}613098\times10^4$	$6{,}3261\times10^5$	$6{,}3261\times10^2$	$2{,}5079\times10^3$
Meterkilogramm-Kraft	mkp	$9{,}80665\times1$	$9{,}80665\times10^7$	$2{,}724069\times10^{-6}$	$3{,}703704\times10^{-6}$	1	$9{,}678140\times10^{-2}$	$2{,}3430\times1$	$2{,}3430\times10^{-3}$	$9{,}2885\times10^{-3}$
Literatmosphäre	latm	$1{,}013278\times10^2$	$1{,}013278\times10^9$	$2{,}814662\times10^{-5}$	$3{,}826875\times10^{-5}$	$1{,}033256\times10$	1	$2{,}4209\times10$	$2{,}4209\times10^{-2}$	$9{,}5974\times10^{-2}$
15°-Kalorie	cal_{15}	$4{,}1855\times1$	$4{,}1855\times10^7$	$1{,}1626\times10^{-6}$	$1{,}5808\times10^{-6}$	$4{,}2680\times10^{-1}$	$4{,}1307\times10^{-2}$	1	10^{-3}	$3{,}9643\times10^{-3}$
15°-Kilokalorie	$kcal_{15}$	$4{,}1855\times10^3$	$4{,}1855\times10^{10}$	$1{,}1626\times10^{-3}$	$1{,}5808\times10^{-3}$	$4{,}2680\times10^2$	$4{,}1307\times10$	10^3	1	$3{,}9643\times1$
British Thermal Unit$_{mean}$	BTU_{mean}	$1{,}0558\times10^3$	$1{,}0558\times10^{10}$	$2{,}9328\times10^{-4}$	$3{,}9874\times10^{-4}$	$1{,}0766\times10^2$	$1{,}0420\times10$	$2{,}5225\times10^2$	$2{,}5225\times10^{-1}$	1

Umrechnung von Energieeinheiten der Atomphysik

Die gegebene Maßeinheit unter **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **B** zu multiplizieren

A		B								
Name	Abkürzung	g	J	erg	ME	Ry	eV	cm^{-1}	°K	s^{-1}
Gramm	g	1	$8{,}98755\times10^{13}$	$8{,}98755\times10^{20}$	$6{,}02502\times10^{23}$	$4{,}12594\times10^{31}$	$5{,}61015\times10^{32}$	$4{,}52523\times10^{36}$	$6{,}51082\times10^{36}$	$1{,}35663\times10^{47}$
Joule	J	$1{,}11265\times10^{-14}$	1	10^7	$6{,}70374\times10^9$	$4{,}59073\times10^{17}$	$6{,}24213\times10^{18}$	$5{,}03500\times10^{22}$	$7{,}24426\times10^{22}$	$1{,}50945\times10^{33}$
Erg	erg	$1{,}11265\times10^{-21}$	10^{-7}	1	$6{,}70374\times10^2$	$4{,}59073\times10^{10}$	$6{,}24213\times10^{11}$	$5{,}03500\times10^{15}$	$7{,}24426\times10^{15}$	$1{,}50945\times10^{26}$
Masseneinheit	ME	$1{,}65975\times10^{-24}$	$1{,}49171\times10^{-10}$	$1{,}49171\times10^{-3}$	1	$6{,}84801\times10^7$	$9{,}31141\times10^8$	$7{,}51073\times10^{12}$	$1{,}08063\times10^{13}$	$2{,}25166\times10^{23}$
Rydberg	Ry	$2{,}42369\times10^{-32}$	$2{,}17830\times10^{-18}$	$2{,}17830\times10^{-11}$	$1{,}46028\times10^{-8}$	1	$1{,}35973\times10$	$1{,}09678\times10^5$	$1{,}57802\times10^5$	$3{,}28805\times10^{15}$
Elektronenvolt	eV	$1{,}78248\times10^{-33}$	$1{,}60202\times10^{-19}$	$1{,}60202\times10^{-12}$	$1{,}07395\times10^{-9}$	$7{,}35443\times10^{-2}$	1	$8{,}06616\times10^3$	$1{,}16054\times10^4$	$2{,}41817\times10^{14}$
Zentimeter^{-1}	cm^{-1}	$2{,}20983\times10^{-37}$	$1{,}98610\times10^{-23}$	$1{,}98610\times10^{-16}$	$1{,}33143\times10^{-13}$	$9{,}11763\times10^{-6}$	$1{,}23974\times10^{-4}$	1	$1{,}43878\times1$	$2{,}99793\times10^{10}$
Grad Kelvin	°K	$1{,}53591\times10^{-37}$	$1{,}38040\times10^{-23}$	$1{,}38040\times10^{-16}$	$9{,}25386\times10^{-14}$	$6{,}33705\times10^{-6}$	$8{,}61665\times10^{-5}$	$6{,}95033\times10^{-1}$	1	$2{,}08366\times10^{10}$
Sekunde^{-1}	s^{-1}	$7{,}37120\times10^{-48}$	$6{,}62491\times10^{-34}$	$6{,}62491\times10^{-27}$	$4{,}44117\times10^{-24}$	$3{,}04131\times10^{-6}$	$4{,}13535\times10^{-15}$	$3{,}33564\times10^{-11}$	$4{,}79926\times10^{-11}$	1

Leistung – Wirkung – Entropie – Dynamische Viskosität Kinematische Viskosität – Oberflächenspannung – Wärmeleitfähigkeit Wärmeübergangszahl, Wärmedurchgangszahl

Leistung

Dimensionsformel in den LMT-Systemen = $L^2 M T^{-3}$

Abgeleitete Einheiten in den dazugehörenden Maßsystemen:

MKS-System: Watt (W) ≡ 1 Joule pro Sekunde ≡ Newton mal Meter pro Sekunde ≡ $m^2 kg s^{-3}$

CGS-System: Erg pro Sekunde ($erg s^{-1}$) ≡ Dyn mal Zentimeter pro Sekunde ≡ $cm^2 g s^{-3}$

Dimensionsformel in den LKT-Systemen = LKT^{-1}

Abgeleitete Einheit im dazugehörenden m-kp-s-System der Technik: Meterkilogramm-Kraft pro Sekunde (mkp s^{-1}). Der 75fache Betrag des mkp s^{-1} ist die in der Technik weitgehend verwendete Pferdestärke (PS).

Umrechnung von Leistungseinheiten

Die gegebene Maßeinheit **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **B** zu multiplizieren

A		B						
Name	Abkürzung	$erg\ s^{-1}$	W	kW	$mkp\ s^{-1}$	PS	$cal_{15}\ s^{-1}$	$BTU_{mean}\ s^{-1}$
Erg pro Sekunde	$erg\ s^{-1}$	**1** x 1	**1** x10^{-7}	**1** x10^{-10}	1,019716x10^{-8}	1,359622x10^{-10}	2,3892x10^{-8}	9,4716x10^{-11}
Watt	W	**1** x10^{7}	**1** x 1	**1** x10^{-3}	1,019716x10^{-1}	1,359622x10^{-3}	2,3892x10^{-1}	9,4716x10^{-4}
Kilowatt	kW	**1** x10^{10}	**1** x10^{3}	**1** x 1	1,019716x10^{2}	1,359622x 1	2,3892x10^{2}	9,4716x10^{-1}
Meterkilogramm-Kraft p. Sekunde	$mkp\ s^{-1}$	9,80665 x10^{7}	9,80665 x 1	9,80665 x10^{-3}	**1** x 1	1,3̇ x10^{-2}	2,3430x 1	9,2884x10^{-3}
Pferdestärke	PS	7,354988x10^{9}	7,354988x10^{2}	7,354988x10^{-1}	7,**5** x10	**1** x 1	1,7573x10^{2}	6,9663x10^{-1}
15°-Kalorie pro Sekunde	$cal_{15}\ s^{-1}$	4,1855 x10^{7}	4,1855 x 1	4,1855 x10^{-3}	4,2680 x10^{-1}	5,6907 x10^{-3}	**1** x 1	3,9643x10^{-3}
British Thermal $Unit_{mean}$ per second	$BTU_{mean}\ s^{-1}$	1,0558 x10^{10}	1,0558 x10^{3}	1,0558 x 1	1,0766 x10^{2}	1,4355 x 1	2,5225x10^{2}	**1** x 1

Wirkung

Dimensionsformel in den LMT-Systemen = $L^2 M T^{-1}$

Abgeleitete Einheiten in den dazugehörenden Maßsystemen:

MKS-System: Joule mal Sekunde (J s) ≡ Newton mal Meter mal Sekunde ≡ $m^2 kg s^{-1}$

CGS-System: Erg mal Sekunde (erg s) ≡ Dyn mal Zentimeter mal Sekunde ≡ $cm^2 g s^{-1}$

Dimensionsformel in den LKT-Systemen = LKT

Abgeleitete Einheit im dazugehörenden m-kp-s-System der Technik: mkp s = 9,806 **6**5 J s

Einheiten der Atomphysik: Elektronenvolt mal Sekunde (eV s), Planckscher Wirkungsquantum (h)

Umrechnungen von Wirkungseinheiten

Die gegebene Maßeinheit unter **A** ist mit den der gesuchten Einheit entsprechenden Faktoren unter **B** zu multiplizieren

A		B						
Name	Abkürzung	erg s	J s	mkp s	cal_{15} s	BTU_{mean} s	eV s	h
Erg mal Sekunde	erg s	**1** x 1	**1** x10^{-7}	1,019716x10^{-8}	2,3892x10^{-8}	9,4716x10^{-11}	6,24213x10^{11}	1,50945x10^{26}
Joule mal Sekunde	J s	**1** x10^{7}	**1** x 1	1,019716x10^{-1}	2,3892x10^{-1}	9,4716x10^{-4}	6,24213x10^{18}	1,50945x10^{33}
Meterkilogramm-Kraft mal Sekunde	mkp s	9,80665x10^{7}	9,80665x 1	**1** x 1	2,3430x 1	9,2884x10^{-3}	6,12144x10^{19}	1,48027x10^{34}
15°-Kalorie mal Sekunde	cal_{15} s	4,1855 x10^{7}	4,1855 x 1	4,2680 x10^{-1}	**1** x 1	3,9643x10^{-3}	2,6126 x10^{19}	6,3178 x10^{33}
British Thermal $Unit_{mean}$ times second	BTU_{mean} s	1,0558 x10^{10}	1,0558 x10^{3}	1,0766 x10^{2}	2,5225x10^{2}	**1** x 1	6,5904 x10^{21}	1,5937 x10^{36}
Elektronenvolt mal Sekunde	eV s	1,60202x10^{-12}	1,60202x10^{-19}	1,63360 x10^{-20}	3,8275x10^{-20}	1,5174x10^{-22}	**1** x 1	2,41817x10^{14}
Planckscher Wirkungsquantum	h	6,62491x10^{-27}	6,62491x10^{-34}	6,75553 x10^{-35}	1,5828x10^{-34}	6,2748x10^{-37}	4,13535x10^{-15}	**1** x 1

Entropie

Dimensionsformel in den LMT-Systemen = $L^2 M T^{-2} grd^{-1}$

Abgeleitete Einheiten in den dazugehörenden Maßsystemen:

MKS-System: Joule pro Grad Kelvin ($J °K^{-1}$) ≡ $m^2 kg s^{-2} °K^{-1}$ ≡ 10^7 erg $°K^{-1}$

CGS-System: Erg pro Grad Kelvin ($erg °K^{-1}$) ≡ $cm^2 kg s^{-2} °K^{-1}$ ≡ 10^{-7} J $°K^{-1}$

Dimensionsformel in den LKT-Systemen = $LK\ grd^{-1}$

Abgeleitete Einheit im dazugehörenden m-kp-s-System der Technik: Meterkilogramm-Kraft pro Grad Kelvin ($mkp °K^{-1}$) = 9,806 **6**5 J $°K^{-1}$

Die spezielle Entropie-Einheit Clausius (Cl) = 15°-Kalorie pro Grad Kelvin ($cal_{15}\ °K^{-1}$) hat ihre Bedeutung verloren, nachdem neuerdings die Wärme (Wärmemenge) in Joule und nicht mehr in Kalorien wiedergegeben ist.

1 J $°K^{-1}$ ≡ 10^7 erg $°K^{-1}$ = 0,23892 Cl

1 Cl = 4,1855 J $°K^{-1}$ = 4,1855 × 10^7 erg $°K^{-1}$

Dynamische Viskosität

Dimensionsformel in den LMT-Systemen = $L^{-1} M T^{-1}$

Abgeleitete Einheiten in den dazugehörenden Maßsystemen:

MKS-System: Newton mal Sekunde pro Quadratmeter (N s m^{-2}) ≡ $m^{-1} kg s^{-1}$ ≡ 10 Poise

CGS-System: Poise (P) = Dyn mal Sekunde pro Quadratzentimeter (dyn s cm^{-2}) ≡ $cm^{-1} g s^{-1}$ ≡ 0,1 N s m^{-2}

Foot-Pound-Second-System (avoirdupois): Pound per foot per second (lb $ft^{-1} s^{-1}$) = Poundal second per square foot (US) = 1,488 1612 N s m^{-2} = 14,881 612 P

Dimensionsformel in den LKT-Systemen = $L^{-2} KT$

Abgeleitete Einheiten in den dazugehörenden Maßsystemen der Technik:

m-kp-s-System: Kilogramm-Kraft mal Sekunde pro Quadratmeter (kp s m^{-2}) = 9,806 **6**5 N s m^{-2}

Foot-$Pound_{wt}$-Second-System (avoirdupois): $Pound_{wt}$ second per square foot (Lb s ft^{-2}) = 14,593 91 N s m^{-2} = 1,488 164 kp s m^{-2}

Kinematische Viskosität

Dimensionsformel in allen Maßsystemen = $L^2 T^{-1}$

Abgeleitete Einheiten in den dazugehörenden Maßsystemen:

MKS- und m-kp-s-System: Quadratmeter pro Sekunde ($m^2 s^{-1}$) ≡ 10^4 Stokes

Quadratmeter pro Stunde ($m^2 h^{-1}$) = 2,7̇ $m^2 s^{-1}$

CGS-System: Stokes (St) ≡ Quadratzentimeter pro Sekunde ($cm^2 s^{-1}$) ≡ 10^{-4} $m^2 s^{-1}$

Foot-Pound-Second-System: Square foot per second ($ft^2 s^{-1}$, US) = 0,092 9034 $m^2 s^{-1}$

Square foot per hour ($ft^2 h^{-1}$, US) = 2,580 650 × 10^{-5} $m^2 s^{-1}$

Oberflächenspannung

Dimensionsformel in den LMT-Systemen = $M T^{-2}$

Abgeleitete Einheiten in den dazugehörenden Maßsystemen:

MKS-System: Newton pro Meter (N m^{-1}) ≡ kg s^{-2} ≡ 10^3 dyn cm^{-1} = 1,019 716 × 10^{-1} kp m^{-1}

CGS-System: Dyn pro Zentimeter (dyn cm^{-1}) ≡ g s^{-2} ≡ 10^{-3} N m^{-1} = 1,019 716 × 10^{-4} kp m^{-1}

Dimensionsformel in den LKT-Systemen = $L^{-1} K$

Abgeleitete Einheit im dazugehörenden m-kp-s-System der Technik: Kilogramm-Kraft pro Meter (kp m^{-1}) = 9,806 **6**5 N m^{-1}

Wärmeleitfähigkeit

Dimensionsformel in den LMT-Systemen = $L M T^{-3} grd^{-1}$

Abgeleitete Einheiten in den dazugehörenden Maßsystemen:

MKS-System: Watt pro Meter pro Grad Kelvin (W $m^{-2} °K^{-1}$) ≡ m kg $s^{-3} °K^{-1}$ ≡ 10^5 erg $cm^{-1} s^{-1} °K^{-1}$ ≡ 2,3892 × 10^{-3} cal_{15} $cm^{-1} s^{-1} °K^{-1}$

CGS-System: Erg pro Zentimeter pro Sekunde pro Grad Kelvin (erg $cm^{-1} s^{-1} °K^{-1}$) ≡ cm g $s^{-3} °K^{-1}$ ≡ 10^{-5} W $m^{-1} °K^{-1}$ = 2,3892 × 10^{-8} cal_{15} $cm^{-1} s^{-1} °K^{-1}$

Foot-Pound-Second-System (avoirdupois): British Thermal $Unit_{mean}$ per foot per second per degree Fahrenheit (BTU_{mean} $ft^{-1} s^{-1} °F^{-1}$) = 1,5587 × 10^4 W $m^{-1} °K^{-1}$

Spezielle Einheit: 15°-Kalorie pro Zentimeter pro Sekunde pro Grad Kelvin (cal_{15} $cm^{-1} s^{-1} °K^{-1}$) = 4,1855 × 10^7 erg $cm^{-1} s^{-1} °K^{-1}$ = 4,1855 × 10^2 W $m^{-1} °K^{-1}$

Dimensionsformel in den LKT-Systemen = $K T^{-1} grd^{-1}$

Wärmeübergangszahl, Wärmedurchgangszahl

Dimensionsformel in den LMT-Systemen = $M T^{-3} grd^{-1}$

Abgeleitete Einheiten in den dazugehörenden Maßsystemen:

MKS-System: Watt pro Quadratmeter pro Grad Kelvin (W $m^{-2} °K^{-1}$) ≡ kg $s^{-3} °K^{-1}$ ≡ 10^{-7} W $cm^{-2} °K^{-1}$ ≡ 10^3 erg s^{-1} $cm^{-2} °K^{-1}$ = 2,3892 × 10^{-5} cal_{15} $cm^{-2} s^{-1} °K^{-1}$

CGS-System: Erg pro Sekunde pro Quadratzentimeter pro Grad Kelvin (erg s^{-1} $cm^{-2} °K^{-1}$) ≡ g $s^{-3} °K^{-1}$ ≡ 10^{-3} W $m^{-2} °K^{-1}$ ≡ 10^{-7} W $cm^{-2} °K^{-1}$ = 2,3892 × 10^{-8} cal_{15} $cm^{-2} s^{-1} °K^{-1}$

Foot-Pound-Second-System (avoirdupois): British Thermal $Unit_{mean}$ per square foot per second per degree Fahrenheit = BTU_{mean} $ft^{-2} s^{-1} °F^{-1}$ = 5,1140 × 10^4 W $m^{-2} °K^{-1}$

Dimensionsformel in den LKT-Systemen = $L^{-1} K T^{-1} grd^{-1}$

Bei den elektrischen Maßsystemen sind in erster Linie zwei Gruppen zu unterscheiden: Maßsysteme, die auf einer fernwirkungstheoretisch definierten Darstellung der Elektrizität und des Magnetismus mit drei Grundqualitäten (Dimensionen) fußen, und solche, die auf einer feldtheoretisch definierten Darstellung mit vier Grundqualitäten (Dimensionen) beruhen.

Die fernwirkungstheoretische Definition elektrischer Qualitäten mit den drei Dimensionen Länge, Masse, Zeit (LMT) stammt aus der Zeit, als bei der Erschließung der Elektrizität und des Magnetismus nur die bis dahin üblichen mechanischen Meßverfahren zur Verfügung standen. Mit der Entwicklung spezifisch-elektrischer Meßmethoden und der Feldtheorie in der Elektrodynamik setzte sich später die feldtheoretische Definition im Bereiche der Elektrizität und des Magnetismus mehr und mehr durch. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß sie auf 4 Grundmeßverfahren (und damit 4 Grundqualitäten, vgl. S. 172) aufbaut, von denen mindestens eines ein spezifisch elektrisches ist, zum Beispiel eine Widerstands- oder Ladungsmessung. Folglich lassen sich die feldtheoretisch definierten Qualitäten auf 4 Grundqualitäten (Dimensionen) zurückführen, von denen mindestens eine eine spezifisch elektrische ist, zum Beispiel auf die Dimensionen LMTR (R = elektrischer Widerstand) oder LMTμ_0 (μ_0 = magnetische Feldkonstante) oder LMTε_0 (ε_0 = elektrische Feldkonstante) usw. Aus Gründen des praktischen Meßverfahrens, welches entsprechend dem OHMschen Gesetz meistens mit der Kombination zweier elektrischer Meßmethoden arbeitet (Spannungs- und Strom- bzw. Widerstandsmessung), sind dem seit 1948 international anerkannten *absoluten elektrischen Maßsystem* (Dimensionen LTUI = Länge, Zeit, Spannung, Strom; Grundeinheiten m, s, V, A = Meter, Sekunde, Volt, Ampere) zwei elektrische Grundeinheiten, V und A, zugrunde gelegt worden. Das absolute elektrische Maßsystem stützt sich auf das seinerzeit von GIORGI vorgeschlagene MKSΩ-System, das auf das MKS-System abgestimmt ist und dessen 4. Grundeinheit, das absolute Ohm, definiert wird durch die Festsetzung des Zahlenwertes für die magnetische Feldkonstante μ_0, gemessen in Meter, Sekunde und dem so einzuführenden Ohm:

$$\mu_0 = 10^{-7}\ 4\pi\ \Omega\ s\ m^{-1}$$

Die absolute Ohmeinheit kann demnach durch eine Widerstandsrolle in geeigneter Form über einen Induktionsversuch verkörpert werden. Den Übergang vom GIORGIschen m-kg-s-Ω-System zum nunmehr international eingeführten absoluten m-s-V-A-System bieten folgende Gleichungen:

$$J\ (\text{Joule}) = m^2\,kg\,s^{-2} \qquad \Omega = V\,A^{-1}$$

$$V = \sqrt{\frac{J\,\Omega}{s}} \qquad A = \sqrt{\frac{J}{\Omega\,s}}$$

folglich:

$$V = m\,kg^{1/2}\,s^{-3/2}\,\Omega^{1/2} \qquad A = m\,kg^{1/2}\,s^{-3/2}\,\Omega^{-1/2}$$

Die Energieeinheit J (Joule) und damit die Krafteinheit N (Newton) und die Leistungseinheit W (Watt) des absoluten m-s-V-A-Systems sind danach identisch mit den entsprechenden Einheiten des MKS-Systems, und damit sind auch alle anderen Einheiten aufeinander abgestimmt, weshalb diese beiden Systeme die anderen bisher üblichen in Wissenschaft und Technik mehr und mehr verdrängen.

Bis anhin wurden in der Physik die fernwirkungstheoretisch definierten Maßsysteme mit den 3 Dimensionen LMT und den Grundeinheiten cm, g, s viel verwendet, weil sie auf das CGS-System der Mechanik abgestimmt sind: *elektromagnetisches bzw. elektrostatisches CGS-System.* Man erhält *formal* die Einheiten dieser Systeme, wenn man in den feldtheoretisch definierten Maßsystemen LMTμ_0 bzw. LMTε_0 die magnetische Feldkonstante μ_0 bzw. die elektrische Feldkonstante $\varepsilon_0 = 1$ setzt und die Dimensionen LMT durch die entsprechenden Einheiten cm, g, s darstellt. Das LMTμ_0-System führt auf diese Weise zum elektromagnetischen, das LMTε_0-System zum elektrostatischen CGS-System. Da $\varepsilon_0 \mu_0 c_0^2 = 1$ ist (c_0 = Lichtgeschwindigkeit; im folgenden nur mit c bezeichnet) und deshalb, wenn $\mu_0 = 1$ und $\varepsilon_0 = 1/c^2$, bzw. wenn $\varepsilon_0 = 1$ und $\mu_0 = 1/c^2$ wird, erscheint beim Übergang von einem dieser Maßsysteme zum anderen die Konstante c_0 in verschiedener Form als Ausgleichsfaktor.

Da die Dimensionen der im folgenden dargestellten elektrischen Maßsysteme nur teilweise übereinstimmen, die Maßsysteme also artungleich sind und zudem sich noch auf grundverschiedene (fernwirkungstheoretische bzw. feldtheoretische) Definitionen stützen, lassen sich Einheiten der verschiedenen Systeme für ein und dieselbe Qualität, zum Beispiel die elektrische Feldstärke, nicht gleichsetzen, da sie wohl zahlenwertmäßig, nicht aber in ihren Dimensionen gleich sind. Praktische Auswirkungen hat dieser Umstand nicht, da beim Vergleich von Messungsergebnissen auf Grund verschiedener Maßsysteme vor allem die Zahlenwerte interessieren. In der folgenden Tabelle wird dem Rechnung getragen, indem bei der Angabe von *dimensionsungleichen, numerisch aber gleichen* Äquivalenten das Zeichen ≙ verwendet wird. Symbol für Einheiten: emE = elektromagnetische CGS-Einheit der betreffenden Qualität, esE = elektrostatische CGS-Einheit der betreffenden Qualität.

Elektrische oder magnetische Qualität *(Symbol)* Dimensionssystem Maßsystem	Dimensionen Einheit	Symbol oder Abkürzung	Äquivalente (≙ besagt: entspricht zahlenwertmäßig, aber nicht in den Dimensionen c = Vakuumlichtgeschwindigkeit in Zentimeter pro Sekunde; $c = 2{,}99793 \times 10^{10}$)
Elektrische Feldkonstante (ε_0) (Influenzkonstante, Verschiebungskonstante, absolute Dielektrizitätskonstante des Vakuums)			
Dimensionssystem LTUI Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	$L^{-1}\,T\,U^{-1}\,I$ Farad/Meter	Fm^{-1}	≙ $4\pi\,10^{-11}$ emE ($= 1{,}2566 \times 10^{-10}$ emE) ≙ $4\pi\,10^{-11}\,c^2$ [esE] ($= 1{,}1294 \times 10^{11}$ [esE])
Dimensionssystem LMTμ_0 Elektromagnetisches CGS-System	$L^{-2}\,T^2\,\mu_0^{-1}$ $cm^{-2}\,s^2$	emE	≙ $10^{11}/4\pi$ F m^{-1} ($= 7{,}9577 \times 10^9$ F m^{-1}) ≙ c^2 [esE] ($= 8{,}9876 \times 10^{20}$ [esE])
Dimensionssystem LMTε_0 Elektrostatisches CGS-System	ε_0 1	1 [esE]	≙ $10^{11}/4\pi\,c^2$ F m^{-1} ($= 8{,}8542 \times 10^{-12}$ F m^{-1}) ≙ $1/c^2$ emE ($= 1{,}1126 \times 10^{-21}$ emE)
Elektrische Spannung (U)			
Dimensionssystem LTUI Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	U Volt	V	≙ 10^8 emE ≙ $10^8/c$ esE ($= 3{,}3356 \times 10^{-3}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0 Elektromagnetisches CGS-System	$L^{3/2}\,M^{1/2}\,T^{-2}\,\mu_0^{1/2}$ $cm^{3/2}\,g^{1/2}\,s^{-2}$	emE	≙ 10^{-8} V ≙ $1/c$ esE ($= 3{,}3356 \times 10^{-11}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0 Elektrostatisches CGS-System	$L^{1/2}\,M^{1/2}\,T^{-1}\,\varepsilon_0^{-1/2}$ $cm^{1/2}\,g^{1/2}\,s^{-1}$	esE	≙ $10^{-8}\,c$ V ($= 2{,}9979 \times 10^2$ V) ≙ c emE ($= 2{,}9979 \times 10^{10}$ emE)

Elektrische oder magnetische Qualität *(Symbol)* Dimensionssystem Maßsystem	Dimensionen Einheit	Symbol oder Abkürzung	Äquivalente (≙ besagt: entspricht zahlenwertmäßig, aber nicht in den Dimensionen c = Vakuumlichtgeschwindigkeit in Zentimeter pro Sekunde; $c = 2{,}99793 \times 10^{10}$)
Elektrische Stromstärke *(I)*			
Dimensionssystem LTUI	I		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Ampere	A	≙ 10^{-1} emE ≙ $10^{-1}\,c$ esE (= $2{,}9979 \times 10^{9}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1} \mu_0^{-1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{1/2} g^{1/2} s^{-1}$	emE	≙ 10 A ≙ c esE (= $2{,}9979 \times 10^{10}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-2} \varepsilon_0^{1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{3/2} g^{1/2} s^{-2}$	esE	≙ $10/c$ A (= $3{,}3356 \times 10^{-10}$ A) ≙ $1/c$ emE (= $3{,}3356 \times 10^{-11}$ emE)
Elektrische Stromdichte *(G)*			
Dimensionssystem LTUI	L^{-2} I		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Ampere/Quadratmeter	A m^{-2}	≙ 10^{-5} emE ≙ $10^{-5}\,c$ esE (= $2{,}9979 \times 10^{5}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{-3/2} M^{1/2} T^{-1} \mu_0^{-1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{-3/2} g^{1/2} s^{-1}$	emE	≙ 10^{5} A m^{-2} ≙ c esE (= $2{,}9979 \times 10^{10}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-2} \varepsilon_0^{1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{-1/2} g^{1/2} s^{-2}$	esE	≙ $10^{5}/c$ A m^{-2} (= $3{,}3356 \times 10^{-6}$ A m^{-2}) ≙ $1/c$ emE (= $3{,}3356 \times 10^{-11}$ emE)
Elektrische Feldstärke *(E)*			
Dimensionssystem LTUI	L^{-1} U		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Volt/Meter	V m^{-1}	≙ 10^{6} emE ≙ $10^{6}/c$ esE (= $3{,}3356 \times 10^{-5}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-2} \mu_0^{1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{1/2} g^{1/2} s^{-2}$	emE	≙ 10^{-6} V m^{-1} ≙ $1/c$ esE (= $3{,}3356 \times 10^{-11}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1} \varepsilon_0^{-1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{-1/2} g^{1/2} s^{-1}$	esE	≙ $10^{-6}\,c$ V m^{-1} (= $2{,}9979 \times 10^{4}$ V m^{-1}) ≙ c emE (= $2{,}9979 \times 10^{10}$ emE)
Elektrische Verschiebung *(D)*			
Dimensionssystem LTUI	L^{-2} TI		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Coulomb/Quadratmeter	C m^{-2}	≙ $4\pi\,10^{-5}$ emE (= $1{,}2566 \times 10^{-4}$ emE) ≙ $4\pi\,c/10^{5}$ esE (= $3{,}7672 \times 10^{6}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{-3/2} M^{1/2} \mu_0^{-1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{-3/2} g^{1/2}$	emE	$10^{5}/4\pi$ C m^{-2} (= $7{,}9577 \times 10^{3}$ C m^{-2}) ≙ c esE (= $2{,}9979 \times 10^{10}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1} \varepsilon_0^{1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{-1/2} g^{1/2} s^{-1}$	esE	$10^{5}/4\pi c$ C m^{-2} (= $2{,}6544 \times 10^{-7}$ C m^{-2}) ≙ $1/c$ emE (= $3{,}3356 \times 10^{-11}$ emE)
Elektr. Verschiebungsfluß *(Ψ)*			
Dimensionssystem LTUI	T I		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Coulomb	C = As	≙ $4\pi\,10^{-1}$ emE (= 1,2566 emE) ≙ $4\pi\,10^{-1}\,c$ esE (= $3{,}7673 \times 10^{10}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{1/2} M^{1/2} \mu_0^{-1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{1/2} g^{1/2}$	emE	≙ $10/4\pi$ C (= $7{,}9577 \times 10^{-1}$ C) ≙ c esE (= $2{,}9979 \times 10^{10}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1} \varepsilon_0^{1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{3/2} g^{1/2} s^{-1}$	esE	≙ $10/4\pi c$ C (= $2{,}6544 \times 10^{-11}$ C) ≙ $1/c$ emE (= $3{,}3356 \times 10^{-11}$ emE)

Elektrische oder magnetische Qualität *(Symbol)* Dimensionssystem Maßsystem	Dimensionen Einheit	Symbol oder Abkürzung	Äquivalente (≙ besagt: entspricht zahlenwertmäßig, aber nicht in den Dimensionen c = Vakuumlichtgeschwindigkeit in Zentimeter pro Sekunde; $c = 2{,}99793 \times 10^{10}$)
Elektrische Polarisation *(P)*			
Dimensionssystem LTUI	$L^{-2}TI$		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Coulomb/Quadratmeter	$C\,m^{-2}$	≙ 10^{-5} emE ≙ $10^{-5}\,c$ esE ($= 2{,}9979 \times 10^{5}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{-3/2}M^{1/2}\mu_0^{-1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{-3/2}g^{1/2}$	emE	≙ 10^{5} C m^{-2} ≙ c esE ($= 2{,}9979 \times 10^{10}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}\varepsilon_0^{1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{-1/2}g^{1/2}s^{-1}$	esE	≙ $10^{5}/c$ C m^{-2} ($= 3{,}3356 \times 10^{-6}$ C m^{-2}) ≙ $1/c$ emE ($= 3{,}3356 \times 10^{-11}$ emE)
Elektrisches Moment *(p)*			
Dimensionssystem LTUI	LTI		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Coulomb × Meter	C m	≙ 10 emE ≙ c esE ($= 2{,}9979 \times 10^{11}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{3/2}M^{1/2}\mu_0^{-1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{3/2}g^{1/2}$	emE	≙ 10^{-1} C m ≙ c esE ($= 2{,}9979 \times 10^{10}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{5/2}M^{1/2}T^{-1}\varepsilon_0^{1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{5/2}g^{1/2}s^{-1}$	esE	≙ $10^{-1}/c$ C m ($= 3{,}3356 \times 10^{-12}$ C m) ≙ $1/c$ emE ($= 3{,}3356 \times 10^{-11}$ emE)
Elektrische Suszeptibilität *(χ)*			
Dimensionssystem LTUI	1		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	1	1 [Abs]	≙ $1/4\pi$ [emE] ($= 7{,}9577 \times 10^{-2}$ [emE]) ≙ $1/4\pi$ [esE]
Dimensionssystem LMTμ_0	1		
Elektromagnetisches CGS-System	1	1 [emE]	≙ 4π [Abs] ($= 1{,}2566 \times 10$ [Abs]) ≙ 1 [esE]
Dimensionssystem LMTε_0	1		
Elektrostatisches CGS-System	1	1 [esE]	≙ 4π [Abs] ($= 1{,}2566 \times 10$ [Abs]) ≙ 1 [emE]
Elektrische Ladung *(Q)*			
Dimensionssystem LTUI	TI		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Coulomb (= As)	C	≙ 10^{-1} emE ≙ $10^{-1}\,c$ esE ($= 2{,}9979 \times 10^{9}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{1/2}M^{1/2}\mu_0^{-1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{1/2}g^{1/2}$	emE	≙ 10 C ≙ c esE ($= 2{,}9979 \times 10^{10}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}\varepsilon_0^{1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{3/2}g^{1/2}s^{-1}$	esE	≙ $10/c$ C ($= 3{,}3356 \times 10^{-10}$ C) ≙ $1/c$ emE ($= 3{,}3356 \times 10^{-11}$ emE)
Elektrische Raumladung *(η)*			
Dimensionssystem LTUI	$L^{-3}TI$		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Coulomb/Kubikmeter	C m^{-3}	≙ 10^{-7} emE ≙ $10^{-7}\,c$ esE ($= 2{,}9979 \times 10^{3}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{-5/2}M^{1/2}\mu_0^{-1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{-5/2}g^{1/2}$	emE	≙ 10^{7} C m^{-3} ≙ c esE ($= 2{,}9979 \times 10^{10}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{-3/2}M^{1/2}T^{-1}\varepsilon_0^{1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{-3/2}g^{1/2}s^{-1}$	esE	≙ $10^{7}/c$ C m^{-3} ($= 3{,}3356 \times 10^{4}$ C m^{-3}) ≙ $1/c$ emE ($= 3{,}3356 \times 10^{-11}$ emE)

Elektrische oder magnetische Qualität *(Symbol)* Dimensionssystem Maßsystem	Dimensionen Einheit	Symbol oder Abkürzung	Äquivalente (≙ besagt: entspricht zahlenwertmäßig, aber nicht in den Dimensionen c = Vakuumlichtgeschwindigkeit in Zentimeter pro Sekunde; $c = 2{,}99793 \times 10^{10}$)
Elektrische Kapazität *(C)*			
Dimensionssystem LTUI	$TU^{-1}I$		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Farad (= As/V)	F	≙ 10^{-9} emE ≙ $10^{-9}\,c^2$ esE (= $8{,}9876 \times 10^{11}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{-1}T^2\mu_0^{-1}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{-1}s^2$	emE	≙ 10^9 F ≙ c^2 esE (= $8{,}9876 \times 10^{20}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L\varepsilon_0$		
Elektrostatisches CGS-System	cm	cm (esE)	≙ $10^9/c^2$ F (= $1{,}1126 \times 10^{-12}$ F) ≙ $1/c^2$ emE (= $1{,}1126 \times 10^{-21}$ emE)
Elektrischer Widerstand *(R)*			
Dimensionssystem LTUI	UI^{-1}		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Ohm (= VA^{-1}) (1 Megohm = 10^6 Ohm)	Ω	≙ 10^9 emE ≙ $10^9/c^2$ esE (= $1{,}1126 \times 10^{-12}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$LT^{-1}\mu_0$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm\,s^{-1}$	emE	≙ 10^{-9} Ω ≙ $1/c^2$ esE (= $1{,}1126 \times 10^{-21}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{-1}T\varepsilon_0^{-1}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{-1}s$	esE	≙ $10^{-9}\,c^2$ Ω (= $8{,}9876 \times 10^{11}$ Ω) ≙ c^2 emE (= $8{,}9876 \times 10^{20}$ emE)
Spezifischer elektrischer Widerstand *(ϱ)*			
Dimensionssystem LTUI	LUI^{-1}		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Ohm × Meter	Ω m	≙ 10^{11} emE ≙ $10^{11}/c^2$ esE (= $1{,}1126 \times 10^{10}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^2T^{-1}\mu_0$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^2\,s^{-1}$	emE	≙ 10^{-11} Ω m ≙ $1/c^2$ esE (= $1{,}1126 \times 10^{-21}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$T\varepsilon_0^{-1}$		
Elektrostatisches CGS-System	s	s (esE)	≙ $10^{-11}\,c^2$ Ω m (= $8{,}9876 \times 10^9$ Ω m) ≙ c^2 emE (= $8{,}9876 \times 10^{20}$ emE)
Elektrische Leitfähigkeit *(σ)*			
Dimensionssystem LTUI	$L^{-1}U^{-1}I$		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Siemens*/Meter (= $\Omega^{-1}m^{-1}$)	$S\,m^{-1}$ ($\Omega^{-1}\,m^{-1}$)	≙ 10^{-11} emE ≙ $10^{-11}\,c^2$ esE (= $8{,}9876 \times 10^9$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{-2}T\mu_0^{-1}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{-2}\,s$	emE	≙ $10^{11}\,S\,m^{-1}$ ≙ $10^{11}\,c^2$ esE (= $8{,}9876 \times 10^{20}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$T^{-1}\varepsilon_0$		
Elektrostatisches CGS-System	s^{-1}	esE	≙ $10^{11}/c^2\,S\,m^{-1}$ (= $1{,}1126 \times 10^{-10}\,S\,m^{-1}$) ≙ $1/c^2$ emE (= $1{,}1126 \times 10^{-21}$ emE)
Elektrische Induktivität *(^eL)*			
Dimensionssystem LTUI	TUI^{-1}		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Henry = VsA^{-1}	H	≙ 10^9 emE ≙ $10^9/c^2$ esE (= $1{,}1126 \times 10^{-12}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L\mu_0$		
Elektromagnetisches CGS-System	cm	cm (emE)	≙ 10^{-9} H ≙ $1/c^2$ esE (= $1{,}1126 \times 10^{-21}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{-1}T^2\varepsilon_0^{-1}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{-1}\,s^2$	esE	≙ $10^{-9}\,c^2$ H (= $8{,}9876 \times 10^{11}$ H) ≙ c^2 emE (= $8{,}9876 \times 10^{20}$ emE)

* In der angelsächsischen Literatur wird das Siemens mit mho (reziprokes Ohm) bezeichnet.

Elektrische oder magnetische Qualität *(Symbol)* Dimensionssystem Maßsystem	Dimensionen Einheit	Symbol oder Abkürzung	Äquivalente (△ besagt: entspricht zahlenwertmäßig, aber nicht in den Dimensionen c = Vakuumlichtgeschwindigkeit in Zentimeter pro Sekunde; $c = 2{,}99793 \times 10^{10}$)
Magnetische Feldkonstante (μ_0) (Induktionskonstante, absolute Permeabilität des Vakuums)			
Dimensionssystem LTUI	$L^{-1}\,T\,U\,I^{-1}$		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Henry/Meter	$H\,m^{-1}$	△ $10^7/4\pi$ [emE] (= $7{,}9577 \times 10^5$ [emE]) △ $10^7/4\pi c^2$ esE (= $8{,}8542 \times 10^{-16}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	μ_0		
Elektromagnetisches CGS-System	1	1 [emE]	△ $4\pi\,10^{-7}\,H\,m^{-1}$ (= $1{,}2566 \times 10^{-6}\,H\,m^{-1}$) △ $1/c^2$ esE (= $1{,}1126 \times 10^{-21}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{-2}\,T^2\,\varepsilon_0^{-1}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{-2}\,s^2$	esE	△ $4\pi\,10^{-7}\,c^2\,H\,m^{-1}$ (= $1{,}1294 \times 10^{15}\,H\,m^{-1}$) △ c^2 [emE] (= $8{,}9876 \times 10^{20}$ [emE])
Magnetische Spannung *(V)*			
Dimensionssystem LTUI	I		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Ampere	A	△ $4\pi\,10^{-1}$ Gb (= 1,2566 Gb) △ $4\pi\,10^{-1}$ esE (= $3{,}7673 \times 10^{10}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{1/2}\,M^{1/2}\,T^{-1}\,\mu_0^{-1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	Gilbert = $cm^{1/2}\,g^{1/2}\,s^{-1}$	Gb	△ $10/4\pi$ A (= $7{,}9577 \times 10^{-1}$ A) △ c esE (= $2{,}9979 \times 10^{10}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{3/2}\,M^{1/2}\,T^{-2}\,\varepsilon_0^{1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{3/2}\,g^{1/2}\,s^{-2}$	esE	△ $10/4\pi c$ A (= $2{,}6544 \times 10^{-11}$ A) △ $1/c$ emE (= $3{,}3356 \times 10^{-11}$ emE)
Magnetische Feldstärke *(H)*			
Dimensionssystem LTUI	$L^{-1}\,I$		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Ampere/Meter	$A\,m^{-1}$	△ $4\pi\,10^{-3}$ Oe (= $1{,}2566 \times 10^{-2}$ Oe) △ $4\pi\,10^{-3}\,c$ esE (= $3{,}7673 \times 10^8$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{-1/2}\,M^{1/2}\,T^{-1}\,\mu_0^{-1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System*	Oersted* = $cm^{-1/2}\,g^{1/2}\,s^{-1}$	Oe*	△ 1 Gb cm^{-1} △ $10^3/4\pi$ A m^{-1} (= $7{,}9577 \times 10$ A m^{-1}) △ 1 Kraftlinie pro Quadratzentimeter △ c esE (= $2{,}9979 \times 10^{10}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{1/2}\,M^{1/2}\,T^{-2}\,\varepsilon_0^{1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{1/2}\,g^{1/2}\,s^{-2}$	esE	△ $10^3/4\pi c$ A m^{-1} (= $2{,}6544 \times 10^{-9}$ A m^{-1}) △ $1/c$ Oe (= $3{,}3356 \times 10^{-11}$ Oe)
Magn. Vektorpotential *(A)*			
Dimensionssystem LTUI	$L^{-1}\,T\,U$		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Weber/Meter	$Wb\,m^{-1}$	△ 10^6 emE △ $10^6/c$ esE (= $3{,}3356 \times 10^{-5}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{1/2}\,M^{1/2}\,T^{-1}\,\mu_0^{1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{1/2}\,g^{1/2}\,s^{-1}$	emE (= Gs cm)	△ 10^{-6} Wb m^{-1} △ $1/c$ esE (= $3{,}3356 \times 10^{-11}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{-1/2}\,M^{1/2}\,\varepsilon_0^{-1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{-1/2}\,g^{1/2}$	esE	△ $10^{-6}\,c$ Wb m^{-1} (= $2{,}9979 \times 10^4$ Wb m^{-1}) △ c emE (= $2{,}9979 \times 10^{10}$ emE)
Magnetische Induktion *(B)*			
Dimensionssystem LTUI	$L^{-2}\,T\,U$		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Weber/Quadratmeter	$Wb\,m^{-2}$	△ 10^4 Gs △ $10^4/c$ esE (= $3{,}3356 \times 10^{-7}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{-1/2}\,M^{1/2}\,T^{-1}\,\mu_0^{1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System**	Gauß** = $cm^{-1/2}\,g^{1/2}\,s^{-1}$	Gs**	= 1 Mx cm^{-2} △ 10^{-4} Wb m^{-2} △ $1/c$ esE (= $3{,}3356 \times 10^{-11}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{-3/2}\,M^{1/2}\,\varepsilon_0^{-1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{-3/2}\,g^{1/2}$	esE	△ $10^{-4}\,c$ Wb m^{-2} (= $2{,}9979 \times 10^6$ Wb m^{-2}) △ c Gs (= $2{,}9979 \times 10^{10}$ Gs)

* Anstatt Oersted wird vielfach der Name Gauß für die CGS-Einheit der magnetischen Feldstärke verwendet.

** Anstatt Gauß wird vielfach das Oersted als CGS-Einheit der magnetischen Induktion verwendet.

Elektrische oder magnetische Qualität *(Symbol)* Dimensionssystem Maßsystem	Dimensionen Einheit	Symbol oder Abkürzung	Äquivalente (≙ besagt: entspricht zahlenwertmäßig, aber nicht in den Dimensionen c = Vakuumlichtgeschwindigkeit in Zentimeter pro Sekunde; $c = 2{,}99793 \times 10^{10}$)
Magnetischer Induktionsfluß *(Φ)*			
Dimensionssystem LTUI	T U		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Weber (= Vs)	Wb	≙ 10^8 Mx ≙ $10^8/c$ esE (= $3{,}3356 \times 10^{-3}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1} \mu_0^{1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	Maxwell = $cm^{3/2} g^{1/2} s^{-1}$	Mx	≙ 10^{-8} Wb ≙ $1/c$ esE (= $3{,}3356 \times 10^{-11}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{1/2} M^{1/2} \varepsilon_0^{-1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{1/2} g^{1/2}$	esE	≙ $10^{-8} c$ Wb (= $2{,}9979 \times 10^2$ Wb) = c Mx (= $2{,}9979 \times 10^{10}$ Mx)
Magnetische Polarisation *(J)* (Magnetisierungsstärke)			
Dimensionssystem LTUI	L^{-2} T U		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Weber/Quadratmeter	Wb m^{-2}	≙ $10^4/4\pi$ Gs (= $7{,}9577 \times 10^3$ Gs) ≙ $10^4/4\pi c$ esE (= $2{,}6544 \times 10^{-8}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1} \mu_0^{1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{-1/2} g^{1/2} s^{-1}$	emE	≙ $4\pi\,10^{-4}$ Wb m^{-2} (= $1{,}2566 \times 10^{-3}$ Wb m^{-2}) ≙ $1/c$ esE (= $3{,}3356 \times 10^{-11}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{-3/2} M^{1/2} \varepsilon_0^{-1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{-3/2} g^{1/2}$	esE	≙ $4\pi\,10^{-4} c$ Wb m^{-2} (= $3{,}7673 \times 10^7$ Wb m^{-2}) ≙ c emE (= $2{,}9979 \times 10^{10}$ Gs)
Coulombsches magnetisches Moment *(m_H)*			
Dimensionssystem LTUI	L T U		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Weber × Meter	Wb m	≙ $10^{10}/4\pi$ emE (= $7{,}9577 \times 10^8$ emE) ≙ $10^{10}/4\pi c$ esE (= $2{,}6544 \times 10^{-2}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{5/2} M^{1/2} T^{-1} \mu_0^{1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{5/2} g^{1/2} s^{-1}$	emE	≙ $4\pi\,10^{-10}$ Wb m (= $1{,}2566 \times 10^{-9}$ Wb m) ≙ $1/c$ esE (= $3{,}3356 \times 10^{-11}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{3/2} M^{1/2} \varepsilon_0^{-1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{3/2} g^{1/2}$	esE	≙ $4\pi\,10^{-10} c$ Wb m (= $3{,}7673 \times 10$ Wb m) ≙ c emE (= $2{,}9979 \times 10^{10}$ emE)
Coulombsche magnetische Polstärke *(p)*			
Dimensionssystem LTUI	T U		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Weber	Wb	≙ $10^8/4\pi$ emE (= $7{,}9577 \times 10^6$ emE) ≙ $10^8/4\pi c$ esE (= $2{,}6544 \times 10^{-4}$ esE)
Dimensionssystem LMT μ_0	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1} \mu_0^{1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{3/2} g^{1/2} s^{-1}$	emE	≙ $4\pi\,10^{-8}$ Wb (= $1{,}2566 \times 10^{-7}$ Wb) ≙ $1/c$ esE (= $3{,}3356 \times 10^{-11}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{1/2} M^{1/2} \varepsilon_0^{-1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{1/2} g^{1/2}$	esE	≙ $4\pi\,10^{-8} c$ Wb (= $3{,}7673 \times 10^{-3}$ Wb) ≙ c emE (= $2{,}9979 \times 10^{10}$ emE)
Magnetisierung *(M)*			
Dimensionssystem LTUI	L^{-1} I		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Ampere/Meter	A m^{-1}	≙ 10^{-3} emE ≙ $10^{-3} c$ esE (= $2{,}9979 \times 10^7$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1} \mu_0^{-1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{-1/2} g^{1/2} s^{-1}$	emE	≙ 10^3 A m^{-1} ≙ c esE (= $2{,}9979 \times 10^{10}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-2} \varepsilon_0^{1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{1/2} g^{1/2} s^{-2}$	esE	≙ $10^3/c$ A m^{-1} (= $3{,}3356 \times 10^{-8}$ A m^{-1}) ≙ $1/c$ emE (= $3{,}3356 \times 10^{-11}$ emE)

Elektrische oder magnetische Qualität *(Symbol)* Dimensionssystem Maßsystem	Dimensionen Einheit	Symbol oder Abkürzung	Äquivalente (≙ besagt: entspricht zahlenwertmäßig, aber nicht in den Dimensionen c = Vakuumlichtgeschwindigkeit in Zentimeter pro Sekunde; $c = 2{,}99793 \times 10^{10}$)
Ampèresches magnetisches Moment *(m_B)*			
Dimensionssystem LTUI	$L^2 I$		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Ampere × Quadratmeter	A m²	≙ 10^3 emE ≙ $10^3\, c$ esE (= $2{,}9979 \times 10^{13}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{5/2} M^{1/2} T^{-1}\, \mu_0^{-1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{5/2}\, g^{1/2}\, s^{-1}$	emE	≙ 10^{-3} A m² ≙ c esE (= $2{,}9979 \times 10^{10}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{7/2} M^{1/2} T^{-2}\, \varepsilon_0^{1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{7/2}\, g^{1/2}\, s^{-2}$	esE	≙ $10^{-3}/c$ A m² (= $3{,}3356 \times 10^{-14}$ A m²) ≙ $1/c$ emE (= $3{,}3356 \times 10^{-11}$ emE)
Ampèresche magnetische Polstärke *(m)*			
Dimensionssystem LTUI	$L I$		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Ampere × Meter	A m	≙ 10 emE ≙ 10 c esE (= $2{,}9979 \times 10^{11}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}\, \mu_0^{-1/2}$		
Elektromagnetisches CGS-System	$cm^{3/2}\, g^{1/2}\, s^{-1}$	emE	≙ 10^{-1} A m ≙ c esE (= $2{,}9979 \times 10^{10}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{5/2} M^{1/2} T^{-2}\, \varepsilon_0^{1/2}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{5/2}\, g^{1/2}\, s^{-2}$	esE	≙ $10^{-1}/c$ A m (= $3{,}3356 \times 10^{-12}$ A m) ≙ $1/c$ emE (= $3{,}3356 \times 10^{-11}$ emE)
Magnetische Suszeptibilität *($\varkappa$)*			
Dimensionssystem LTUI	1		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	1	1 [Abs]	≙ $1/4\pi$ [emE] (= $7{,}9577 \times 10^{-2}$ [emE]) ≙ $1/4\pi$ [esE]
Dimensionssystem LMTμ_0	1		
Elektromagnetisches CGS-System	1	1 [emE]	≙ 4π [Abs] (= $1{,}2566 \times 10$ [Abs]) ≙ [esE]
Dimensionssystem LMTε_0	1		
Elektrostatisches CGS-System	1	1 [esE]	≙ 4π [Abs] (= $1{,}2566 \times 10$ Abs) ≙ [emE]
Magnetischer Leitwert *(Λ)*			
Dimensionssystem LTUI	$T U I^{-1}$		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Henry = Vs A^{-1}	H	≙ $10^9/4\pi$ emE (= $7{,}9577 \times 10^7$ emE) ≙ $10^9/4\pi c^2$ esE (= $8{,}8542 \times 10^{-14}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L\, \mu_0$		
Elektromagnetisches CGS-System	cm	cm (emE)	≙ $4\pi\, 10^{-9}$ H (= $1{,}2566 \times 10^{-8}$ H) ≙ $1/c^2$ esE (= $1{,}1126 \times 10^{-21}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{-1} T^2\, \varepsilon_0^{-1}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{-1}\, s^2$	esE	≙ $4\pi\, 10^{-9}\, c^2$ H (= $1{,}1294 \times 10^{13}$ H) ≙ c^2 emE (= $8{,}9876 \times 10^{20}$ emE)
Elektromagnetische Induktivität (Selbstinduktionskoeffizient) *(mL)*			
Dimensionssystem LTUI	$T U I^{-1}$		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Henry = Vs A^{-1}	H	≙ 10^9 emE (cm) ≙ $10^9/c^2$ esE (= $1{,}1126 \times 10^{-12}$ esE)
Dimensionssystem LMTμ_0	$L\, \mu_0$		
Elektromagnetisches CGS-System	cm	cm (emE)	≙ 10^{-9} H ≙ $1/c^2$ esE (= $1{,}1126 \times 10^{-21}$ esE)
Dimensionssystem LMTε_0	$L^{-1} T^2\, \varepsilon_0^{-1}$		
Elektrostatisches CGS-System	$cm^{-1}\, s^2$	esE	≙ $10^{-9}\, c^2$ H (= $8{,}9876 \times 10^{11}$ H) ≙ c^2 emE (= $8{,}9876 \times 10^{20}$ emE)

Elektrische oder magnetische Qualität *(Symbol)* Dimensionssystem Maßsystem	Dimensionen Einheit	Symbol oder Abkürzung	Äquivalente (△ besagt: entspricht zahlenwertmäßig, aber nicht in den Dimensionen c = Vakuumlichtgeschwindigkeit in Zentimeter pro Sekunde; $c = 2{,}99793 \times 10^{10}$)
Elektrische oder magnetische Kraft *(F)*			
Dimensionssystem LTUI	$L^{-1}TUI$		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Newton	N	$\equiv 10^5$ dyn
Dimensionssystem LMTμ_0 Dimensionssystem LMTε_0	LMT^{-2}		Weitere Äquivalente siehe Krafteinheiten, S. 185
Elektromagnetisches CGS-System Elektrostatisches CGS-System	Dyn $\equiv$ cm g s^{-2}	dyn	$\equiv 10^{-5}$ N
Elektrische oder magnetische Energie *(W)* (Arbeit)			
Dimensionssystem LTUI	TUI		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Joule $\equiv$ Ws $\equiv$ A Vs $\equiv$ N m $\equiv$ m^2 kg s^{-2}	J	$\equiv 10^7$ erg
Dimensionssystem LMTμ_0 Dimensionssystem LMTε_0	L^2MT^{-2}		Weitere Äquivalente siehe Energieeinheiten, S. 187
Elektromagnetisches CGS-System Elektrostatisches CGS-System	Erg $\equiv$ cm^2 g s^{-2}	erg	$\equiv 10^{-7}$ J
Elektrische oder magnetische Leistung *(P)*			
Dimensionssystem LTUI	UI		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Watt (= VA)	W	$\equiv 10^7$ erg s^{-1}
Dimensionssystem LMTμ_0 Dimensionssystem LMTε_0	L^2MT^{-3}		Weitere Äquivalente siehe Leistungseinheiten, S. 188
Elektromagnetisches CGS-System Elektrostatisches CGS-System	Erg/Sekunde (= cm^2 g s^{-3})	erg s^{-1}	$\equiv 10^{-7}$ W
Elektromagnetische Strahlungsleistung (S = POYNTINGscher Vektor)			
Dimensionssystem LTUI	$L^{-2}UI$		
Absol. elektr. Maßsystem m-s-V-A	Watt/Quadratmeter	W m^{-2}	$= 10^3$ g s^{-3}
Dimensionssystem LMTμ_0 Dimensionssystem LMTε_0	MT^{-3}		
Elektromagnetisches CGS-System Elektrostatisches CGS-System	g s^{-3} = erg s^{-1} cm^{-2}	g s^{-3}	$= 10^{-3}$ W m^{-2}

Radioaktiver Zerfall

Einheiten

Die *internationale Einheit des radioaktiven Zerfalls* ist das Curie (c).

Definition[1]: *1 Curie ist diejenige Menge irgendeines radioaktiven Nuklids, die eine Aktivität von 3,700 × 10^{10} Zerfallsakten pro Sekunde aufweist.*

Ein Nuklid besteht aus Atomen gleicher Kernladungszahl *und* gleicher Massenzahl. Es hat sich eingebürgert, Mengen eines radioaktiven Nuklids in Curie anzugeben. Zum Beispiel spricht man von «1 Curie Caesium 137» anstatt von «der Menge Caesium 137, die eine Aktivität von 1 Curie hat».

Das Curie wird dezimal unterteilt:

1 Curie = 10^3 Millicurie (mc)
= 10^6 Mikrocurie (μc)
= 10^9 Nanocurie (nc)

1 Millicurie = $3{,}7 \times 10^7$ Zerfallsakte pro Sekunde
1 Mikrocurie = $3{,}7 \times 10^4$ Zerfallsakte pro Sekunde
1 Nanocurie = $3{,}7 \times 10$ Zerfallsakte pro Sekunde

Spezifische Aktivität

Es bestehen nebeneinander zwei verschiedene Definitionen für den Begriff «spezifische Aktivität»:

a) Das Verhältnis der Anzahl Atome eines radioaktiven Isotops zur Gesamtzahl der Atome des betreffenden Elementes.

b) Die Radioaktivität eines Isotops, ausgedrückt in Curie pro Gramm des betreffenden Elementes oder Isotops.

Für ein reines Nuklid ist die

$$\text{spezifische Aktivität} = \frac{1{,}128 \times 10^{13}}{T \times A} \text{ Curie pro Gramm} \qquad (1)$$

wobei T = Halbwertzeit des Nuklids in Sekunden
A = Massenzahl des Nuklids

Dividiert man die vom Hersteller genannte spezifische Aktivität eines Präparates durch (1), so erhält man den Gehalt des radioaktiven Isotops in Gramm pro Gramm Präparat.

Veraltete Einheiten

Das *alte Curie* (C) wurde definiert als diejenige Menge Radon, die in einem abgeschlossenen Raum mit 1 g Radium in radioaktivem Gleichgewicht steht. 1930 wurde die Definition erweitert[2]. Danach bedeutete das Curie diejenige Menge einer Substanz der Radiumreihe, die während einer bestimmten Zeit die gleiche Zahl von Zerfallsakten liefert wie 1 g Radium in der gleichen Zeit.

In der Balneologie werden noch verwendet: Das *Eman*, eine Konzentrationseinheit für Quellwässer, Quellgase, Bäder und ähnliches. Es ist definiert

1 Eman = 10^{-10} Alt-Curie pro Liter

Die Mache-*Einheit* (ME), ebenfalls eine Konzentrationseinheit, die auf den Radongehalt in 1 Liter Wasser oder Gas bezogen wird. Sie entspricht derjenigen Menge Radon, die allein, ohne Zerfallsprodukte, bei vollständiger Ausnutzung ihrer α-Strahlung durch Ionisation einen Sättigungsstrom von 10^{-3} esE ≙ $3{,}3356 \times 10^{-13}$ A zu unterhalten vermag. Der Sättigungsstrom, den 1 C Radon allein, ohne seine Zerfallsprodukte, zu unterhalten vermag, ist zu $2{,}75 \times 10^6$ esE ≙ 0,92 mA bestimmt worden[3, 4]. Daraus ergibt sich die Relation

1 Mache-Einheit = $3{,}64 \times 10^{-10}$ C/l = 3,64 Eman

Die Aktivitätseinheit «Mache-Einheit mal Liter» wird auch Millistat (mSt) genannt[5]:

1 mSt/l = 1 ME

Radiologische Dosiseinheiten

Die Diskussion über Größen und Einheiten der radiologischen Dosimetrie ist gegenwärtig in vollem Gange. In den kommenden Jahren werden ziemlich sicher Neuerungen auf diesem Gebiete zu erwarten sein, sei es hinsichtlich einer erweiterten Definition des Röntgen oder der Einführung einer neuen massenspezifischen Ionisationseinheit. Wir halten uns im folgenden eng an den Report of the International Commission on Radiological Units and Measurements (ICRU) von 1956, der 1957 als *Handbook 62* des National Bureau of Standards, Washington, erschienen ist. Siehe auch *Röntgen- und Gammastrahlen in Medizin und Biologie; Regeln für die Dosimetrie*, DIN 6809 (Vornorm), Berlin (1958).

Einleitende Bemerkungen

Dem Arzt ist die Unterscheidung zwischen a) verabreichter (pharmakologischer) Dosis und b) resorbierter bzw. absorbierter «Dosis», und die Schwierigkeit, letztere zu bestimmen, bekannt; auch, daß c) verschiedene Medikamente mit gleichem Angriffspunkt gewichtsmäßig oft verschieden hoch zu dosieren sind, um gleiche Wirkung zu erhalten. Ähnliche Verhältnisse bestehen mutatis mutandis auf dem Gebiete der Radiologie*:

a) Die «verabreichte» Dosis wird als *Bestrahlungsdosis* (exposure dose) bezeichnet. Einheit ist das Röntgen. Es ist die in Luft absorbierte Dosis.

b) Einheit der absorbierten Dosis ist das Rad (radiation absorbed dose).

c) Das Äquivalent der relativen biologischen Wirkung verschiedener ionisierender Strahlenarten ist das RBE (relative biological effectiveness). Das Produkt RBE mal Rad, die der biologischen Wirkung einer Strahlenart äquivalente absorbierte Dosis, ist das Rem (rad equivalent man).

Röntgen und Rad sind internationale Einheiten, der Faktor RBE und das Rem gelten als «anerkannt» (recognized). Das Rem soll nur auf dem Gebiete des Strahlenschutzes verwendet werden.

1. Die Bestrahlungsdosis

Definition: *Die Bestrahlungsdosis einer Röntgen- oder Gammastrahlung an einem bestimmten Ort ist ein Maß, das sich auf das Ionisationsvermögen der Strahlung stützt.*

Internationale Einheit der Bestrahlungsdosis ist das Röntgen (r).

Definition: *Ein Röntgen ist eine solche Bestrahlungsdosis einer Röntgen- oder Gammastrahlung, daß die damit verbundene Korpuskularstrahlung je 0,001 293 g Luft in Luft Ionen erzeugt, die 1 elektrostatische Einheit der Elektrizitätsmenge eines (either) Vorzeichens tragen.*

0,001 293 g Luft ist die Masse von 1 cm^3 trockener atmosphärischer Luft unter Normbedingungen (0° C, 760 Torr). 1 elektrostatische Einheit der Elektrizitätsmenge wird üblicherweise elektrostatische Einheit der Ladung genannt (esE_{Ladung}) und entspricht $3{,}3356 \times 10^{-10}$ Coulomb (C).

Die Definition des Röntgen läßt sich meßtechnisch nur bei Elektronengleichgewicht realisieren. Man mißt es in Ionisationskammern, die so konstruiert sind, daß für das Meßvolumen Elektronengleichgewicht in Luft besteht (oder in solchen, die entsprechend kalibriert sind, zum Beispiel Fingerhutkammern). Die Aufrechterhaltung des Elektronengleichgewichts wird mit wachsender Strahlungsenergie immer schwieriger. Für Quantenenergien über 3 MeV ist das Röntgen deshalb aus meßtechnischen Gründen nicht mehr verwendbar.

Unter der Bedingung eines bestehenden Elektronengleichgewichtes kann das Röntgen physikalisch als eine auf eine Luftmasse bezogene Einheit der (Ionen-)Ladung dargestellt werden:

$$1\,\mathrm{r} = \frac{1 \text{ esE}}{0{,}001\,293 \text{ g Luft}} = \frac{773{,}40 \text{ esE}}{1 \text{ g Luft}} \triangleq \frac{2{,}5798 \times 10^{-4} \text{ C}}{1 \text{ kg Luft}} \qquad (2)$$

(bei Elektronengleichgewicht)

2. Die Bestrahlungsdosisleistung** (exposure dose rate)

Definition: *Die Bestrahlungsdosisleistung ist die Bestrahlungsdosis pro Zeiteinheit.*

Die Einheit der Bestrahlungsdosisleistung ist das Röntgen pro Zeiteinheit (die Röntgenleistung). Als Zeiteinheiten werden Sekunde, Minute, Stunde, aber auch Tag, Woche usw. verwendet.

Aus (2) ergibt sich bei Elektronengleichgewicht für die Röntgenleistung pro Sekunde

$$1\,\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}} \triangleq \frac{2{,}5798 \times 10^{-4} \text{ C/s}}{1 \text{ kg Luft}} = \frac{2{,}5798 \times 10^{-4} \text{ A}}{1 \text{ kg Luft}} \qquad (3)$$

Diese Stromstärke entspricht dem Ionisationsstrom, den 1 r/s pro Kilogramm Luft bei Elektronengleichgewicht zu unterhalten vermag.

---

1) International Union of Pure and Applied Physics, *Rep. 7th Gen. Ass. I.U.P.A.P.*, Kopenhagen (1951). 2) Internationale Radium-Standard-Kommission, *Phys. Z.*, **32**, 569 (1931). 3) Flamm und Mache, *S.-B. Akad. Wiss. Wien*, Abt. IIa, **121**, 227 (1912). 4) Flamm und Mache, *S.-B. Akad. Wiss. Wien*, Abt. IIa, **122**, 535 (1913). 5) Meyer, S., *S.-B. Akad. Wiss. Wien*, Abt. IIa, **138**, 557 (1929).

* Für das Vakuum verliert der Dosisbegriff seinen Sinn. Man kann dann nur noch vom Strahlungsfluß, Flux, oder der Intensität im streng physikalischen Sinn sprechen.

** «Leistung» ist hier im Sinne des üblichen Sprachgebrauchs und nicht im streng physikalischen Sinne (Arbeit pro Zeit) zu verstehen.

Umrechnung von Röntgenleistungen

Die gegebene Einheit unter **A** ist mit dem der gesuchten Einheit entsprechenden Faktor unter **B** zu multiplizieren.

A	B				
	mr/h	µr/s	r/h	r/min	r/s
mr/h	1 × 1	$2{,}\dot{7}\times10^{-1}$	1 $\times10^{-3}$	$1{,}\dot{6}\times10^{-5}$	$2{,}\dot{7}\times10^{-7}$
µr/s	$3{,}\dot{6}\times$ 1	1 × 1	$3{,}\dot{6}\times10^{-3}$	6 $\times10^{-5}$	1 $\times10^{-6}$
r/h	1 $\times10^{3}$	$2{,}\dot{7}\times10^{2}$	1 × 1	$1{,}\dot{6}\times10^{-2}$	$2{,}\dot{7}\times10^{-4}$
r/min	6 $\times10^{4}$	$1{,}\dot{6}\times10^{4}$	6 $\times10$	1 × 1	$1{,}\dot{6}\times10^{-2}$
r/s	$3{,}\dot{6}\times10^{6}$	1 $\times10^{6}$	$3{,}\dot{6}\times10^{3}$	6 $\times10$	1 × 1

3. Die spezifische Gammastrahlungsleistung*

(specific gamma-ray emission, specific gamma-ray output)

Definition: *Die spezifische Gammastrahlungsleistung eines radioaktiven Nuklids ist die Bestrahlungsdosisleistung, die durch die ungefilterte Gammastrahlung einer Punktquelle definierter Menge dieses Nuklids in definiertem Abstand von ihr erzeugt wird.*

Einheit der spezifischen Gammastrahlungsleistung ist das Röntgen pro Millicurie und Stunde (r/mch) in 1 cm Abstand.

Die spezifische Gammastrahlungsleistung eines Nuklids ist eine Materialkonstante und wird deshalb auch Dosiskonstante (I_γ) genannt. Aus ihr läßt sich die Röntgenleistung der Gammastrahlen eines Nuklids der Menge A im Abstand p berechnen:

$$\frac{\dot{r}}{h} = I_\gamma \frac{A}{p^2} \quad (A \text{ in Millicurie, } p \text{ in Zentimeter})$$

Dosiskonstante I_γ in Röntgen pro Millicurie und Stunde in 1 cm Abstand

Nuklid	Halbwertzeit T	Energie der γ-Strahlung MeV	I_γ r/mch in 1 cm Abstand	Literatur
^{22}Na	2,6 a	1,28	13	*1, 2*
^{24}Na	15 h	1,37; 2,76	18,7	*3*
^{42}K	12,5 h	1,53	1,5**	*5*
^{51}Cr	27,8 d	0,323	1,8	*6*
^{52}Mn	5,7 d	0,7; 0,9; 1,5	19,5	*6*
^{54}Mn	291 d	0,84	4,7	*1, 2*
^{56}Mn	2,58 h	2,06; 1,77; 0,822	9,4	*4*
^{59}Fe	45 d	1,3; 1,1; 0,19	6,2	*1, 2*
^{60}Co	5,25 a	1,33; 1,17	12,8 ± 0,1	*3, 7*
			13,0	*1, 2*
			13,5 ± 0,3	*7*
^{65}Zn	245 d	1,11	2,8	*1, 2*
^{74}As	17,5 d	0,635; 0,596; 0,511	5,1	*6*
^{76}As	26,8 h	1,70; 1,2; 0,55	2,3	*1, 2*
^{82}Br	36 h	0,55–1,48	14,6	*1, 2*
^{124}Sb	60 d	0,21–2,04	8,9	*1*
^{131}I	8 d	0,08 (0,3%); 0,284 (3%) 0,364 (79%); 0,368 (12,5%); 0,72 (5,2%)	2,2	*1, 2*
^{132}I	2,4 h	0,69; 1,41; 2,0	11,9	*1*
^{137}Cs	30 a	0,661	3,1	*1, 2*
^{170}Tm	129 d	0,084	0,4**	*1, 2*
^{182}Ta	112 d	0,066–1,223 (eff. 1,13)	6,1	*4*
^{192}Ir	74,4 d	0,136–0,613 (eff. 0,6)	5,0	*3*
^{198}Au	2,69 d	0,41; 0,67; 1,1	2,35	*6*
^{203}Hg	47,9 d	0,279	1,6	*6*
^{226}Ra	1600 a	13 Linien von 0,184 bis 2,45	8,25 ± 0,08*** 7,60 ± 0,05†	*8* *9*

Literatur: *1)* Berechnet nach dem Zerfallsschema und zitiert durch FAIRES und PARKS, *Radioisotope Laboratory Techniques*, London (1958), S. 40. *2)* Berechnet nach dem Zerfallsschema und zitiert durch PRICE et al., *Radiation Shielding*, London (1957), S. 305. *3)* Experimentell nach dem National Physical Laboratory Standards Committee (London). Vgl. PERRY, W. E., *Acta radiol. (Stockh.)*, Suppl. 117, 105 (1954). *4)* Nach RAJEWSKY, B., *Strahlendosis und Strahlenwirkung*, 2. Aufl., Stuttgart (1956), S. N13–N21. *5)* Berechnet nach dem Zerfallsschema und zitiert durch SINCLAIR, W. K., in: HINE und BROWNELL (Hrsg.), *Radiation Dosimetry*, New York (1956), S. 518. *6)* Berechnet nach dem Zerfallsschema und zitiert durch HINE, G. J., in: HINE und BROWNELL (Hrsg.), loc. cit., S. 899 und 903. *7)* Vgl. ROBINSON, B. W., *Acta radiol. (Stockh.)*, Suppl. 117, 71 (1954). *8)* GARRETT, C., *Canad. J. Phys.*, **36**, 149 (1958). *9)* LÜTHY, H., persönliche Mitteilung.

* «Leistung» ist hier im Sinne des üblichen Sprachgebrauchs und nicht im streng physikalischen Sinne (Arbeit pro Zeit) zu verstehen.

** In der Praxis wahrscheinlich viel höher, da die Bremsstrahlung (aus der β-Strahlung) in der Berechnung nicht berücksichtigt wurde.

*** Bei 0,5 mm Pt-Filterung. † Bei 1,0 mm Pt-Filterung.

Nachtrag: Auch bei betastrahlenden Nukliden kann die Röntgenleistung aus einer Dosiskonstante $I\beta$ berechnet werden. MAYNEORD und SINCLAIR, *Advanc. biol. med. Phys.*, **3**, 1 (1953), geben dafür folgende Werte

Dosiskonstante $I\beta$ = Röntgen pro Millicurie und Stunde in 1 cm Abstand in Abhängigkeit von der Energie der Betastrahlung

Energie der Strahlung MeV	$I\beta$ r/mch
0,3	616
0,5	477
0,7	420
1,0	355
2,0	318
10,0	372

4. Die absorbierte Dosis

Definition: *Die absorbierte Dosis irgendeiner ionisierenden Strahlung ist die Energie, die an Materie durch ionisierende Teilchen pro Masseneinheit des bestrahlten Stoffes an der interessierenden Stelle abgegeben wird.*

Die Einheit der absorbierten Dosis ist das Rad (rad), das seinerseits festgelegt ist als

$$1 \text{ rad} = \frac{100 \text{ erg}}{1 \text{ g}} = \frac{0{,}01 \text{ J}}{1 \text{ kg}} \qquad (4)$$

Bei Angaben in Rad sollte das absorbierende Medium genannt werden, zum Beispiel Rad (Luft), Rad (Gewebe) usw., wenn aus dem Begleittext nicht klar hervorgeht, um was es sich handelt.

Wie beim Röntgen ist die Rad-Leistung* definiert als Rad pro Zeiteinheit. Übliche Zeiteinheiten und Umrechnung siehe erste Tabelle in der linken Spalte.

Aus (4) ergibt sich

$$1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{100 \text{ erg/s}}{1 \text{ g}} = \frac{0{,}01 \text{ W}}{1 \text{ kg}} \qquad (5)$$

5. Die integrale absorbierte Dosis

Definition: *Die integrale absorbierte Dosis in einer bestimmten Region ist die Energie, die der Materie durch ionisierende Teilchen dieser Gegend abgegeben wurde.*

Die Einheit der integralen absorbierten Dosis ist das Grammrad (g rad) mit dem Wert von 100 erg = 10^{-5} J.

6. Beziehungen zwischen Bestrahlungsdosis und absorbierter Dosis bei Röntgen- und Gammastrahlen

Die absorbierte Dosis kann direkt nur mit größerem Aufwand kalorimetrisch gemessen werden. Seit den Anfängen der radiologischen Dosimetrie berechnet man deshalb die absorbierte Dosis indirekt auf Grund von Luftionisationsmessungen. Dies ist heute die häufigste indirekte Methode. Daneben bestehen noch andere, zum Beispiel radiochemische Methoden, die in der Zukunft vielleicht mehr zur Anwendung gelangen werden, weil sie im Bereiche höherer Quantenenergien verschiedene Vorzüge aufweisen.

a) Berechnung der absorbierten Dosis, wenn die Bestrahlungsdosis in Röntgen gemessen werden kann.

Dann gilt

$$D_{(M)} = f_{(M)} \times R$$

wobei M = interessierendes Medium

D = absorbierte Dosis in Rad

R = Anzahl der Röntgen, der das interessierende Medium ausgesetzt wurde

f = absorbierte Dosis in Rad pro 1 Röntgen

* Hier ist der Ausdruck «Leistung» auch physikalisch korrekt.

Faktor f = absorbierte Dosis in Rad pro 1 Röntgen für monochromatische Photonenstrahlung (nach ICRU-Report 1956)

Photonenenergie MeV	Faktor f für Luft*	Wasser	Muskel	Knochen
0,010	$0{,}87_7$	$0{,}92_0$	$0{,}93_8$	3,58
0,015	$0{,}87_7$	$0{,}89_7$	$0{,}92_5$	4,00
0,020	$0{,}87_7$	$0{,}88_7$	$0{,}92_5$	4,27
0,030	$0{,}87_7$	$0{,}87_7$	$0{,}91_9$	4,43
0,040	$0{,}87_7$	$0{,}88_7$	$0{,}92_8$	4,18
0,050	$0{,}87_7$	$0{,}90_0$	$0{,}93_4$	3,61
0,060	$0{,}87_7$	$0{,}91_3$	$0{,}93_7$	2,94
0,080	$0{,}87_7$	$0{,}94_0$	$0{,}94_8$	1,93
0,10	$0{,}87_7$	$0{,}95_7$	$0{,}95_7$	1,47
0,15	$0{,}87_7$	$0{,}97_1$	$0{,}96_4$	1,06
0,20	$0{,}87_7$	$0{,}98_2$	$0{,}97_2$	$0{,}98_8$
0,30	$0{,}87_7$	$0{,}97_7$	$0{,}96_5$	$0{,}94_7$
0,40	$0{,}87_7$	$0{,}97_5$	$0{,}96_3$	$0{,}93_6$
0,50	$0{,}87_7$	$0{,}97_4$	$0{,}96_2$	$0{,}93_3$
0,60	$0{,}87_7$	$0{,}97_5$	$0{,}96_2$	$0{,}93_3$
0,80	$0{,}87_7$	$0{,}97_4$	$0{,}96_5$	$0{,}92_9$
1,0	$0{,}87_7$	$0{,}97_4$	$0{,}96_5$	$0{,}92_7$
1,5	$0{,}87_7$	$0{,}97_3$	$0{,}96_6$	$0{,}92_9$
2,0	$0{,}87_7$	$0{,}97_4$	$0{,}96_8$	$0{,}92_9$
3,0	$0{,}87_7$	$0{,}97_1$	$0{,}96_3$	$0{,}93_7$

Faktor f = durchschnittliche absorbierte Dosis in Rad pro 1 Röntgen für verschiedene primäre Röntgenspektren (nach ICRU-Report 1956)

Strahlenqualität: Röhrenspannung kV	Filter mm	Halbwertschicht mm	Spektrum	Faktor f für Luft*	Wasser	Muskel	Knochen
100	0,18 Cu	0,25 Cu oder 5,5 Al	gemessen	$0{,}87_7$	0,91	0,94	3,10
100	wie oben	wie oben	berechnet[1]	$0{,}87_7$	0,91	0,94	3,13
150	0,075 Cu	0,2 Cu	berechnet[1]	$0{,}87_7$	0,92	0,94	2,69
200	0,20 Cu	0,5 Cu	berechnet[1]	$0{,}87_7$	0,94	0,95	2,05
250	0,17 Cu + 3,0 Al	1,0 Cu	berechnet[1]	$0{,}87_7$	0,95	0,95	1,76
250	0,9 Cu + 3,0 Al	2,0 Cu	berechnet[1]	$0{,}87_7$	0,96	0,96	1,42
280	...	1,7 Cu	gemessen	$0{,}87_7$	0,96	0,96	1,44
280	...	2,5 Cu	gemessen	$0{,}87_7$	0,97	0,96	1,22
280	...	3,1 Cu	gemessen	$0{,}87_7$	0,97	$0{,}96_5$	1,13
400	...	4,16 Cu	gemessen	$0{,}87_7$	0,97	0,97	1,11

b) Berechnung der absorbierten Dosis, wenn die Bestrahlungsdosis nicht in Röntgen gemessen werden kann.

In diesem Fall mißt man die Ionisation der Luft einer sehr kleinen, dünnwandigen** Hohlkammer, die an die interessierende Stelle innerhalb des Mediums placiert wird, für das die absorbierte Dosis zu bestimmen ist: BRAGG-GRAY-Prinzip[2].

Dann gilt $D_{(M)} = f'_{(M)} \times Q$

wobei M = interessierendes Medium
D = absorbierte Dosis in Rad
Q = Ladung in esE pro 0,001 293 g Luft
f' = absorbierte Dosis in Rad pro 1 esE

Faktor f' = absorbierte Dosis in Rad pro 1 esE (nach *Röntgen- und Gammastrahlen in Medizin und Biologie; Regeln für die Dosimetrie*, DIN 6809 [Vornorm], Berlin [1958])

Strahlenqualität: Röhrenspannung kV	Halbwertschicht mm Cu	Faktor f' für Luft*	Wasser	Weichteilgewebe**
150	0,2	$0{,}87_7$	1,03	1,02
200	0,5	$0{,}87_7$	1,03	1,02
250	1,0	$0{,}87_7$	1,03	1,01
280	1,7	$0{,}87_7$	1,03	1,01
400	4,2	$0{,}87_7$	1,02	1,01
15 000	...	$0{,}87_7$	0,98	0,96
Radioaktiver Stoff	Quantenenergie MeV			
^{137}Cs	0,67	$0{,}87_7$	1,02	1,00
^{60}Co	1,25	$0{,}87_7$	1,01	1,00

7. Die relative biologische Wirksamkeit (RBE, relative biological effectiveness)

a) Der Faktor RBE, symbolisiert mit η, wird verwendet, um die biologische Wirksamkeit gleichgroßer absorbierter Dosen zu kennzeichnen, die auf verschiedene Weise verabreicht wurden. Er bedeutet, daß m rad, die durch eine bestimmte Bestrahlungsprozedur geliefert wurden, eine biologische Wirksamkeit haben, die mit jener von $m\,\eta$ rad identisch ist, die von einer anderen Bestrahlungsprozedur geliefert wurden. Die Aussage, «die RBE einer α-Strahlung in bezug auf eine γ-Strahlung ist 10» bedeutet zum Beispiel, daß die biologische Wirksamkeit von m rad einer α-Strahlung identisch ist mit jener von 10 m rad einer γ-Strahlung.

Der Begriff der relativen biologischen Wirksamkeit ist von beschränkter Anwendbarkeit, weil die RBE irgendeiner Strahlung von vielen Faktoren beeinflußt wird. So kann die RBE zweier Strahlenarten im allgemeinen nicht durch einen einzigen Faktor ausgedrückt werden, sondern hängt von mehreren Unterfaktoren ab, wie Art und Grad der biologischen Schädigung (und damit auch Größe der absorbierten Dosis), Bestrahlungsdosisleistung, Fraktionierung, Sauerstoffspannung, pH und Temperatur.

b) Die RBE-Dosis. Sie ist numerisch gleich dem Produkt aus einer Rad-Dosis und einem vereinbarten konventionellen RBE-Wert in bezug auf eine bestimmte Bestrahlungsreaktion. Vergleichsstandard ist eine Röntgen- oder Gammastrahlung mit einer linearen Energieübertragung*** in Wasser von 3 keV/μm und einer Rad-Leistung von 10 rad/min.

Die Einheit der RBE-Dosis ist das Rem (rem, rad equivalent man). Es besitzt dieselbe beschränkte Anwendbarkeit wie die RBE und stützt sich darüber hinaus auf konventionelle, nicht unbedingt gemessene RBE-Werte. Es wird deshalb empfohlen, das Rem nur auf dem Gebiete des Strahlenschutzes zu verwenden, für Aussagen wie zum Beispiel «Die zulässige wöchentliche RBE-Körperdosis ist 0,3 rem, ohne Rücksicht auf die Strahlung, der eine Person ausgesetzt ist.»

Im Falle gemischter Strahlenarten wird angenommen, daß die RBE-Dosis gleich groß ist wie die Summe der Produkte aus absorbierter Dosis und RBE jeder einzelnen Strahlenart:

$$D = \Sigma D_i \times \eta_i$$

wobei D = RBE-Dosis in Rem
D_i = absorbierte Dosis in Rad aus der i-ten Strahlenart
η_i = RBE-Faktor für die i-te Strahlenart

Zur Verwendung auf dem Strahlenschutzgebiet werden folgende Richtwerte für den Faktor RBE empfohlen (nach RAJEWSKY, B., *Strahlendosis und Strahlenwirkung*, Stuttgart [1956]).

Strahlenart	RBE
Röntgen-, Gamma- und Betastrahlen bis 3 MeV ..	1
Alphastrahlen	20
Protonen und Deuteronen	10
Schnelle Neutronen	5
Schwere Rückstoßkerne	20

Ultraharte Röntgen- und Gammastrahlen über 1 MeV scheinen je nach Objekt und Reaktion um 15–30% weniger wirksam zu sein als Röntgenstrahlen von 200 kV.

* Der Faktor $0{,}87_7$ läßt sich aus dem Röntgen berechnen: 1 Ionenpaar trägt die elektrische Elementarladung $4{,}802\,73 \times 10^{-10}$ esE (vgl. Physikalische Konstanten, S. 207). 1 r produziert somit $2{,}082\,15 \times 10^9$ Ionenpaare in 0,001 293 g Luft oder $1{,}610\,32 \times 10^{12}$ Ionenpaare in 1 g Luft. Die erforderliche Energie zur Erzeugung eines Ionenpaares durch Elektronen in Luft beträgt nach ICRU-Report 1956 oberhalb 20 keV in einem weiten Bereich $34\ \text{eV} = 5{,}4469 \times 10^{-11}$ erg. Die Erzeugung von $1{,}610\,32 \times 10^{12}$ Ionenpaaren in 1 g Luft erfordert somit 87,712, also rund 88 erg, die von der Luft aus der Strahlung absorbiert werden. Diese Energie entspricht dem sogenannten *Energieäquivalent des Röntgen* und ist laut Definition des Rad gleich $0{,}87_7$ rad (Luft).

** Am besten aus mediumäquivalentem Material.

1) Berechnet nach KRAMERS, H. A., *Phil. Mag.*, **46**, 836 (1923).

2) HINE und BROWNELL (Hrsg.), *Radiation Dosimetry*, New York (1956).

* Siehe erste nebenstehende Fußnote.

** Der Faktor f' für Weichteilgewebe gilt auch für in Knochen eingebettetes Weichteilgewebe, da der Einfluß der Knochensubstanz schon bei der Messung der Ladung Q mit kleiner dünnwandiger Kammer berücksichtigt worden ist.

*** Linear energy transfer (LET).

Qualität und Definition	Einheiten	Symbol oder Abkürzung
Der **Lichtstrom** Φ ist die photometrisch bewertete Strahlungsleistung. Die Grundlage zur Bewertung sind die für das helladaptierte Auge festgelegte *relative spektrale Hellempfindlichkeit* (V_λ*) des Auges und das mechanische Lichtäquivalent (M**).	Lumen	lm
Die **Lichtmenge** Q ist das Produkt aus Lichtstrom und seiner Dauer.	Lumensekunde Lumenstunde	lms lmh
Die **Lichtstärke** I in einer bestimmten Ausstrahlungsrichtung ist das Verhältnis des in diese Richtung gestrahlten Lichtstromes zu der Größe des Raumwinkels, also der Lichtstrom der Raumwinkeleinheit. Die Einheit ist die *Candela**** (neue Kerze = etwa 1,086 alte oder Hefner-Kerze). Ein Strahler, der in jeder Richtung die Lichtstärke einer Kerze *(candela)* hat, gibt einen Lichtstrom von 4π lm.	Candela	cd
Die **Leuchtdichte** L in einem Punkt einer Oberfläche und in einer bestimmten Richtung ist das Verhältnis der in dieser Richtung vorhandenen Lichtstärke zu der Größe der senkrechten Projektion der strahlenden Fläche in dieser Richtung.	Stilb $\equiv$ cd/cm² Apostilb $\equiv$ sb/$10^4\pi$ Lambert $\equiv$ sb/$\pi \equiv 10^4$ asb	sb asb La
Die **Dunkelleuchtdichten**-Einheit ist im Gegensatz zu den obenerwähnten Einheiten auf das Dunkelsehen (Stäbchensehen) bezogen. Der Umrechnungsfaktor zwischen Hell- und Dunkeldichte ist von der Zusammensetzung der Strahlung abhängig. Verwendung findet die Einheit nur bis 10 sk.	Skot $= 10^{-3}$ asb für eine Strahlung bei der Farbtemperatur 2360° K	sk
Die **spezifische Lichtausstrahlung** H einer Fläche ist das Verhältnis des abgestrahlten Lichtstromes zur Größe der Fläche.	Phot † $\equiv$ lm/cm²	ph
Die **Beleuchtungsstärke** E ist das Verhältnis des auf eine Fläche A auffallenden Lichtstromes zur Größe der Fläche, $E = \Phi/A$, entspricht also der spezifischen Lichtausstrahlung, nur auf die auffallende Strahlung bezogen. Die Einheit 1 Lux ist vorhanden, wenn 1 lm auf 1 m² Fläche gleichmäßig verteilt ist.	Lux $\equiv$ lm/m²	lx
Analog zur Dunkelleuchtdichte ist die Einheit der **Dunkelbeleuchtungsstärke** auf das Dunkelsehen des menschlichen Auges bezogen.	Nox $= 10^{-3}$ lx für eine Strahlung bei der Farbtemperatur 2360° K	nx
Die **Belichtung** ist das Produkt aus Beleuchtungsstärke und ihrer Dauer.	Luxsekunde	lxs
Die **Lichtausbeute** einer Lichtquelle ist der Quotient aus dem abgegebenen Gesamtlichtstrom und der aufgenommenen Leistung.	Lumen/Watt	lm/W

* Die relative spektrale Augenempfindlichkeit V_λ wird durch folgende international anerkannte und verwendete Werte charakterisiert (λ = Wellenlänge des Lichtes in Nanometer [Millimikron], V_λ = relative spektrale Augenempfindlichkeit):

λ	V_λ	λ	V_λ	λ	V_λ	λ	V_λ	λ	V_λ	λ	V_λ	λ	V_λ	λ	V_λ	λ	V_λ	λ	V_λ
400	0,0004	440	0,023	480	0,139	520	0,710	555	1,000	590	0,757	630	0,265	670	0,032	710	0,0021	750	0,00012
410	0,0012	450	0,038	490	0,208	530	0,862	560	0,995	600	0,631	640	0,175	680	0,017	720	0,00105	760	0,00006
420	0,0040	460	0,060	500	0,323	540	0,954	570	0,952	610	0,503	650	0,107	690	0,0082	730	0,00052		
430	0,0116	470	0,091	510	0,503	550	0,995	580	0,870	620	0,381	660	0,061	700	0,0041	740	0,00025		

** Das mechanische oder elektrische Lichtäquivalent M berechnet sich für das auf der Candela basierende Lumen zu $M = 1{,}46_7 \pm 0{,}010) \times 10^{-3}$ J $\times$ (sec $\times$ lm)$^{-1}$ = $(1{,}46_7 \pm 0{,}010) \times 10^{-3}$ W/lm oder $1/M = (680 \pm 5)$ lm/W. Das neue Lumen entspricht demnach einer Strahlungsleistung von 0,00146 W.

*** Die Candela ist definiert durch die Festsetzung, daß die Leuchtdichte L eines schwarzen Strahlers bei der Temperatur des erstarrenden Platins 60 cd je Quadratzentimeter betragen soll.

† Das Phot wird vielfach anstatt als Einheit für die spezifische Lichtausstrahlung laut Definition als Einheit für die Beleuchtungsstärke benutzt. 1 ph ist dann = 10^4 lx.

Qualität und Definition	Dimension	Einheiten	
		MKS-Äquivalent	CGS-Äquivalent
Schallgeschwindigkeit Sie ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Schallschwingung in einem Medium fortpflanzt; im hörbaren Gebiet ist sie für alle Frequenzen gleich. In Gasen und Flüssigkeiten breitet sich der Schall als Longitudinalwelle aus; in festen Körpern können Longitudinal- und Transversalwellen auftreten.	LT^{-1}	$m\,s^{-1}$	$cm\,s^{-1}$
Schallfrequenz oder Tonfrequenz Sie ist die Zahl der Schallschwingungen je Zeiteinheit.	T^{-1}	Hz	Hz
Wellenlänge Sie ist gleich Schallgeschwindigkeit dividiert durch die Schallfrequenz.	L	m	cm
Schalldruck Er ist der durch die Schallschwingung erzeugte Wechseldruck.	$L^{-1}MT^{-2}$	$N\,m^{-2}$	$dyn\,cm^{-2}(\equiv \mu b)$
Schallintensität oder -stärke Sie ist an einem Orte die Schallenergie, die durch die Flächeneinheit je Zeiteinheit fließt.	MT^{-3}	$W\,m^{-2}$	$erg\,s^{-1}\,cm^{-2}$
Schalleistung Sie ist die in der Zeiteinheit durch eine die Schallquelle umhüllende Fläche strömende Schallenergie.	L^2MT^{-3}	W	$erg\,s^{-1}$
Lautstärke	1	Phon	Phon
Relative Lautstärke Dämpfung, Lautstärkezunahme	1	Dezibel (db)	Dezibel (db)

Die **Lautstärke** wird definiert als die durch einen gegebenen Schalldruck erzeugte Schallempfindung («gehörter» Schalldruck). Da die Hörempfindlichkeit frequenzabhängig ist (maximale Empfindlichkeit bei etwa 1000–2000 Hz), erzeugen Töne gleichen Schalldruckes, aber ungleicher Frequenz, nicht die gleiche Lautstärke. Die Hörempfindlichkeitskurve verläuft bei hohen Schalldrucken flacher als bei niedrigen.

Die Lautstärke (L) wird gemessen als Verhältnis eines vorliegenden Schalldruckes (p) zum festgelegten Schalldruck eines an der Hörschwelle liegenden Tones von 1000 Hz ($p_0 = 2\times10^{-4}$ µb). Wegen der Gültigkeit des WEBER-FECHNERschen Gesetzes (logarithmische Abhängigkeit der subjektiven Gehörsempfindung von der objektiven Reizstärke) wird die Lautstärke nicht direkt als Verhältnis p/p_0, sondern als der 20fache Logarithmus dieses Quotienten angegeben und mit Phon bezeichnet:

$L_{\text{Phon}} = 20\ {}^{10}\log\ p$ (in µb)$/2\times10^{-4}$ µb. Die Phonskala stellt demnach eine logarithmische Skala dimensionsloser Verhältniszahlen dar. Da der Nenner des Quotienten (= Schalldruck der Hörschwelle $= 2\times10^{-4}$ µb) und damit auch die Phonskala fixiert sind, wird durch die Lautstärkeangabe in Phon auch der entsprechende Schalldruck festgelegt:

$$x\,\text{Phon} \triangleq 0{,}0002\times10^{0{,}05x}\ \mu b$$

Das menschliche Ohr kann einen Schalldruckumfang von etwa 630 µb (Schmerzgrenze) bis zu 0,0002 µb (Hörschwelle) verarbeiten, was einem Schalldruckverhältnis von $10^{6{,}5} : 10$ oder einem Schallintensitätsverhältnis von $10^{13} : 10$ oder 130 Phon entspricht:

Phon	entsprechen Mikrobar (µb)	entsprechen Geräusch	Phon	entsprechen Mikrobar (µb)	entsprechen Geräusch
0	$0{,}0002\times10^{0} = 0{,}0002$	Hörschwelle	70	$0{,}0002\times10^{3{,}5} = 0{,}6324$	Straßenverkehr auf belebten Plätzen
1	$0{,}0002\times10^{0{,}05} = 0{,}0002244$		80	$0{,}0002\times10^{4} = 2$	starker Straßenverkehr
10	$0{,}0002\times10^{0{,}5} = 0{,}0006324$	leises Flüstern, Taschenuhrticken	90	$0{,}0002\times10^{4{,}5} = 6{,}324$	Motorrad mit Schalldämpfer
20	$0{,}0002\times10^{1} = 0{,}002$	Geräuschspiegel einer ruhigen Wohnung	100	$0{,}0002\times10^{5} = 20$	lauteste Autohupe
			110	$0{,}0002\times10^{5{,}5} = 63{,}24$	Blechschmiede
30	$0{,}0002\times10^{1{,}5} = 0{,}006324$	Rauschen von Bäumen, stille Straße	120	$0{,}0002\times10^{6} = 200$	Flugzeugpropeller, Nierthämmer
40	$0{,}0002\times10^{2} = 0{,}02$	Zerreißen von Schreibpapier	130	$0{,}0002\times10^{6{,}5} = 632{,}4$	Schmerzgrenze
50	$0{,}0002\times10^{2{,}5} = 0{,}06324$	Unterhaltungssprache			
60	$0{,}0002\times10^{3} = 0{,}2$	Straßenbahn			

Für **relative Lautstärkeangaben** dient das **Dezibel** (db), das wie das Phon den 20fachen Logarithmus einer dimensionslosen Verhältniszahl zweier zu vergleichender Schalldrucke darstellt, wobei aber der Nenner des Quotienten und damit die Dezibelskala nicht fixiert sind: $L_{\text{db}} = 20\ {}^{10}\log\ p/p_1$ (p_1 = Ausgangsschalldruck, p = zu vergleichender Schalldruck). Die Zu- oder Abnahme der Lautstärke, ausgedrückt in Dezibel, ist demnach: $\pm x\,\text{db} = 10 \pm {}^{0{,}05x}$. Beispiel: eine Zunahme des Schalldruckes von p_1 auf $p = 10^{0{,}05}\,p_1$ entspricht einer Lautstärkezunahme von + 1 db, eine Schalldruckabnahme von p_1 auf $p = 10^{-1}\,p_1$ einer Lautstärkeabnahme von — 20 db.

Tonskalen

Entsprechend dem musikalischen Empfinden des Menschen sind die Tonskalen nach bestimmten Frequenzverhältnissen der Töne aufgebaut. Die wichtigsten Tonintervalle sind nach Konsonanz und Dissonanz geordnet:

Konsonante Tonintervalle	Frequenzverhältnis	Dissonante Tonintervalle	Frequenzverhältnis
Duodezime	3 : 1	Große Septime	15 : 8
Oktave	2 : 1	Kleine Septime	9 : 5
Große Sexte	5 : 3	Kleine Sexte	8 : 5
Quinte	3 : 2	Großer Ganzton	9 : 8
Quarte	4 : 3	Kleiner Ganzton	10 : 9
Große Terz	5 : 4	Großer Halbton	16 : 15
Kleine Terz	6 : 5	Kleiner Halbton	25 : 24
Unisono	1 : 1		

Die Grenze zwischen Konsonanz und Dissonanz ist fließend und hat die Tendenz, sich mit der Zeit zugunsten solcher Intervalle zu verschieben, die früher als dissonant empfunden wurden, zum Beispiel kleine Sexte und kleine Septime.

Nach dem Aufbau der Tonskalen unterscheidet man die *diatonischen* und die *chromatischen* Tonskalen. Bei der diatonischen Dur- bzw. Mollskala sind 7 Töne ungleichteilig über das Oktavintervall verteilt:

Diatonische Durskala

Tonintervall	Tonsymbol	Frequenzverhältnis
Prime	c	1
Sekunde	d	10 : 9
Große Terz	e	5 : 4
Quarte	f	4 : 3
Quinte	g	3 : 2
Große Sexte	a	5 : 3
Große Septime	h	15 : 8
Oktave	c′	2

Diatonische Mollskala

Tonintervall	Tonsymbol	Frequenzverhältnis
Prime	c	1
Sekunde	d	10 : 9
Kleine Terz	es	6 : 5
Quarte	f	4 : 3
Quinte	g	3 : 2
Kleine Sexte	as	8 : 5
Kleine Septime	b	9 : 5
Oktave	c′	2

Bei der chromatischen Tonskala sind 12 Halbtöne gleichteilig (= temperierte Stimmung) über das Oktavintervall verteilt, wobei jeder Halbton die $\sqrt[12]{2}$fache Frequenz des vorhergehenden hat:

Gleichteilig temperierte Stimmung

Tonsymbol	Frequenzverhältnis	Tonsymbol	Frequenzverhältnis
c	1	g	$2^{7/12}$
cis = des	$2^{1/12}$	as = gis	$2^{8/12}$
d	$2^{2/12}$	a	$2^{9/12}$
dis = es	$2^{3/12}$	b = ais	$2^{10/12}$
e = fes	$2^{4/12}$	h = ces′	$2^{11/12}$
f = eis	$2^{5/12}$	c′ = his	$2^{12/12}$
fis = ges	$2^{6/12}$		

Diese Einteilungen der Tonskalen gelten für jeden beliebigen Oktavenbereich und sind vom Absolutwert des Grundtones der Skala unabhängig. Bei der physikalischen Stimmung wird die Tonskala durch die Frequenz des einfach gestrichenen c (c′ oder c^1) $= 2^4 \times 16$ Hz $= 256$ Hz bestimmt.

Die 12stufig gleichteilig temperierte Stimmung wird vom einfach gestrichenen a (a′ oder a^1) aus bestimmt. Von 1859 bis 1939 galt als normal der französische Kammerton a′ = 435 Hz, dessen Frequenz von der Wiener Stimmtonkonferenz 1885 festgesetzt wurde. 1939 definierte der zwischenstaatliche akustische Ausschuß der ISA in London den Normstimmton auf 440 Hz. Die Schwingungszahlen der heute international gültigen 12stufig gleichteilig temperierten Stimmung sind demnach:

Schwingungszahlen der 12stufigen gleichteilig temperierten Stimmung, $a^1 \equiv 440{,}0$ Hz

		c^{-3}	c^{-2}	c^{-1}	c^0	c^1	c^2	c^3	c^4	Quotienten
	c	16,35	32,70	65,41	130,81	261,63	523,25	1046,50	2093,00	1,00000
c♯	d♭	17,32	34,65	69,30	138,59	277,18	554,37	1108,73	2217,46	$\sqrt[12]{2} = 1{,}05946$
	d	18,35	36,71	73,42	146,83	293,66	587,33	1174,66	2349,32	$\sqrt[12]{2^2} = 1{,}12246$
d♯	e♭	19,45	38,89	77,78	155,56	311,13	622,25	1244,51	2489,02	$\sqrt[12]{2^3} = 1{,}18921$
	e	20,60	41,20	82,41	164,81	329,63	659,26	1318,51	2637,02	$\sqrt[12]{2^4} = 1{,}25992$
	f	21,83	43,65	87,31	174,61	349,23	689,46	1396,91	2793,83	$\sqrt[12]{2^5} = 1{,}33484$
f♯	g♭	23,12	46,25	92,50	185,00	369,99	739,99	1479,98	2959,96	$\sqrt[12]{2^6} = 1{,}41421$
	g	24,50	49,00	98,00	196,00	392,00	783,99	1567,98	3135,96	$\sqrt[12]{2^7} = 1{,}49831$
g♯	a♭	25,96	51,91	103,83	207,65	415,30	830,61	1661,22	3322,44	$\sqrt[12]{2^8} = 1{,}58740$
	a	27,50	55,00	110,00	220,00	440,00	880,00	1760,00	3520,00	$\sqrt[12]{2^9} = 1{,}68179$
a♯	h♭	29,14	58,27	116,54	233,08	466,16	932,33	1864,66	3729,31	$\sqrt[12]{2^{10}} = 1{,}78180$
	h	30,87	61,74	123,47	246,94	493,88	987,77	1975,53	3951,07	$\sqrt[12]{2^{11}} = 1{,}88775$
										$(^{10}\log \sqrt[12]{2} = 0{,}0250\,8583\,2972)$

$c^{-3} = C_2$ = Subkontraoktave; $c^{-2} = C_1$ = Kontraoktave; $c^{-1} = C$ = große Oktave; $c^0 = c$ = kleine Oktave; $c^1 = c'$ = eingestrichene Oktave; $c^2 = c''$ = zweigestrichene Oktave usw. Den ganzen Tonumfang c^{-3} bis c^5 (c^5 = Frequenz 4186,0) umfaßt nur die Orgel.

Individuelle chemische Masseneinheiten

Masse von L Molekülen bzw. Atomen eines chemisch homogenen Stoffes

(L = Loschmidtsche Zahl*)

Sie ist gleich Molekular- bzw. Atomgewicht des betrachteten Stoffes mal Masseneinheit
Dimension in den LMT-Systemen = M

Einheiten in den dazugehörenden Maßsystemen:

CGS-System**: Mol (mol) ≡ (Molekular- bzw. Atomgewicht des betrachteten Stoffes) × Gramm
MKS-System**: Kilomol (kmol) ≡ (Molekular- bzw. Atomgewicht des betrachteten Stoffes) × Kilogramm
1 mol ≡ 10^{-3} kmol ≡ 10^{3} mmol ≡ 10^{6} μmol; 1 kmol ≡ 10^{3} mol ≡ 10^{6} mmol ≡ 10^{9} μmol

Auf Grund des Unterschiedes zwischen physikalischer und chemischer Atomgewichtsskala ergeben sich zwei leicht differierende Mol:

Mol Chemische Skala	entspricht der Masse von L Molekülen bzw. Atomen*, L =	ist gleich Mol Physikalische Skala	entspricht der Masse von L Molekülen bzw. Atomen*, L =
1 mol Ch.Sk.	$6{,}0234 \times 10^{23}$	1,000275 mol Ph.Sk.	$6{,}0250 \times 10^{23}$
1 kmol Ch.Sk.	$6{,}0234 \times 10^{26}$	1,000275 kmol Ph.Sk.	$6{,}0250 \times 10^{26}$

Masse von L/z Ionen eines chemisch homogenen Stoffes

(L = Loschmidtsche Zahl*, z = Wertigkeit der betrachteten Ionen)

Sie ist gleich [(Molekular- bzw. Atomgewicht der betrachteten Ionen)/Wertigkeit] mal Masseneinheit
Dimension in den LMT-Systemen = M

Einheiten in den dazugehörenden Maßsystemen:

CGS-System: Grammäquivalent oder Äquivalent (val***; englisch Eq oder equ. oder equiv. oder g. equiv.)
≡ (Molekular- bzw. Atomgewicht der betrachteten Ionen/Wertigkeit) × Gramm ≡ Mol/Wertigkeit

MKS-System: Kilogrammäquivalent (kval) ≡ (Molekular- bzw. Atomgewicht der betrachteten Ionen/Wertigkeit) × Kilogramm ≡ Kilomol/Wertigkeit

1 val ≡ 10^{-3} kval ≡ 10^{3} mval; 1 kval ≡ 10^{3} val ≡ 10^{6} mval (englisch mEq oder m. equ. oder m. equiv.)

Auf Grund des Unterschiedes zwischen physikalischer und chemischer Atomgewichtsskala ergeben sich zwei leicht differierende Äquivalente:

Äquivalent Chemische Skala	ist Träger einer elektrischen Ladung von†	ist gleich Äquivalent Physikalische Skala	ist Träger einer elektrischen Ladung von†
1 val Ch.Sk.	$9{,}6495 \times 10^{4}$ C ≙ $2{,}8929 \times 10^{14}$ esE	1,000275 val Ph.Sk.	$9{,}6522 \times 10^{4}$ C ≙ $2{,}8937 \times 10^{14}$ esE
1 kval Ch.Sk.	$9{,}6495 \times 10^{7}$ C ≙ $2{,}8929 \times 10^{17}$ esE	1,000275 kval Ph.Sk.	$9{,}6522 \times 10^{7}$ C ≙ $2{,}8937 \times 10^{17}$ esE

* Die Loschmidtsche Zahl L ist der Zahlenwert der Loschmidtschen Konstante N. In den angelsächsischen Ländern wird sie Avogadrosche Zahl genannt, unter der man im deutschen Sprachbereich die in 1 cm³ enthaltene Zahl von Molekülen eines idealen Gases im Normzustand versteht (vgl. physikalische Konstanten, S. 207).

** Für das Mol wird auch die Bezeichnung Grammol verwendet. Als Mol bzw. Kilomol-Einheit für Atome ist auch die Bezeichnung Grammatom (g-atom bzw. Kilogrammatom (kg-atom) gebräuchlich.

*** Für das Grammäquivalent (val) ist auch die Bezeichnung Grammval gebräuchlich.

† Diese Ladung wird Faraday-Ladung genannt.

Chemische Bezugseinheiten

Masse/Masse

Bezeichnung	Symbol	Definition
		Feste Stoffe
Masseprozent	% (Gew.%)	Gramm des Stoffes in 100 g Gesamtmasse
Milligrammprozent*	mg%	Milligramm des Stoffes in 100 g Gesamtmasse*
Molprozent	mol%	Vor allem bei Angaben isomorpher Mischungen, Schmelzen usw.
		Lösungen
Masseprozent	% (Gew.%)	Gramm des gelösten Stoffes in 100 g Lösung
	g/100 g Lm.	Gramm des gelösten Stoffes in 100 g Lösungsmittel
	mg%	Milligramm des gelösten Stoffes in 100 g Lösung*
	mol/100 g Lös. g-atom/100 g Lös. val/100 g Lös. usw.	Mol bzw. Grammatom bzw. Grammäquivalent des gelösten Stoffes auf 100 g Lösung usw.
	mol/100 g Lm. g-atom/100 g Lm. val/100 g Lm. usw.	Mol bzw. Grammatom bzw. Grammäquivalent des gelösten Stoffes auf 100 g Lösungsmittel usw.
Molal	mol/1000 g Lm.	Mol / Grammatom des betrachteten Stoffes in 1000 g Lösungsmittel
Molverhältnis	mol%	Mol des gelösten Stoffes auf 100 ml Lösung
	mol‰	Millimol des gelösten Stoffes auf 1 mol bzw. Mol des gelösten Stoffes auf 1000 mol Lösung
	mol/100 mol Lm.	Mol des gelösten Stoffes auf 100 mol Lösungsmittel
	mol/1000 mol Lm.	Mol des gelösten Stoffes auf 1000 mol Lösungsmittel
Verdünnung	g Lm./1 g gel.	Gramm Lösungsmittel auf 1 g gelösten Stoff
	mol Lm./1 mol gel.	Mol Lösungsmittel auf 1 mol gelösten Stoff
		Gase
Masseprozent	% (Gew.%)	Gramm des betrachteten Gases in 100 g der Gasmischung
Molprozent	mol%	Mol des betrachteten Gases in 100 mol aller Komponenten

Masse/Volumen**

		Lösungen
	g/100 ml Lös.	Gramm des gelösten Stoffes in 100 ml Lösung
	mg%	Milligramm des gelösten Stoffes in 100 ml Lösung*
	g/l	Gramm des gelösten Stoffes in 1 Liter Lösung
	g/100 ml	Gramm des gelösten Stoffes in 100 ml Lösung
	g/100 ml Lm.	Gramm des gelösten Stoffes in 100 ml Lösungsmittel
Molar	mol/l	Mol / Grammatom des betrachteten Stoffes in 1 Liter Lösung
	g-atom/l	
Normal	n (engl. N) val/l	Grammäquivalent des gelösten Stoffes in 1 Liter Lösung (0,1 n, 0,01 n usw.)

Volumen/Volumen

Volumenprozent	Vol.%	Milliliter des gelösten Stoffes in 100 ml Lösung oder Kubikzentimeter Gas in 100 ml Lösung oder Kubikzentimeter Gas in 100 cm^3 Gasmischung

* Das Milligrammprozent ist insofern eine unglückliche Bezeichnung, als 1 Tausendstel auf Hundert kein Prozent ist. In der medizinischen Literatur wird das Milligrammprozent zudem als mg/100 g und als mg/100 ml (besonders bei Blut, Harn usw.) verwendet, ohne daß in den einzelnen Fällen diese Bezugnahme präzisiert würde. Um diese Unklarheit zu vermeiden, wird die Bezeichnung Milligrammprozent in unseren Tabellen konsequent durch mg/100 g oder mg/100 ml ersetzt.

** Temperaturabhängig.

Literatur zu diesem Abschnitt siehe S. 208

I. Standardsubstanzen

A. Quecksilber

Normdichte[1] (0°C, 760 Torr)

$$\varrho_n(\mathrm{Hg}) = (13{,}595\,05 \pm 0{,}000\,14)\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$$

Festgelegte Normdichte[1, 28] der internationalen Temperaturskalen 1927 und 1948 (0°C, 760 Torr)

$$\varrho_n(\mathrm{Hg}) = 13{,}595\mathbf{1}\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$$

Relative Dichte[1] zu Wasser («spezifisches» Gewicht)

$$\delta_n(\mathrm{Hg}) = 13{,}595\,43 \pm 0{,}000\,10$$

B. Wasser

Maximale Dichte[2] (4°C, 760 Torr, luftfrei)

$$\varrho_m(\mathrm{H_2O}) = \mathbf{1}\ \mathrm{g/ml} = (0{,}999\,972 \pm 0{,}000\,003)\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$$

Dichte[3] zwischen 0 und 40°C in g/ml (760 Torr, luftfrei)

°C	g/ml	°C	g/ml	°C	g/ml	°C	g/ml	°C	g/ml
0	0,9998676	3	0,9999922	6	0,9999683	9	0,9998092	12	0,9995261
1	0,9999265	4	1,**0**	7	0,9999297	10	0,9997281	13	0,9994059
2	0,9999678	5	0,9999919	8	0,9998765	11	0,9996336	14	0,9992732

°C	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
15	0,999 1286	1134	0982	0828	0674	0518	0360	0202	0043	9882*
16	0,998 9721	9558	9394	9229	9062	8895	8726	8557	8386	8214
17	0,998 8041	7867	7691	7515	7337	7158	6979	6798	6616	6433
18	0,998 6248	6063	5877	5689	5501	5311	5120	4928	4735	4541
19	0,998 4346	4150	3953	3754	3555	3355	3153	2950	2747	2542
20	0,998 2336	2130	1922	1713	1503	1292	1080	0867	0653	0438
21	0,998 0221	0004	9786*	9567*	9346*	9125*	8903*	8679*	8455*	8230*
22	0,997 8003	7776	7547	7318	7088	6856	6624	6390	6156	5921
23	0,997 5684	5447	5208	4969	4729	4487	4245	4002	3758	3512
24	0,997 3266	3019	2771	2522	2272	2021	1769	1516	1262	1007
25	0,997 0751	0494	0237	9978*	9718*	9458*	9196*	8934*	8671*	8406*

°C	g/ml	°C	g/ml	°C	g/ml	°C	g/ml	°C	g/ml
26	0,9968141	29	0,9959757	32	0,9950575	35	0,9940635	38	0,9929970
27	0,9965437	30	0,9956783	33	0,9947344	36	0,9937159	39	0,9926260
28	0,9962642	31	0,9953722	34	0,9944030	37	0,9933604	40	0,9922473

Dichte des schweren Wassers (100% D_2O, 760 Torr, luftfrei)

°C	g/ml	Literatur	Bemerkungen
3,8	1,105 33	*3*	
5	1,105 49	*3*	
10	1,105 88	*3*	
11,23	1,105 96	*4*	maximale Dichte
15	1,105 77	*3*	
20	1,105 27	*3*	
25	1,104 37	*5*	
30	1,103 15	*5*	
35	1,101 67	*5*	
40	1,099 89	*5*	

Spezifische Wasserwärme[6] zwischen 0 und 100°C (bei 760 Torr)

$\mathrm{J\,g^{-1}\,grd^{-1}}$

°C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	4,2174	4,2138	4,2104	4,2074	4,2048	4,2019	4,1996	4,1974	4,1954	4,1936
10	4,1919	4,1904	4,1890	4,1877	4,1866	4,1855	4,1846	4,1837	4,1829	4,1822
20	4,1816	4,1810	4,1805	4,1801	4,1797	4,1793	4,1790	4,1787	4,1785	4,1783
30	4,1782	4,1781	4,1780	4,1780	4,1779	4,1779	4,1780	4,1780	4,1781	4,1782
40	4,1783	4,1784	4,1786	4,1788	4,1789	4,1792	4,1794	4,1796	4,1799	4,1801
50	4,1804	4,1807	4,1811	4,1814	4,1817	4,1821	4,1825	4,1829	4,1833	4,1837
60	4,1841	4,1846	4,1850	4,1855	4,1860	4,1865	4,1871	4,1876	4,1882	4,1887
70	4,1893	4,1899	4,1905	4,1912	4,1918	4,1925	4,1932	4,1939	4,1946	4,1954
80	4,1961	4,1969	4,1977	4,1985	4,1994	4,2002	4,2011	4,2020	4,2029	4,2039
90	4,2048	4,2058	4,2068	4,2078	4,2089	4,2100	4,2111	4,2122	4,2133	4,2145
100	4,2156									

$\mathrm{cal_{15}\,g^{-1}\,grd^{-1}}$ (berechnet nach *6*) durch den Herausgeber)

°C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1, *0*,	1, *0*,	1, *0*,	1, *0*,	1, *0*,	1, *0*,	1, *0*,	1, *0*,	1, *0*,	1, *0*,
0	007 62	006 76	005 95	005 23	004 54	003 92	003 37	002 84	002 37	001 94
10	001 53	001 17	000 84	000 53	000 26	000 00	*999 78*	*999 57*	*999 38*	*999 21*
20	*999 07*	*998 92*	*998 81*	*998 71*	*998 61*	*998 52*	*998 45*	*998 38*	*998 33*	*998 28*
30	*998 26*	*998 23*	*998 21*	*998 21*	*998 18*	*998 18*	*998 21*	*998 21*	*998 23*	*998 26*
40	*998 28*	*998 30*	*998 35*	*998 40*	*998 42*	*998 49*	*998 54*	*998 59*	*998 66*	*998 71*
50	*998 78*	*998 85*	*998 95*	*999 02*	*999 09*	*999 19*	*999 28*	*999 38*	*999 47*	*999 57*
60	*999 67*	*999 78*	*999 88*	000 00	000 12	000 24	000 38	000 50	000 65	000 76
70	000 91	001 05	001 19	001 36	001 51	001 67	001 84	002 01	002 17	002 37
80	002 53	002 72	002 91	003 11	003 32	003 51	003 73	003 94	004 16	004 40
90	004 61	004 85	005 09	005 33	005 59	005 85	006 12	006 38	006 64	006 93
100	007 19									

Eis-, Tripel- und Dampfpunkt vgl. S. 182. Dampfdruck vgl. S. 259–261.

C. Luft

Normdichte kohlensäurefreier, trockener Luft[7] (0°C, 760 Torr)

$$\varrho_n(\mathrm{Luft}) = 1{,}292\,84\ \mathrm{g/l}$$

Normbedingungen der spektroskopischen «Normal»luft:
760 Torr, 15°C, 0,03% CO_2, trocken

Normalatmosphäre OACI vgl. S. 255.

Für Höhen über 25 km wurden als vorläufige Werte publiziert[8]:

m′	km	Torr	mb	°C
25 000	25,099	$1{,}8666 \times 10$	$2{,}4886 \times 10$	— 56,5
32 000	32,162	6,5087	8,6776	— 35,5
47 000	47,350	$9{,}0337 \times 10^{-1}$	1,2044	+ 9,5
53 000	53,446	$4{,}3744 \times 10^{-1}$	$5{,}8320 \times 10^{-1}$	+ 9,5
75 000	75,895	$1{,}8392 \times 10^{-2}$	$2{,}4521 \times 10^{-2}$	— 76,3
90 000	91,294	$1{,}3617 \times 10^{-3}$	$1{,}8154 \times 10^{-3}$	— 76,3
126 000	128,548	$1{,}0883 \times 10^{-5}$	$1{,}4510 \times 10^{-5}$	+ 5,72
175 000	179,954	$4{,}6425 \times 10^{-7}$	$6{,}1895 \times 10^{-7}$	+ 412,97
300 000	314,859	$1{,}0856 \times 10^{-8}$	$1{,}4473 \times 10^{-8}$	+ 751,51

m′ = Geopotentialhöhe (vgl. S. 255), km = Höhe über Meer, Torr und mb = Luftdruck, °C = reale kinetische Temperatur.

II. Erde

A. Fallbeschleunigung

Normfallbeschleunigung[9] $g_n = 980{,}66\mathbf{5}\ \mathrm{Gal\ (cm\ s^{-2})}$

Internationale Schwereformel[10–14] (in Übereinstimmung mit dem internationalen Erdellipsoid)

$\gamma_0 = (980{,}632272 - 2{,}586145\cos 2B + 0{,}002878\cos 4B - 0{,}000004\cos 6B)\ \mathrm{Gal}$

wobei γ_0 = Fallbeschleunigung in Meereshöhe, B = Breitengrad. Daraus ergeben sich für die verschiedenen Breitengrade folgende Werte (berechnet durch den Herausgeber):

Breite °	γ_0 Gal	γ_0/g_n	g_n/γ_0	Breite °	γ_0 Gal	γ_0/g_n	g_n/γ_0
0	978,0490	0,997 332	1,002 675	45	980,6294	0,999 964	1,000 036
5	0881	372	635	46	7196	1,000 056	0,999 944
10	2043	491	516	47	8098	148	852
15	3940	684	321	48	8998	239	761
20	6517	947	057	49	9894	331	669
25	9694	0,998 271	1,001 732	50	981,0787	1,000 422	0,999 578
30	979,3378	0,998 647	1,001 355	51	1673	512	488
31	4165	727	275	52	2554	602	398
32	4968	809	193	53	3427	691	309
33	5785	892	109	54	4291	779	221
34	6614	977	025	55	981,5146	1,000 866	0,999 134
35	979,7456	0,999 062	1,000 938	56	5990	952	048
36	8308	149	851	57	6822	1,001 037	0,998 964
37	9170	237	763	58	7642	121	880
38	980,0041	326	674	59	8448	203	798
39	0920	416	585	60	981,9239	1,001 284	0,998 718
40	980,1805	0,999 506	1,000 494	65	982,2941	661	342
41	2696	597	403	70	6139	987	017
42	3591	688	312	75	8734	1,002 252	0,997 753
43	4490	780	220	80	983,0647	447	559
44	5391	872	128	85	1818	566	440
				90	2213	607	400

Die tatsächliche Fallbeschleunigung dürfte etwa 10–20 mGal unter den nach der internationalen Schwereformel berechneten Werten liegen[15, 16].

B. Geometrische und Massenkonstanten

Konstanten des internationalen Erdellipsoids (nach HAYFORD[12, 17])

Große Halbachse	a	$6{,}378\,38\mathbf{8} \times 10^6$ m
Abplattung	α	1/29**7**
Kleine Halbachse	b	$6{,}356\,912 \times 10^6$ m
Numerische Exzentrizität	ε	0,081 991 89
Äquatorquadrant	Q^{Ae}	$1{,}001\,9148 \times 10^7$ m
Meridianquadrant	Q^{Me}	$1{,}000\,2288 \times 10^7$ m
Massenkonstanten[18]		
Gesamtmasse	M	$(5{,}9765 \pm 0{,}0050) \times 10^{24}$ kg
Oberflächendichte	ϱ_s	$(2{,}60 \pm 0{,}05) \times 10^3\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$
Zentrale Dichte	ϱ_c	$(1{,}126 \pm 0{,}025) \times 10^4\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$
Mittlere Dichte	ϱ	$(5{,}517 \pm 0{,}006) \times 10^3\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$

III. Kosmische Konstanten

Sonne

Mittlere Entfernung von der Erde[19]	$1{,}495 \times 10^{11}$ m = 498,7 Lichtsekunden = 149,5 Millionen Kilometer
Radius[20]	$6{,}965 \times 10^{8}$ m ~ 109 Erdradien
Masse[20]	$1{,}987 \times 10^{30}$ kg
Mittlere Dichte[20]	$1{,}41 \times 10^{3}$ kg m^{-3}
Fallbeschleunigung an der Oberfläche[19]	$2{,}74 \times 10^{2}$ m s^{-2}
Gesamtstrahlung[19]	$3{,}72 \times 10^{26}$ W
Effektive Temperatur[19]	5714° K
Lichtstärke[19]	$2{,}8 \times 10^{27}$ cd

Mond

Mittlerer Abstand von der Erde[20]	$3{,}844\,00 \times 10^{8}$ m ~ 60,27 Erdradien
Radius[19]	$1{,}738 \times 10^{6}$ m ~ 0,272 Erdradien
Masse[20]	$7{,}343 \times 10^{22}$ kg
Mittlere Dichte[19]	$3{,}342 \times 10^{3}$ kg m^{-3}
Siderische Umlaufzeit[19]	27,321 661 Tage
Synodische Umlaufzeit[19]	29,530 588 Tage

Planeten[19]

	Siderische Umlaufzeit	Mittlere Entfernung von der Sonne (Erde = 1)	Durchmesser m	Masse (Erde = 1)	Mittlere Dichte kg m^{-3}
Merkur..	$0^{a}\,87^{d}.97$	0,387 099	$4{,}8000 \times 10^{6}$	0,055	$5{,}72 \times 10^{3}$
Venus ..	0 224,70	0,723 332	$1{,}2200 \times 10^{7}$	0,814	$5{,}12 \times 10^{3}$
Erde ...	1 0,01	**1**	$1{,}2757 \times 10^{7}$	**1**	$5{,}51 \times 10^{3}$
Mars....	1 321,74	1,523 688	$6{,}8000 \times 10^{6}$	0,107	$3{,}90 \times 10^{3}$
Jupiter ..	11 314,92	5,202 561	$1{,}4270 \times 10^{8}$	316,9	$1{,}25 \times 10^{3}$
Saturn ..	29 167,21	9,554 747	$1{,}2080 \times 10^{8}$	94,8	$6{,}1 \times 10^{2}$
Uranus .	84 8,11	19,218 14	$4{,}9700 \times 10^{7}$	14,51	$1{,}35 \times 10^{3}$
Neptun..	164 281,6	30,109 57	$5{,}3000 \times 10^{7}$	17,19	$1{,}32 \times 10^{3}$
Pluto ...	248 157	39,517 74	~$1{,}0000 \times 10^{7}$	~0,9	~1 $\times 10^{3}$

IV. Allgemeine physikalische Konstanten

A. Internationale Normwerte

Name	Symbol und Formel	Zahlenwert	CGS-Dreiersystem	MKS-Vierersystem	Nichtkohärente Einheiten	Literatur*
Normfallbeschleunigung	g_n	9,806 6**5**	10^{2} Gal (= cm s^{-2})	m s^{-2}		*9*
Normdruck	p_0	1,013 2**5** **1** **7,6**	10^{6} dyn cm^{-2}	10^{5} N m^{-2}	atm 10^{2} Torr	*21, 22*
Normtemperatur (thermodynamische und internationale Skala) (Eispunkt des Wassers)	T_0 t_0	2,731**5** **0**	10^{2} °K °C	10^{2} °K °C		*22, 23*
Litervolumen	l	1,000 0**28**	10^{3} cm^{3}	10^{-3} m^{3}		*24, 25*
Gitterkonstantenwert des Kalkspates (Definition der Siegbahnschen X-Einheit)	$d_{\infty}^{18\,°C}$ ($CaCO_3$)	3,029 4**5** 1,002 030($\pm 20 \times 10^{-6}$)	10^{-8} cm	10^{-10} m	10^{3} XE	*1* *32*
Wellenlänge der roten Cadmiumlinie 6 $^1D_2$—6 $^1P_1$ in spektroskopischer Normalluft (Definition des Ångström)	$\lambda_{n_{Cd}}$	6,438 469**6** 6,438 469$_6$($\pm 3 \times 10^{-6}$)	10^{-5} cm	10^{-7} m	10^{3} Å	*26* *1*
Neue Definition des Meters (voraussichtlich ab 1960) auf Grund der orangeroten Spektrallinie des Kryptonisotops 86 (damit wird 1 Å $\equiv 10^{-10}$ m)	m	1,650 763 **73**			$10^{7}\,\lambda_{0_{Kr\text{-}86}}$	*35*
Vakuumwellenlänge der orangeroten Spektrallinie $2\,p_{10}$—$5\,d_6$ des Kryptonisotops 86	$\lambda_{0_{Kr\text{-}86}}$	6,057 802**1**	10^{-5} cm	10^{-7} m		*Ed*
Atomgewicht des Sauerstoffisotops ^{16}O in der physikalischen Skala (Bezugspunkt der physikalischen Skala)	$M_{O\text{-}16}$	**16**				
Atomgewicht des «natürlichen» Sauerstoffisotopengemisches in der chemischen Skala (Bezugspunkt der chemischen Skala)	A_O	**16**				
Umrechnungsfaktor chemische/physikalische Skala	A/M	1,000 27**5**				**, *27*
Quecksilbernormdichte (internationale Temperaturskalen)	ϱ_n (Hg)	1,359 5**1**	10 g cm^{-3}	10^{4} kg m^{-3}		*1, 28*
2. Plancksche Strahlungskonstante (internationale Temperaturskala 1948)	c_2 (int. 1948)	1,43**8**	cm grd	10^{-2} m grd		*22, 23*
Normwerte des Erdrotationsellipsoides: Äquatorradius Abplattung	$a_{\oplus}$ $\alpha_{\oplus}$	6,378 38**8** 1/29**7**	10^{8} cm	10^{6} m		*12* *12*
Sonnenparallaxe	$\pi_{\odot}$	8,**8**	Bogensekunden	Bogensekunden		*29*

B. Gravitationskonstante

Gravitationskonstante	G	6,670 $\pm$ 0,007	10^{-8} cm^{3} g^{-1} s^{-2}	10^{-11} m^{3} kg^{-1} s^{-2}		*30, 31*

C. Konstanten des elektromagnetischen Feldes (siehe auch S. 189 ff.)

Vakuumlichtgeschwindigkeit	c	2,997 9250	10^{10} cm s^{-1}	10^{8} m s^{-1}		*33*
	$1/c$	3,335 6405	10^{-11} cm^{-1} s	10^{-9} m^{-1} s		*Ed*
	c^2	8,987 5543	10^{20} cm^{2} s^{-2}	10^{16} m^{2} s^{-2}		*Ed*
	$1/c^2$	1,112 6497	10^{-21} cm^{-2} s^{2}	10^{-17} m^{-2} s^{2}		*Ed*
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 10^{-7}\,4\,\pi$ H m^{-1}	1,256 637 062		10^{-6} H m^{-1}		
Elektrische Feldkonstante	$\varepsilon_0 = 10^{7}/4\pi c^2$ F m^{-1}	8,854 1853		10^{-12} F m^{-1}		*Ed*
Wellenwiderstand des Vakuums	$\Gamma_0 = \mu_0\, c$	3,767 3037		$10^{2}\,\Omega$		*Ed*

* Literatur siehe S. 208. Werte, die durch den Herausgeber nach der angegebenen Formel berechnet wurden, sind in der Literaturkolonne mit *Ed* bezeichnet.

** Dieser Wert wurde bisher von der internationalen Kommission für Atomgewichte (chem.) benutzt. Vgl. auch Cohen und DuMond, in: Flügge, S., *Handbuch der Physik*, Bd. 35, Berlin (1957).

D. Konstanten der Thermodynamik

Name	Symbol und Formel	Zahlenwert	CGS-Dreiersystem	MKS-Vierersystem	Nichtkohärente Einheiten	Literatur*
Spezifisches Normvolumen idealer Gase						
(Physikalische Skala)	v_0	2,242 07	10^4 cm^3 mol$_{Ph}^{-1}$	10 m^3 kmol$_{Ph}^{-1}$		*27*
(Chemische Skala)		2,241 45	10^4 cm^3 mol$_{Ch}^{-1}$	10 m^3 kmol$_{Ch}^{-1}$		*Ed*
Universelle Gaskonstante						
(Physikalische Skala)	$R_0 = p_0 v_0/T_0$	8,316 96	10^7 erg mol$_{Ph}^{-1}$ grd^{-1}	10^3 J kmol$_{Ph}^{-1}$ grd^{-1}		*Ed*
		8,207 97			10^{-2} latm mol$_{Ph}^{-1}$ grd^{-1}	*Ed*
		1,9871			cal$_{15}$ mol$_{Ph}^{-1}$ grd^{-1}	*Ed*
(Chemische Skala)		8,314 67	10^7 erg mol$_{Ch}^{-1}$ grd^{-1}	10^3 J kmol$_{Ch}^{-1}$ grd^{-1}		*Ed*
		8,205 71			10^{-2} latm mol$_{Ch}^{-1}$ grd^{-1}	*Ed*
		1,9865			cal$_{15}$ mol$_{Ch}^{-1}$ grd^{-1}	*Ed*
Boltzmannsche Entropiekonstante	$k = R_0/N$	1,380 40	10^{-16} erg grd^{-1}	10^{-23} J grd^{-1}		*Ed*
		1,362 31			10^{-25} latm grd^{-1}	*Ed*
		3,2981			10^{-24} cal$_{15}$ grd^{-1}	*Ed*
		8,616 65			10^{-5} eV grd^{-1}	*Ed*

E. Atomare Konstanten

Spezifische Molekülzahl (Loschmidtsche Konstante**)						
(Physikalische Skala)	N	6,025 02	10^{23} mol$_{Ph}^{-1}$	10^{26} kmol$_{Ph}^{-1}$		*16*
(Chemische Skala)		6,023 36	10^{23} mol$_{Ch}^{-1}$	10^{26} kmol$_{Ch}^{-1}$		*Ed*
Avogadrosche Konstante**	$A_0 = N/v_0$	2,687 26	10^{19} cm^{-3}	10^{25} m^{-3}		*Ed*
Spezifische Ionenladung (Faradaysche Konstante)						
(Physikalische Skala)	$F = Ne$	2,893 65	10^{14} esE val$_{Ph}^{-1}$			*Ed*
	$F' = Ne'$; $F'' = Ne''$	9,652 19	10^9 emE val$_{Ph}^{-1}$	10^7 C kval$_{Ph}^{-1}$		*Ed*
(Chemische Skala)	$F' = Ne'$; $F'' = Ne''$	9,649 54	10^9 emE val$_{Ch}^{-1}$	10^7 C kval$_{Ch}^{-1}$		*Ed*
Elektrische Elementarladung	e	4,802 73	10^{-10} esE			*16*
(Ladung eines Elektrons)	$e' = e/c$; $e'' = 10e'$	1,602 02	10^{-20} emE	10^{-19} C		*Ed*
Planckssches Wirkungsquantum	$h = 2\pi e^2/\alpha c$	6,624 91	10^{-27} erg s	10^{-34} J s		*Ed*
	h/e	1,379 40	10^{-17} erg s esE^{-1}			*Ed*
	h/e'; h/e''	4,135 35	10^{-7} erg s emE^{-1}	10^{-15} Wb		*Ed*
Quantenmechanische Einheit des Drehimpulses	$\hbar = h/2\pi$	1,054 39	10^{-27} erg s	10^{-34} J s		*Ed*
Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante	$1/\alpha$	1,370 39 × 10^2				*16*
	α	7,297 19 × 10^{-3}				*16*
1. Planckssche Strahlungskonstante	$c_1 = hc^2$	5,954 17	10^{-6} erg s^{-1} cm^2	10^{-17} W m^2		*Ed*
2. Planckssche Strahlungskonstante	$c_2 = hc/k$	1,438 78	cm grd	10^{-2} m grd		*Ed*
Konstante der spezifischen Atomwärme	c_2/c	4,799 26	10^{-11} s grd	10^{-11} s grd		*Ed*
Konstante des Wienschen Verschiebungsgesetzes	c_2/x; $x = 5\,(1-e^{-x})$	2,897 78	10^{-1} cm grd	10^{-3} m grd		*c_2 Ed, x bei 30*
Stefan-Boltzmannsche Strahlungskonstante	$\sigma = 2\pi^5 k^4/15 h^3 c^2$	5,6693	10^{-5} erg s^{-1} cm^{-2} grd^{-4}	10^{-8} W m^{-2} grd^{-4}		*Ed*
1. Bohr-Radius	$a_0 = \alpha/4\pi R_\infty$	5,291 65	10^{-9} cm	10^{-11} m		*Ed*
Klassischer Elektronenradius	$r_0 = \alpha^2/4\pi R_\infty$	2,817 75	10^{-13} cm	10^{-15} m		*Ed*
Thomson-Querschnitt	$(8/3)\,\pi r_0^2$	6,651 55	10^{-25} cm^2	10^{-29} m^2	10^{-1} barn (1 barn = 10^{-24} cm^2)	*Ed*
Compton-Wellenlängen						
Elektron	$\lambda_{Ce} = h/m_e c$	2,426 20	10^{-10} cm	10^{-12} m		*Ed*
	$\lambda\!\!\!^{-}_{Ce} = \hbar/m_e c$	3,861 42	10^{-11} cm	10^{-13} m		*Ed*
Proton	$\lambda_{Cp} = h/m_p c$	1,321 39	10^{-13} cm	10^{-15} m		*Ed*
	$\lambda\!\!\!^{-}_{Cp} = \hbar/m_p c$	2,103 06	10^{-14} cm	10^{-16} m		*Ed*
Neutron	$\lambda_{Cn} = h/m_n c$	1,319 58	10^{-13} cm	10^{-15} m		*Ed*
	$\lambda\!\!\!^{-}_{Cn} = \hbar/m_n c$	2,100 17	10^{-14} cm	10^{-16} m		*Ed*
Rydberg-Wellenzahl für unendlich große Kernmasse	R_∞	1,097 373 28	10^5 cm^{-1}	10^7 m^{-1}		*16*
Rydberg-Wellenzahl des leichten Wasserstoffatoms	$R_H = R_\infty/(1+m_e/m_p)$	1,096 775 94	10^5 cm^{-1}	10^7 m^{-1}		*Ed*
Rydberg-Frequenz des leichten Wasserstoffatoms	$R'_H = c R_H$	3,288 052 01	10^{15} Hz (Hz = s^{-1})	10^{15} Hz (Hz = s^{-1})		*Ed*
Spezifische Ladungen						
Elektron	e/m_e	5,272 97	10^{17} esE g^{-1}			*Ed*
	e'/m_e; e''/m_e	1,758 87	10^7 emE g^{-1}	10^{11} C kg^{-1}		*Ed*
Proton	e/m_p	2,871 85	10^{14} esE g^{-1}			*Ed*
	e'/m_p; e''/m_p	9,579 45	10^3 emE g^{-1}	10^7 C kg^{-1}		*Ed*

* Literatur siehe S. 208. ** Vgl. Fußnote * auf S. 203.

E. Atomare Konstanten (Schluß)

Name	Symbol und Formel	Zahlenwert	CGS-Dreiersystem	MKS-Vierersystem	Nichtkohärente Einheiten	Literatur
Gyromagnetisches Verhältnis des Protons	γ_p'	2,675 13	10^4 rad s^{-1} oersted^{-1}			*34*
	$\gamma_p'' \triangleq 10^{-3}\, 4\pi\, \lambda_p'$	3,361 68		10^2 m C^{-1}		*Ed*
Magnetische Momente						*Ed*
Bohrsches Magneton	$\mu_B' = he'/4\pi m_e$	9,272 67	10^{-21} erg oersted^{-1}			
	$\mu_B'' = he''/m_e$	1,165 24		10^{-29} Wb m		*Ed*
Kernmagneton	$\mu_K' = he'/4\pi m_p$	5,050 23	10^{-24} erg oersted^{-1}			*Ed*
	$\mu_K'' = he''/m_p$	6,346 30		10^{-33} Wb m		*Ed*
Elektron	$\mu_e' = \mu_B' \times (\mu_e/\mu_B)$	9,283 43	10^{-21} erg oersted^{-1}			*Ed*
	$\mu_e'' = \mu_B'' \times (\mu_e/\mu_B)$	1,166 59		10^{-29} Wb m		*Ed*
	$\mu_e/\mu_B = 1 + \alpha/2\pi - 0{,}328\,\alpha^2/\pi^2$	1,001 1596				*16*
Proton	$\mu_p' = \gamma_p' h/4\pi$	1,410 31	10^{-23} erg oersted^{-1}			*Ed*
	$\mu_p'' = \gamma_p'' h/4\pi$	1,772 25		10^{-32} Wb m		*Ed*
	μ_p/μ_K	2,792 57				*Ed*
Zeemansche Verschiebung	μ_B'/hc	4,668 79	10^{-5} cm^{-1} oersted^{-1}			*Ed*
	μ_B''/hc	5,866 97		10^{-5} A^{-1}		*Ed*
Massenwerte						
Masseneinheit	$ME = 1/N$	1,659 75	10^{-24} g	10^{-27} kg		*Ed*
Elektronenmasse	$m_e = 4\pi e^2 R_\infty/\alpha^3 c^2$	9,108 20	10^{-28} g	10^{-31} kg		*Ed*
Protonenmasse	$m_p = m_H - m_e$	1,672 35	10^{-24} g	10^{-27} kg		*Ed*
	m_p/m_e	$1{,}836\,09 \times 10^3$				*Ed*
Neutronenmasse	$m_n = M_n/N$	1,674 65	10^{-24} g	10^{-27} kg		*Ed*
Masse eines leichten Wasserstoffatoms	$m_H = M_H/N$	1,673 26	10^{-24} g	10^{-27} kg		*Ed*
Reduzierte Masse des Elektrons im Wasserstoffatom	$\mu = m_e m_p/m_H$	9,103 24	10^{-28} g	10^{-31} kg		*Ed*
Atomgewichte (Physikalische Skala)						
Elektron	$M_e = N m_e$	$5{,}487\,71 \times 10^{-4}$				*Ed*
Proton	$M_p = N m_p$	1,007 593				*Ed*
Neutron	M_n	1,008 982				*27*
Leichtes Wasserstoffatom	M_H	1,008 142				*27*
Energetische Umrechnungsfaktoren (vgl. auch S. 187)						
Elektronenvolt	eV $= e''$V	1,602 02	10^{-12} erg	10^{-19} J		*16*
	erg/eV; J/eV	6,242 13	10^{11}	10^{18}		*Ed*
Rydberg	Ry $= h R_H'$	2,178 30	10^{-11} erg	10^{-18} J		*Ed*
		1,359 73			10 eV	*Ed*
Sekunde^{-1}	$E_{s^{-1}} = h$/s	6,624 91	10^{-27} erg	10^{-34} J		*Ed*
		4,135 35			10^{-15} eV	*Ed*
Zentimeter^{-1}	$E_{cm^{-1}} = hc$/cm	1,986 10	10^{-16} erg	10^{-23} J		*Ed*
		1,239 74			10^{-4} eV	*Ed*
Grad Kelvin	$E_{^\circ K} = k$/grd	1,380 40	10^{-16} erg	10^{-23} J		*Ed*
		8,616 65			10^{-5} eV	*Ed*
Gramm	$E_g = c^2$g	8,987 554	10^{20} erg	10^{13} J		*Ed*
		5,610 15			10^{32} eV	*Ed*
Masseneinheit	$E_{ME} = c^2 ME$	1,491 71	10^{-3} erg	10^{-10} J		*Ed*
		9,311 41			10^8 eV	*Ed*
Elektronenmasse	$E_{m_e} = c^2 m_e$	8,186 04	10^{-7} erg	10^{-14} J		*Ed*
		5,109 83			10^5 eV	*Ed*
Protonenmasse	$E_{m_p} = c^2 m_p$	1,503 03	10^{-3} erg	10^{-10} J		*Ed*
		9,382 12			10^8 eV	*Ed*
Neutronenmasse	$E_{m_n} = c^2 m_n$	1,505 10	10^{-3} erg	10^{-10} J		*Ed*
		9,395 05			10^8 eV	*Ed*

Literatur

1) Stille, U., *Messen und Rechnen in der Physik*, Braunschweig (1955). *2)* Comité international des Poids et Mesures, *P. V. Com. int. Poids Mes.*, **22**, 77 und 94 (1950). *3)* Chang und Chien, *J. Amer. chem. Soc.*, **63**, 1709 (1941). *4)* Stokland et al., *Trans. Faraday Soc.*, **35**, 312 (1939). *5)* Schrader und Wirtz, *Z. Naturf.*, **6a**, 220 (1951). *6)* Comité international des Poids et Mesures, *P. V. Com. int. Poids Mes.*, **22**, 79 (1950). *7)* Landolt-Börnstein, *Physikalisch-Chemische Tabellen*, 5. Aufl., Berlin (1927), S. 160. *8)* Wexler und Sissenwine, *Mon. Weath. Rev.*, **84**, 333 (1956). *9) C. R. 3e Conf. Poids Mes.*, 1901, Paris (1901), S. 68. *10)* Union géodésique et géophysique internationale, *Bull. géod. int.*, Nr. 27, 238 (1930). *11)* Heiskanen, W., *Gerlands Beitr. Geophys.*, **19**, 356 (1928). *12)* Cassinis, G., *Bull. géod. int.*, Nr. 26, 40 (1930). *13)* Cassinis, G., *Bull. géod. int.*, Nr. 32, 313 (1931). *14)* Cassinis et al., *R. Comm. geod. ital.* (neue Serie), Nr. 13 (1937). *15)* Stille, U., *Messen und Rechnen in der Physik*, Braunschweig (1955), S. 318. *16)* DuMond, J. W. M., *Ann. Phys. (N.Y.)*, **7**, 365 (1959). *17)* Hayford, J. F., *Supplementary Investigation in 1909 of the Figure of the Earth and Isostacy*, U.S. Coast and Geodetic Survey, Washington (1910). *18)* Berroth, A., *Z. Geophys.*, **18**, 42 (1943). *19)* Westphal, W. H., *Physikalisches Wörterbuch*, Berlin (1952). *20)* Smithsonian Institution, *Physical Tables*, 9. Aufl., Washington (1954). *21)* Comité international des Poids et Mesures, *P. V. Com. int. Poids Mes.*, **21**, 71 (1948). *22) C. R. 10e Conf. Poids Mes.*, 1954, Paris (1955). *23)* Comité international des Poids et Mesures, *P. V. Com. int. Poids Mes.*, **21**, 69, T 18, T 30 (1948). *24)* Guillaume, C. H., *C. R. 4e Conf. Poids Mes.*, 1907, Paris (1907), S. 50. *25)* Comité international des Poids et Mesures, *P. V. Com. int. Poids Mes.*, **22**, 94 (1950). *26)* The International Union for Co-operation in Solar Research, *Trans. int. Un. sol. Res.*, **2**, 20 (1908). *27)* Cohen und DuMond, in: Flügge, S., *Handbuch der Physik*, Bd. 35, Berlin (1957). *28) C. R. 7e Conf. Poids Mes.*, 1927, Paris (1927). *29)* Vgl. Stille, U., *Messen und Rechnen in der Physik*, Braunschweig (1955), S. 84. *30)* Heyl, P. R., *Proc. nat. Acad. Sci. (Wash.)*, **13**, 601 (1927). *31)* Heyl, P. R., *J. Res. nat. Bur. Stand.*, **5**, 1243 (1930). *32)* Birge, R. T., *Amer. J. Phys.*, **13**, 69 (1945). Über dieses Thema vgl. auch *16)*. *33)* Froome, K. D., *Proc. roy. Soc. A*, **247**, 109 (1958). Dieser Wert ($\pm 4 \times 10^3$ cm s^{-1}) ist von folgenden Körperschaften angenommen worden: *International Scientific Radio Union* und *International Union of Geodesy and Geophysics*. *34)* Driscoll und Bender, *Phys. Rev. Letters*, **1**, 413 (1958). *35)* Barrell, H., *Nature*, **180**, 1387 (1957).

Das periodische System der Elemente[1]

Für jedes Element wird folgendes angegeben: Ordnungszahl (kursiv), Symbol, Atomgewicht[2]

Periode	I. Gruppe a	I. Gruppe b	II. Gruppe a	II. Gruppe b	III. Gruppe a	III. Gruppe b	IV. Gruppe a	IV. Gruppe b	V. Gruppe a	V. Gruppe b	VI. Gruppe a	VI. Gruppe b	VII. Gruppe a	VII. Gruppe b	VIII. Gruppe a	VIII. Gruppe b[3]
1	*1.* H 1,0080						*0.n* [4] 1,008986		*e* [5] $5{,}485\times10^{-4}$							*2.* He 4,003
2	*3.* Li 6,940		*4.* Be 9,013		*5.* B 10,82		*6.* C 12,011		*7.* N 14,008		*8.* O **16** [6]		*9.* F 19,00			*10.* Ne 20,183
3	*11.* Na 22,991		*12.* Mg 24,32		*13.* Al 26,98		*14.* Si 28,09		*15.* P 30,975		*16.* S [7] 32,066		*17.* Cl 35,457			*18.* Ar 39,944
4 (3 d)	*19.* K 39,100		*20.* Ca 40,08		*21.* Sc 44,96		*22.* Ti 47,90		*23.* V 50,95		*24.* Cr 52,01		*25.* Mn 54,94		*26.* Fe; *27.* Co; *28.* Ni 55,85 58,94 58,71	
		29. Cu 63,54		*30.* Zn 65,38		*31.* Ga 69,72		*32.* Ge 72,60		*33.* As 74,91		*34.* Se 78,96		*35.* Br 79,916		*36.* Kr 83,80
5 (4 d)	*37.* Rb 85,48		*38.* Sr 87,63		*39.* Y 88,92		*40.* Zr 91,22		*41.* Nb 92,91		*42.* Mo 95,95		*43.* Tc (99)		*44.* Ru; *45.* Rh; *46.* Pd 101,1 102,91 106,4	
		47. Ag 107,880		*48.* Cd 112,41		*49.* In 114,82		*50.* Sn 118,70		*51.* Sb 121,76		*52.* Te 127,61		*53.* I 126,91		*54.* Xe 131,30
6 (5 d) (4 f)	*55.* Cs 132,91		*56.* Ba 137,36		*57.* La 138,92 4f		*72.* Hf 178,50		*73.* Ta 180,95		*74.* W 183,86		*75.* Re 186,22		*76.* Os; *77.* Ir; *78.* Pt 190,2 192,2 195,09	
		79. Au 197,0		*80.* Hg 200,61		*81.* Tl 204,39		*82.* Pb 207,21		*83.* Bi 209,00		*84.* Po (210) [8]		*85.* At (210)		*86.* Rn (222)
7 (6 d) (5 f)	*87.* Fr (223)		*88.* Ra 226,05		*89.* Ac (227) [8] 5f											

Lanthaniden (seltene Erden)

4f	*58.* Ce 140,13	*59.* Pr 140,92	*60.* Nd 144,27	*61.* Pm (145)	*62.* Sm 150,35	*63.* Eu 152,0	*64.* Gd 157,26	*65.* Tb 158,93	*66.* Dy 162,51	*67.* Ho 164,94	*68.* Er 167,27	*69.* Tm 168,94	*70.* Yb 173,04	*71.* Lu 174,99

Actiniden

5f	*90.* Th 232,05	*91.* Pa (231)	*92.* U 238,07	*93.* Np (237)	*94.* Pu (242)	*95.* Am (243)	*96.* Cm (247)	*97.* Bk (249)	*98.* Cf (251)	*99.* Es (254?)	*100.* Fm (253)	*101.* Md (256)	*102.* No (253?)	

1) Modifiziert nach LANDOLT-BÖRNSTEIN, *Zahlenwerte und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik*, Bd. 1: *Atom- und Molekulargewicht*, 1. Teil: *Atome und Ionen*, 6. Aufl., Berlin (1950), S. 11.

2) Internationale Atomgewichte 1957 (Union internationale de Chimie pure et appliquée, *Comptes rendus de la 19e Conférence*, Paris [1957], S. 139). Wo letztere keine Angabe für ein Element gibt, wurde der Wert aus HODGMAN et al. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry and Physics, 1958/59*, 40. Aufl., Cleveland (1958), entnommen. Werte in Klammern geben die Massenzahl des stabilsten bekannten Isotops an.

3) Auch Zero-Gruppe genannt.

4) Neutron.

5) Elektron.

6) Ein definierter Wert, daher eine genaue Zahl.

7) Auf Grund der natürlichen Variation des Isotopenmengenverhältnisses für Schwefel weist das Atomgewicht dieses Elementes einen Schwankungsbereich von $\pm$ 0,003 auf.

8) Berechnet aus der Isotopenzusammenstellung, nicht analytisch bestimmt.

Name	Symbol	Ordnungszahl	Atomgewicht[1]
Actinium	Ac	89	(227)
Aluminium	Al	13	26,98
Americium	Am	95	(243)
Antimon	Sb	51	121,76
Argon	Ar	18	39,944
Arsen	As	33	74,91
Astatin	At	85	(210)
Barium	Ba	56	137,36
Berkelium	Bk	97	(249)
Beryllium	Be	4	9,013
Blei	Pb	82	207,21
Bor	B	5	10,82
Brom	Br	35	79,916
Cadmium	Cd	48	112,41
Caesium	Cs	55	132,91
Calcium	Ca	20	40,08
Californium	Cf	98	(251)
Cassiopeium	Cp	Siehe Lutetium	
Cer	Ce	58	140,13
Chlor	Cl	17	35,457
Chrom	Cr	24	52,01
Cobalt	Co	27	58,94
Columbium	Cb	Siehe Niob	
Curium	Cm	96	(247)
Dysprosium	Dy	66	162,51
Einsteinium	Es	99	(254?)
Eisen	Fe	26	55,85
Emanation	Em	Siehe Radon	
Erbium	Er	68	167,27
Europium	Eu	63	152,0
Fermium	Fm	100	(253)
Fluor	F	9	19,00
Francium	Fr	87	(223)
Gadolinium	Gd	64	157,26
Gallium	Ga	31	69,72
Germanium	Ge	32	72,60
Glucinium	Gl	Siehe Beryllium	
Gold	Au	79	197,0
Hafnium	Hf	72	178,50
Helium	He	2	4,003
Holmium	Ho	67	164,94
Illinium	Il	S. Promethium	
Indium	In	49	114,82
Iridium	Ir	77	192,2
Jod	I	53	126,91
Kalium	K	19	39,100
Kohlenstoff	C	6	12,011
Krypton	Kr	36	83,80
Kupfer	Cu	29	63,54
Lanthan	La	57	138,92
Lithium	Li	3	6,940
Lutetium	Lu	71	174,99
Magnesium	Mg	12	24,32
Mangan	Mn	25	54,94
Mendelevium	Md	101	(256)
Molybdän	Mo	42	95,95
Natrium	Na	11	22,991
Neodym	Nd	60	144,27
Neon	Ne	10	20,183
Neptunium	Np	93	(237)
Nickel	Ni	28	58,71
Niob	Nb	41	92,91
Niton	Nt	Siehe Radon	
Nobelium	No	102	(253?)
Osmium	Os	76	190,2
Palladium	Pd	46	106,4
Phosphor	P	15	30,975
Platin	Pt	78	195,09
Plutonium	Pu	94	(242)
Polonium	Po	84	(210)
Praseodym	Pr	59	140,92
Promethium	Pm	61	(145)
Protactinium	Pa	91	(231)
Quecksilber	Hg	80	200,61
Radium	Ra	88	226,05
Radon (Radium-Emanation)	Rn	86	(222)
Rhenium	Re	75	186,22
Rhodium	Rh	45	102,91
Rubidium	Rb	37	85,48
Ruthenium	Ru	44	101,1
Samarium	Sm	62	150,35
Sauerstoff	O	8	**16**[2]
Scandium	Sc	21	44,96
Schwefel	S	16	32,066[3]
Selen	Se	34	78,96
Silber	Ag	47	107,880
Silicium	Si	14	28,09
Stickstoff	N	7	14,008
Strontium	Sr	38	87,63
Tantal	Ta	73	180,95
Technetium	Tc	43	(99)
Tellur	Te	52	127,61
Terbium	Tb	65	158,93
Thallium	Tl	81	204,39
Thorium	Th	90	232,05
Thulium	Tm	69	168,94
Titan	Ti	22	47,90
Uran	U	92	238,07
Vanadium	V	23	50,95
Wasserstoff	H	1	1,0080
Wismut	Bi	83	209,00
Wolfram	W	74	183,86
Xenon	Xe	54	131,30
Ytterbium	Yb	70	173,04
Yttrium	Y	39	88,92
Zink	Zn	30	65,38
Zinn	Sn	50	118,70
Zirkon	Zr	40	91,22

1) Siehe Fußnote *2* auf S. 209. 2) Siehe Fußnote *6* auf S. 209. 3) Siehe Fußnote *7* auf S. 209.

Symbol	Name	Ordnungszahl	Atomgewicht[1]
Ac	Actinium	89	(227)
Ag	Silber	47	107,880
Al	Aluminium	13	26,98
Am	Americium	95	(243)
Ar	Argon	18	39,944
As	Arsen	33	74,91
At	Astatin	85	(210)
Au	Gold	79	197,0
B	Bor	5	10,82
Ba	Barium	56	137,36
Be	Beryllium	4	9,013
Bi	Wismut	83	209,00
Bk	Berkelium	97	(249)
Br	Brom	35	79,916
C	Kohlenstoff	6	12,011
Ca	Calcium	20	40,08
Cb	Columbium	Siehe Nb	
Cd	Cadmium	48	112,41
Ce	Cer	58	140,13
Cf	Californium	98	(251)
Cl	Chlor	17	35,457
Cm	Curium	96	(247)
Co	Cobalt	27	58,94
Cp	Cassiopeium	Siehe Lu	
Cr	Chrom	24	52,01
Cs	Caesium	55	132,91
Cu	Kupfer	29	63,54
Dy	Dysprosium	66	162,51
Em	Emanation	Siehe Rn	
Er	Erbium	68	167,27
Es	Einsteinium	99	(254?)
Eu	Europium	63	152,0
F	Fluor	9	19,00
Fe	Eisen	26	55,85
Fm	Fermium	100	(253)
Fr	Francium	87	(223)
Ga	Gallium	31	69,72
Gd	Gadolinium	64	157,26
Ge	Germanium	32	72,60
Gl	Glucinium	Siehe Be	
H	Wasserstoff	1	1,0080
He	Helium	2	4,003
Hf	Hafnium	72	178,50
Hg	Quecksilber	80	200,61
Ho	Holmium	67	164,94
I	Jod	53	126,91
Il	Illinium	Siehe Pm	
In	Indium	49	114,82
Ir	Iridium	77	192,2
K	Kalium	19	39,100
Kr	Krypton	36	83,80
La	Lanthan	57	138,92
Li	Lithium	3	6,940
Lu	Lutetium	71	174,99
Md	Mendelevium	101	(256)
Mg	Magnesium	12	24,32
Mn	Mangan	25	54,94
Mo	Molybdän	42	95,95
N	Stickstoff	7	14,008
Na	Natrium	11	22,991
Nb	Niob	41	92,91
Nd	Neodym	60	144,27
Ne	Neon	10	20,183
Ni	Nickel	28	58,71
No	Nobelium	102	(253?)
Np	Neptunium	93	(237)
Nt	Niton	Siehe Rn	
O	Sauerstoff	8	**16** [2]
Os	Osmium	76	190,2
P	Phosphor	15	30,975
Pa	Protactinium	91	231
Pb	Blei	82	207,21
Pd	Palladium	46	106,4
Pm	Promethium	61	(145)
Po	Polonium	84	(210)
Pr	Praseodym	59	140,92
Pt	Platin	78	195,09
Pu	Plutonium	94	(242)
Ra	Radium	88	226,05
Rb	Rubidium	37	85,48
Re	Rhenium	75	186,22
Rh	Rhodium	45	102,91
Rn	Radon	86	(222)
Ru	Ruthenium	44	101,1
S	Schwefel	16	32,066 [3]
Sb	Antimon	51	121,76
Sc	Scandium	21	44,96
Se	Selen	34	78,96
Si	Silicium	14	28,09
Sm	Samarium	62	150,35
Sn	Zinn	50	118,70
Sr	Strontium	38	87,63
Ta	Tantal	73	180,95
Tb	Terbium	65	158,93
Tc	Technetium	43	(99)
Te	Tellur	52	127,61
Th	Thorium	90	232,05
Ti	Titan	22	47,90
Tl	Thallium	81	204,39
Tm	Thulium	69	168,94
U	Uran	92	238,07
V	Vanadium	23	50,95
W	Wolfram	74	183,86
Xe	Xenon	54	131,30
Y	Yttrium	39	88,92
Yb	Ytterbium	70	173,04
Zn	Zink	30	65,38
Zr	Zirkon	40	91,22

1) Siehe Fußnote *2* auf S. 209. 2) Siehe Fußnote *6* auf S. 209. 3) Siehe Fußnote *7* auf S. 209.

Ordnungszahl N	Symbol	Element (deutsch, französisch, englisch, lateinisch)	Atomgewicht[1] 1957 [und Mol.-Gew.] (chem. Skala)	Valenzen	Schmelzpunkt bei 760 Torr, wenn nicht anders vermerkt °C	Siedepunkt bei 760 Torr, wenn nicht anders vermerkt °C	Dichte Gase: g/l bei 760 Torr und 0°C; Feste Stoffe: g/cm³ oder spez. Gewicht 20°/4°C, wenn nicht anders vermerkt	Relative Verbreitung: in der Erdkruste[3] %	in der Atmosphäre (Troposphäre)	im Weltall (Atome pro 10^6 Si-Atome)[4]	im menschl. Körper %	Natürliche Isotope[2]: Isotop (Massenzahl A)	Relative Häufigkeit Atome%	Atomgewicht[1] (physik. Skala)	Zerfallsart[5] (Strahlung)	Energie MeV	Halbwertzeit[6]
1	H [H_2]	**Wasserstoff**(?) Hydrogène Hydrogen	1,0080 [2,016]	1	—259,20	—252,77 (?)	Gas 0,08987 flüssig 0,0709/—252,7° fest 0,0808/—262°	0,88	$5{,}0\times10^{-5}$ Vol.% 0,0007%	$4{,}00\times10^{10}$	10,0	^{1}H (H) ^{2}H (D) ^{3}H (T)	99,985 0,015 siehe (8)	1,008145 2,014740 $3{,}01700_5$	β- kein γ	0,0180	12,26 a
2	He	**Helium** Hélium Helium	4,003	0	—269,7	—268,944	Gas 0,1785 flüssig 0,147/—270,8° 0,126/—268,9°	$4{,}2\times10^{-7}$	$5{,}24\times10^{-4}$ Vol.% 0,000065%	$3{,}08\times10^{9}$		^{3}He ^{4}He	$\sim1{,}3\times10^{-4}$ (in der Atmosphäre) ~ 100	$3{,}01698_6$ $4{,}00387_4$			
3	Li	**Lithium** Lithium Lithium	6,940	1	180	1326	fest 0,534 flüssig 0,507/200°	0,005		100	Spur	^{6}Li ^{7}Li	7,5 92,5	$6{,}01703_4$ $7{,}01823_2$			
4	Be	**Beryllium** Glucinium Beryllium	9,013	2	1283	2970	fest 1,85	5×10^{-4}		20	Spur	^{9}Be	100	$9{,}01504_6$			
5	B	**Bor** Bore Boron	10,82	3	2040	~ 2550	krist. 2,54 amorph 2,45	0,0014		24	Spur	^{10}B ^{11}B	18,7 81,3	$10{,}01611_9$ $11{,}01279_5$			
6	C	**Kohlenstoff** Carbone Carbon	12,011	2, 4	3550 (subl.>3500)	4200	amorph 1,8—2,1 Graphit 2,25 Diamant 3,51	0,087	CO_2 0,03 Vol.% 0,05%	$3{,}5\times10^{6}$	18,0	^{12}C ^{13}C	98,89 1,11	$12{,}00380_3$ $13{,}00747_8$			
7	N [N_2]	**Stickstoff** Azote Nitrogen	14,008 [28,016]	3, 5	—210,01/ 94 Torr	—195,82	Gas 1,25060 flüssig 0,808/—195,8° fest 1,026/—252,5°	0,030	78,09 Vol.% 75,50%	$6{,}6\times10^{6}$	3,0	^{14}N ^{15}N	99,635 0,365	$14{,}00752_0$ $15{,}00486_2$			
8	O [O_2]	**Sauerstoff** Oxygène Oxygen	**16** [32]	2	—218,76	—182,970 (10)	Gas 1,4290 flüssig 1,14/—183° fest 1,426/—252,5°	49,4	20,95 Vol.% 23,15%	$2{,}15\times10^{7}$	65,0	^{16}O ^{17}O ^{18}O	99,75$_9$ 0,037 0,204	**16** $17{,}00453_4$ $18{,}00485_5$			
9	F [F_2]	**Fluor** Fluor Fluorine	19,00 [38,00]	1	—217,96	—187,92	Gas 1,695 flüssig 1,108/—187° fest 1,3/—223°	0,027		1600	~0,009	^{19}F	100	$19{,}00444_8$			
10	Ne	**Neon** Néon Neon	20,183	0	—248,59/ 324 Torr	—245,9	Gas 0,9002 flüssig 1,204/—245,9° fest (1,0)	5×10^{-7}	0,0018 Vol.% 0,0014%	$8{,}6\times10^{6}$		^{20}Ne ^{21}Ne ^{22}Ne	90,9$_2$ 0,257 8,8$_2$	$19{,}99876_9$ $21{,}00049_9$ $21{,}99835_4$			

11	Na	**Natrium** Sodium Sodium	22,991	1	98	889	flüssig 0,928/100° fest 0,97	2,64		$4{,}38\times10^4$	0,109	^{23}Na	100	$22{,}99705_3$			
12	Mg	**Magnesium** Magnésium Magnesium	24,32	2	650	1107	flüssig 1,72/651° fest 1,74	1,94		$9{,}12\times10^5$	0,036	^{24}Mg ^{25}Mg ^{26}Mg	$78{,}6_0$ $10{,}1_1$ $11{,}2_9$	$23{,}99264_0$ $24{,}99375_2$ 25,99080			
13	Al	**Aluminium** Aluminium Aluminum oder Aluminium	26,98	3	660,1 (11) (Erstarrungs- punkt)	2450	flüssig 2,380/660° fest 2,702	7,51		$9{,}48\times10^4$	~0,001	^{27}Al	100	$26{,}99008_1$			
14	Si	**Silicium** Silicium Silicon	28,09	4	1410	(2600)	Adamantin 2,42 amorph 2,0 graphitoid ca. 2,4	25,75		10^6	~0,002	^{28}Si ^{29}Si ^{30}Si	92,18 4,71 3,12	$27{,}98577_5$ 28,98566 $29{,}98325_2$			
15	P	**Phosphor** Phosphore Phosphorus	30,975	3, 5	gelb 44,2 verbr. bei 34° rot 590/43 at violett 593	280	gelb: fest 1,82 rot: flüssig 1,745/44,5° rot: fest 2,20 violett: fest 2,36 schwarz 2,7	0,12		1×10^4	1,16	^{31}P	100	30,98356			
16	S	**Schwefel** Soufre Sulfur oder Sulphur	32,066 (9)	2, 4 6	rhomb. 112,8 monocl. 119,0	444,600 (11)	flüssig 1,808/115° rhomb.: fest 2,07 monocl.: fest 1,957	0,048		$3{,}75\times10^5$	0,196	^{32}S ^{33}S ^{34}S ^{36}S	95,018 0,750 4,215 0,017	31,98220 32,98189 $33{,}9786_4$ $35{,}9784_4$			
17	Cl [Cl_2]	**Chlor** Chlore Chlorine	35,457 [70,914]	1, 3, 5, 7	—101,00	—34,06	Gas 3,214 flüssig 1,557/—33,6° fest (1,9)	0,19		8850	0,156	^{35}Cl ^{37}Cl	75,53 24,47	34,97990 36,97754			
18	Ar	**Argon** Argon Argon	39,944	0	—189,2	—185,87	Gas 1,7824 flüssig 1,402/—185,7° fest 1,65/—223°	$3{,}6\times10^{-4}$	0,93 Vol.% 1,292%	$1{,}5\times10^5$		^{36}Ar ^{38}Ar ^{40}Ar	0,34 0,06 99,60	35,97892 $37{,}9747_9$ $39{,}9750_5$			
19	K	**Kalium** Potassium Potassium	39,100	1	63,4	757	flüssig 0,819/100° fest 0,86	2,40		3160	0,2	^{39}K ^{40}K ^{41}K	93,08 0,0119 6,91	$38{,}9760_4$ $39{,}9766_5$ $40{,}9747_6$	β^- γ K	1,35 1,46	$1{,}3\times10^9$ a
20	Ca	**Calcium** Calcium Calcium	40,08	2	850	1200 ± 30	fest 1,55	3,39		$4{,}90\times10^4$	2,01	^{40}Ca ^{42}Ca ^{43}Ca ^{44}Ca ^{46}Ca ^{48}Ca	96,96 0,64 $0{,}14_5$ 2,07 0,0033 $0{,}18_5$	$39{,}9752_3$ $41{,}9718_9$ $42{,}9723_5$ $43{,}9693_4$ 47,9677			$>2\times10^{16}$ a
21	Sc	**Scandium** Scandium Scandium	44,96	3	1400	3900	fest 3,02/10°	6×10^{-4}		28		^{45}Sc	100	$44{,}9700_7$			

Fußnoten siehe S. 224.

Ordnungszahl Z	Symbol	Element deutsch / französisch / englisch / (lateinisch)	Atomgewicht[1] 1957 (chem. Skala)	Valenzen	Schmelzpunkt bei 760 Torr, wenn nicht anders vermerkt °C	Siedepunkt bei 760 Torr, wenn nicht anders vermerkt °C	Dichte Gase: g/l bei 760 Torr und 0°C; Feste Stoffe: g/cm³ oder spez. Gewicht 20°/4°C, wenn nicht anders vermerkt	Relative Verbreitung: in der Erdkruste[3] %	in der Atmosphäre (Troposphäre)	im Weltall (Atome pro 10^6 Si-Atome)[4]	im menschl. Körper %	Natürliche Isotope[2]: Isotop (Massenzahl A)	Relative Häufigkeit Atome%	Atomgewicht[1] (physik. Skala)	Zerfallsart[5] (Strahlung)	Energie MeV	Halbwertzeit[6]
22	Ti	**Titan** Titane Titanium	47,90	2, 3, 4	1812	(> 3000)	fest 4,50	0,58		2440		^{46}Ti ^{47}Ti ^{48}Ti ^{49}Ti ^{50}Ti	7,99 7,32 $73,9_9$ 5,46 5,25	$45,9669_5$ $46,9665_0$ $47,9631_2$ $48,9633_9$ $49,9605_8$			
23	V	**Vanadium** Vanadium Vanadium	50,95	2, 3, 4, 5	1730	(3000)	fest 5,96	0,016		220		^{50}V ^{51}V	0,24 99,76	$49,9631_2$ $50,9600_4$			$> 10^{14}$ a
24	Cr	**Chrom** Chrome Chromium	52,01	2, 3, 6	1903 ± 10	(2200)	fest 7,1	0,033		7800		^{50}Cr ^{52}Cr ^{53}Cr ^{54}Cr	4,31 $83,7_6$ $9,5_5$ 2,38	$49,9616_4$ $51,9569_9$ $52,9574_6$ $53,9560_2$			
25	Mn	**Mangan** Manganèse Manganese	54,94	2, 3, 4, 6, 7	1244	2087	fest 7,20	0,085		6850	~0,001	^{55}Mn	100	$54,9554_0$			
26	Fe	**Eisen** Fer Iron (Ferrum)	55,85	2, 3, 6	1535	2800	flüssig 6,9/1530° fest 7,86	4,7		$6,00 \times 10^5$	0,010	^{54}Fe ^{56}Fe ^{57}Fe ^{58}Fe	$5,8_4$ $91,6_8$ 2,17 0,31	$53,9566_4$ $55,9526_4$ $56,9534_2$ $57,9514_7$			
27	Co	**Kobalt** Cobalt Cobalt	58,94	2, 3	1492 (II) (Erstarrungspunkt)	3100	fest 8,9	0,0018		1800	~0,001	^{59}Co	100	58,9519			
28	Ni	**Nickel** Nickel Nickel	58,71	2, 3	1453 (II) (Erstarrungspunkt)	2800	fest 8,90	0,018		$2,74 \times 10^4$	~0,001	^{58}Ni ^{60}Ni ^{61}Ni ^{62}Ni ^{64}Ni	67,8 26,2 1,25 3,66 $1,1_6$	57,9538 59,9499 60,9497 61,9476 63,9481			
29	Cu	**Kupfer** Cuivre Copper (Cuprum)	63,54	1, 2	1083 (II) (Erstarrungspunkt)	2582	flüssig 8,3/1083° fest 8,92	0,010		212	~0,002	^{63}Cu ^{65}Cu	69,1 30,9	62,9494 64,9484			
30	Zn	**Zink** Zinc Zinc	65,38	2	419,5 (II) (Erstarrungspunkt)	907	flüssig 6,92/419,5° fest 7,133	0,02		486	~0,002	^{64}Zn ^{66}Zn ^{67}Zn ^{68}Zn ^{70}Zn	$48,8_9$ $27,8_1$ $4,1_1$ $18,5_6$ 0,62	$63,9493$ $65,9469$ $66,9485$ $67,9465$ $69,9474$			

31	Ga	**Gallium** Gallium Gallium	69,72	2, 3	29,78	(1983)	flüssig 6,095/29,8° fest 5,91	5×10^{-4}		11,4		^{69}Ga ^{71}Ga	60,2 39,8	68,9476 70,9474			
32	Ge	**Germanium** Germanium Germanium	72,60	2, 4	937,6 ± 0,5	(2700)	fest 5,36	1×10^{-4}		50,5		^{70}Ge ^{72}Ge ^{73}Ge ^{74}Ge ^{76}Ge	$20,5_5$ $27,3_7$ $7,6_7$ $36,7_4$ $7,6_7$	$69,9464$ $71,9446$ $72,9464_5$ $73,9445_9$ $75,9453_3$			
33	As	**Arsen** Arsenic Arsenic	74,91	3, 5	krist. 817/35,8 at (subl. 615)		krist. 5,727/14° amorph 4,7 gelb: fest 2,0	$5,5\times10^{-4}$		4,0		^{75}As	100	$74,9454_0$			
34	Se	**Selen** Sélénium Selenium	78,96	2, 4, 6	grau 217,4/ 0,0043 Torr rot 144	736	grau 4,80/25° rot 4,50/25°	8×10^{-5}		67,6		^{74}Se ^{76}Se ^{77}Se ^{78}Se ^{80}Se ^{82}Se	$0,87$ $9,0_2$ $7,5_8$ $23,5_2$ $49,8_2$ $9,1_9$	$73,9458_9$ $75,9433_4$ $76,9443_6$ $77,9420_9$ $79,9420$ $81,9426_1$			
35	Br	**Brom** Brome Bromine	79,916	1, 3, 5, 7	—7,3	58,78	Gas 7,59 flüssig 3,119 fest (3,14)	6×10^{-4}		13,4	~0,002	^{79}Br ^{81}Br	50,54 49,46	78,94341 80,9421			
36	Kr	**Krypton** Krypton Krypton	83,80	0	—157,21/ 549 Torr	—153,23	Gas 3,708 flüssig 2,6/—146° fest (2)	$1,9\times10^{-8}$	0,0001 Vol.% 0,0003%	51,3		^{78}Kr ^{80}Kr ^{82}Kr ^{83}Kr ^{84}Kr ^{86}Kr	$0,35_4$ $2,2_7$ $11,5_6$ $11,5_5$ $57,9_0$ $17,3_7$	$77,9448_9$ $79,9419$ $81,9394$ $82,9403$ $83,9381$ $85,9382$			
37	Rb	**Rubidium** Rubidium Rubidium	85,48	1	38,8	679	flüssig 1,475/39,0° fest 1,53	0,0034		6,5		^{85}Rb ^{87}Rb	$72,1_5$ $27,8_5$	$84,9389$ $86,9368_7$	β^- kein γ	$0,27_5$	5×10^{10} a
38	Sr	**Strontium** Strontium Strontium	87,63	2	770	1384	fest 2,6	0,017		18,9		^{84}Sr ^{86}Sr ^{87}Sr ^{88}Sr	$0,5_5$ $9,87$ $7,0_2$ $82,5_6$	$83,9399$ $85,9366$ $86,9365_8$ $87,9338$			
39	Y	**Yttrium** Yttrium Yttrium	88,92	3	(1500)	(4100)	fest (5,51)	0,005		8,9		^{89}Y	100	88,9341			
40	Zr	**Zirkon** Zirconium Zirconium	91,22	2, 4	1852 ± 10	(> 2900)	fest 6,4	0,023		54,5		^{90}Zr ^{91}Zr ^{92}Zr ^{94}Zr ^{96}Zr	$51,4_6$ $11,2_3$ $17,1_1$ $17,4_0$ $2,80$	$89,9328$ $90,9341$ $91,9338$ $93,9358$ $95,938_5$			$>2\times10^{16}$ a

Fußnoten siehe S. 224.

Ordnungszahl Z	Symbol	Element deutsch französisch englisch (lateinisch)	Atomgewicht[1] 1957 (chem. Skala)	Valenzen	Schmelzpunkt bei 760 Torr, wenn nicht anders vermerkt °C	Siedepunkt bei 760 Torr, wenn nicht anders vermerkt °C	Dichte Gase: g/l bei 760 Torr und 0°C; Feste Stoffe: g/cm³ oder spez. Gewicht 20°/4°C, wenn nicht anders vermerkt	Relative Verbreitung: in der Erdkruste[3] %	in der Atmosphäre (Troposphäre)	im Weltall (Atome pro 10^6 Si-Atome)[4]	im menschl. Körper %	Natürliche Isotope[2]: Isotop (Massenzahl A)	Relative Häufigkeit Atome%	Atomgewicht[1] (physik. Skala)	Zerfallsart[5] (Strahlung)	Energie MeV	Halbwertzeit[6]
41	Nb (Cb)	**Niob** (Columbium) Niobium Niobium	92,91	3, 5	2487 (verbrennt bei 1950°)	(> 3300)	fest 8,55	4×10^{-5}		1,00		^{93}Nb	100	92,9353			
42	Mo	**Molybdän** Molybdène Molybdenum	95,95	2, 3, 4, 5, 6	2610	(3700)	fest 10,2	$7{,}2\times10^{-4}$		2,42	Spur	^{92}Mo ^{94}Mo ^{95}Mo ^{96}Mo ^{97}Mo ^{98}Mo ^{100}Mo	$15{,}8_6$ $9{,}1_2$ $15{,}7_0$ $16{,}5_0$ $9{,}4_5$ $23{,}7_5$ $9{,}6_2$	$91{,}9352$ $93{,}9343$ $94{,}9357$ $95{,}9349$ $96{,}936_5$ $97{,}936_6$ $99{,}938_3$			
43	Tc	**Technetium** Technétium Technetium	99 ([12])	6, 7	2140		fest 11,50	0				$^{92\text{–}102}$Tc ^{104,105}Tc ^{107}Tc	Künstliches Element: alle Isotopen kurzlebig, ausgenommen ^{97}Tc, ^{98}Tc, ^{99}Tc (Halbwertzeiten: ca. 10^4 a, ca. 10^5 a, $2{,}1\times10^5$ a)				
44	Ru	**Ruthenium** Ruthénium Ruthenium	101,1	3, 4, 6, 8	2500	4110	fest 12,2	5×10^{-6}		1,49		^{96}Ru ^{98}Ru ^{99}Ru ^{100}Ru ^{101}Ru ^{102}Ru ^{104}Ru	5,5 1,9 12,7 12,7 17,0 31,5 18,7	$95{,}937_9$ $97{,}937_1$ $98{,}938_2$ $101{,}936_4$ $103{,}937_8$			
45	Rh	**Rhodium** Rhodium Rhodium	102,91	1, 2, 3, 4	1960 ([11]) (Erstarrungspunkt)	3960	fest 12,5	1×10^{-6}		0,214		^{103}Rh	100	$102{,}937_9$			
46	Pd	**Palladium** Palladium Palladium	106,4	2, 4	1552 ([11]) (Erstarrungspunkt)	3560	flüssig 11/1550° fest 11,97	5×10^{-6}		0,675		^{102}Pd ^{104}Pd ^{105}Pd ^{106}Pd ^{108}Pd ^{110}Pd	0,96 $10{,}9_7$ $22{,}2_3$ $27{,}3_3$ $26{,}7_1$ $11{,}8_1$	$101{,}937_5$ $103{,}936_9$ $104{,}938_1$ $105{,}936_4$ $107{,}9378$ $109{,}939_6$			
47	Ag	**Silber** Argent Silver (Argentum)	107,880	1	960,8 ([10]) (Erstarrungspunkt)	2193	flüssig 9,3/960,5° fest 10,5	4×10^{-6}		0,26		^{107}Ag ^{109}Ag	$51{,}3_5$ $48{,}6_5$	$106{,}9389$ $108{,}9393$			
48	Cd	**Cadmium** Cadmium Cadmium	112,41	2	320,9 ([11]) (Erstarrungspunkt)	767	flüssig 8,01/330° fest 8,65	$1{,}1\times10^{-5}$		0,89		^{106}Cd ^{108}Cd ^{110}Cd ^{111}Cd ^{112}Cd ^{113}Cd ^{114}Cd ^{116}Cd	$1{,}21$ $0{,}88$ $12{,}3_9$ $12{,}7_5$ $24{,}0_7$ $12{,}2_6$ $28{,}8_6$ $7{,}5_8$	$105{,}939_5$ $107{,}9382$ $109{,}9383$ $110{,}939_4$ $111{,}938_2$ $112{,}940_3$ $113{,}939_6$ $115{,}941_8$			

49	In	**Indium** Indium Indium	114,82	1, 3	156,4	(2087)	flüssig 7,026/164° fest 7,30	1×10^{-5}		0,11		^{113}In ^{115}In	4,23 95,77	$112{,}940_1$ $114{,}940_5$	β^-	(0,50)	6×10^{14} a
50	Sn	**Zinn** Etain Tin (Stannum)	118,70	2, 4	231,9 ([11]) (Erstarrungs- punkt)	2337	flüssig 6,98/232° kub. (α): fest 5,750 tetr.(β^-): fest 7,31 rho.(γ^-): fest 6,52–6,56	6×10^{-4}		1,33	Spur	^{112}Sn ^{114}Sn ^{115}Sn ^{116}Sn ^{117}Sn ^{118}Sn ^{119}Sn ^{120}Sn ^{122}Sn ^{124}Sn	0,95 0,65 0,34 14,24 7,57 $24{,}0_1$ 8,58 $32{,}9_7$ 4,71 5,98	$111{,}940_3$ $113{,}939_5$ $114{,}940_0$ $115{,}939_0$ $116{,}940_2$ $117{,}939_3$ $118{,}941_0$ 119,9401 $121{,}942_1$ 123,9445			
51	Sb	**Antimon** Antimoine Antimony (Stibium)	121,76	3, 5	630,5 ([11]) (Erstarrungs- punkt)	1440	flüssig 6,55/631° fest 6,691	$2{,}3\times10^{-5}$		0,246		^{121}Sb ^{123}Sb	$57{,}2_5$ $42{,}7_5$	$120{,}942_0$ $122{,}943_1$			
52	Te	**Tellur** Tellure Tellurium	127,61	2, 4, 6	450/0,18 Torr	1087	rhomb. 6,24 amorph 6,00	1×10^{-6}		4,67		^{120}Te ^{122}Te ^{123}Te ^{124}Te ^{125}Te ^{126}Te ^{128}Te ^{130}Te	0,089 2,46 0,87 4,61 6,99 $18{,}7_1$ $31{,}7_9$ $32{,}4_9$	$119{,}942_5$ $121{,}941_6$ $122{,}943_3$ $123{,}942_1$ $124{,}944_1$ $125{,}943_6$ $127{,}946_1$ $129{,}947_8$			$>10^{13}$ a $>10^{21}$ a
53	I	**Jod** Iode Iodine	126,91	1, 3, 5, 7	113,6	184,35	Gas 11,27 flüssig 4,00/107° fest 4,93	6×10^{-6}		0,80	0,016	^{127}I	100	$126{,}944_8$			
54	Xe	**Xenon** Xénon Xenon	131,30	0	—111,9/ 611 Torr	—108,1	Gas 5,851 flüssig 3,06/—109° fest 2,7/—140°	$2{,}4\times10^{-9}$	8×10^{-6} Vol.% 4×10^{-5} %	4,0		^{124}Xe ^{126}Xe ^{128}Xe ^{129}Xe ^{130}Xe ^{131}Xe ^{132}Xe ^{134}Xe ^{136}Xe	0,096 0,090 $1{,}91_9$ $26{,}4_4$ 4,08 $21{,}1_8$ $26{,}8_9$ 10,44 8,87	$123{,}945_4$ $125{,}944_5$ $127{,}944_5$ $128{,}945_6$ $129{,}944_6$ $130{,}946_6$ $131{,}946_0$ $133{,}947_6$ $135{,}950_0$			
55	Cs	**Caesium** Césium Cesium oder Caesium	132,91	1	28,7	690	flüssig 1,84/28° fest 1,90	7×10^{-5}		0,456		^{133}Cs	100	$132{,}947_2$			
56	Ba	**Barium** Baryum Barium	137,36	2	704	1638	fest 3,5	0,047		3,66		^{130}Ba ^{132}Ba ^{134}Ba ^{135}Ba ^{136}Ba ^{137}Ba ^{138}Ba	0,101 0,097 2,42 6,59 7,81 $11{,}3_2$ $71{,}6_6$	$129{,}947_4$ $133{,}946_8$ $136{,}949_6$ $137{,}948_7$			

Fußnoten siehe S. 224.

Ordnungszahl Z	Symbol	Element deutsch / französisch / englisch / (lateinisch)	Atomgewicht[1] 1957 (chem. Skala)	Valenzen	Schmelzpunkt bei 760 Torr, wenn nicht anders vermerkt °C	Siedepunkt bei 760 Torr, wenn nicht anders vermerkt °C	Dichte Gase: g/l bei 760 Torr und 0°C; Feste Stoffe: g/cm³ oder spez. Gewicht 20°/4°C, wenn nicht anders vermerkt	Relative Verbreitung: in der Erdkruste[3] %	in der Atmosphäre (Troposphäre)	im Weltall (Atome pro 10^6 Si-Atome)[4]	im menschl. Körper %	Natürliche Isotope[2]: Isotop (Massenzahl A)	Relative Häufigkeit Atome%	Atomgewicht[1] (physik. Skala)	Zerfallsart[5] (Strahlung)	Energie MeV	Halbwertzeit[6]
57	La	**Lanthan** Lanthane Lanthanum	138,92	3	880	(1800)	fest 6,15	5×10^{-4}		2,00		^{138}La	0,089	137,950$_1$	β⁻ γ K	1,0 1,43/0,80	$1{,}1\times10^{11}$ a
												^{139}La	99,911	138,949$_5$			
58	Ce	**Cer** Cérium Cerium	140,13	3, 4	775	(1400)	kubisch 6,90 hexagonal 6,7	0,0022		2,26		^{136}Ce ^{138}Ce ^{140}Ce ^{142}Ce	0,19$_3$ 0,25$_0$ 88,4$_8$ 11,0$_7$	 137,949$_0$ 139,948$_9$ 141,953$_0$			
59	Pr	**Praseodym** Praséodyme Praseodymium	140,92	3, 4, 5	932		fest 6,5	$3{,}5\times10^{-4}$		0,40		^{141}Pr	100	140,951$_1$			
60	Nd	**Neodym** Néodyme Neodymium	144,27	3	1024		fest 6,9	0,0012		1,44		^{142}Nd ^{143}Nd ^{144}Nd ^{145}Nd ^{146}Nd ^{148}Nd ^{150}Nd	27,0$_9$ 12,14 23,8$_3$ 8,29 17,26 5,74 5,63	141,951$_5$ 142,954$_1$ 143,954$_9$ 145,958$_7$ 147,964$_0$ 149,967$_9$	 α 	 1,9 	 $\sim2\times10^{15}$ a $>10^{16}$ a
61	Pm	**Promethium** Prométhium Promethium	145 (12)	3								^{141}Pm $^{143\text{-}151}$Pm	alle radioaktiv; natürliches Vorkommen noch nicht bestätigt				
62	Sm	**Samarium** Samarium Samarium	150,35	2, 3	1052		fest (6,93)	5×10^{-4}		0,664		^{144}Sm ^{147}Sm ^{148}Sm ^{149}Sm ^{150}Sm ^{152}Sm ^{154}Sm	3,1$_6$ 15,0$_7$ 11,2$_7$ 13,8$_4$ 7,4$_7$ 26,6$_3$ 22,5$_3$	143,956$_0$ 146,960$_3$ 147,961$_3$ 148,963$_5$ 149,963$_4$ 151,967$_3$ 153,970$_5$	 α 	 2,18 	 $1{,}3\times10^{11}$ a
63	Eu	**Europium** Europium Europium	152,0	2, 3	(1150 ± 50)		fest (5,22)	$1{,}4\times10^{-4}$		0,187		^{151}Eu ^{153}Eu	47,7$_7$ 52,23	 	 	 	
64	Gd	**Gadolinium** Gadolinium Gadolinium	157,26	3	(1350)		fest (7,94)	5×10^{-4}		0,684		^{152}Gd ^{154}Gd ^{155}Gd ^{156}Gd ^{157}Gd ^{158}Gd ^{160}Gd	0,20 2,15 14,7$_3$ 20,4$_7$ 15,6$_8$ 24,8$_7$ 21,9$_0$	 153,969$_7$ 154,970$_9$ 155,971$_5$ 156,971$_2$ 157,973$_4$ 159,977$_8$	 	 	

65	Tb	**Terbium** Terbium Terbium	158,93	3	(1450 ± 50)		fest	(8,33)	7×10^{-5}		0,0956		^{159}Tb	100				
66	Dy	**Dysprosium** Dysprosium Dysprosium	162,51	3	(1500)		fest	(8,56)	5×10^{-4}		0,556		^{156}Dy ^{158}Dy ^{160}Dy ^{161}Dy ^{162}Dy ^{163}Dy ^{164}Dy	0,052 0,090 2,29 $18,8_8$ $25,5_3$ $24,9_7$ $28,1_8$	 159,976 161,977 163,980			
67	Ho	**Holmium** Holmium Holmium	164,94	3	(1500)		fest	(8,76)	7×10^{-5}		0,118		^{165}Ho	100	164,981			
68	Er	**Erbium** Erbium Erbium	167,27	3	(1525 ± 25)		fest	(9,16)	4×10^{-4}		0,316		^{162}Er ^{164}Er ^{166}Er ^{167}Er ^{168}Er ^{170}Er	$0,13_6$ $1,5_6$ 33,4 22,9 27,1 14,9	 $163,981_7$ $167,983_9$ 169,989			
69	Tm	**Thulium** Thulium Thulium	168,94	3	(1600 ± 50)		fest	(9,34)	7×10^{-5}		0,0318		^{169}Tm	100				
70	Yb	**Ytterbium** Ytterbium Ytterbium	173,04	3	ca. 1800		fest	(7,01)	5×10^{-4}		0,220		^{168}Yb ^{170}Yb ^{171}Yb ^{172}Yb ^{173}Yb ^{174}Yb ^{176}Yb	0,14 $3,0_3$ $14,3_1$ $21,8_2$ $16,1_3$ $31,8_4$ $12,7_3$	 171,984 173,981 			
71	Lu (Cp)	**Lutetium** (Cassiopeium) Lutécium Lutetium oder Lutecium	174,99	3	(1700 ± 50)		fest	(9,7)	1×10^{-5}		0,050		^{175}Lu ^{176}Lu	97,4 2,6	 175,997	β^- γ K	0,43 0,20/0,31 0,20/0,09	3×10^{10} a
72	Hf	**Hafnium** Hafnium Hafnium	178,50	4	2227	(> 3200)	fest	(13,3)	0,0025		0,438		^{174}Hf ^{176}Hf ^{177}Hf ^{178}Hf ^{179}Hf ^{180}Hf	0,19 5,19 $18,4_7$ $27,1_5$ 13,75 $35,2_5$	 175,996 178,000 			
73	Ta	**Tantal** Tantale Tantalum	180,95	3, 5	2977	(> 4100)	fest	16,6	$1,2\times10^{-5}$		0,065		^{180}Ta ^{181}Ta	0,012 99,988	180,002			$>10^7$ a

Fußnoten siehe S. 224.

Ordnungszahl Z	Symbol	Element deutsch französisch englisch (lateinisch)	Atomgewicht[1] 1957 (chem. Skala)	Valenzen	Schmelzpunkt bei 760 Torr, wenn nicht anders vermerkt °C	Siedepunkt bei 760 Torr, wenn nicht anders vermerkt °C	Dichte Gase: g/l bei 760 Torr und 0°C Feste Stoffe: g/cm³ oder spez. Gewicht 20°/4°C, wenn nicht anders vermerkt	Relative Verbreitung: in der Erdkruste[3] %	in der Atmosphäre (Troposphäre)	im Weltall (Atome pro 10^6 Si-Atome)[4]	im menschl. Körper %	Natürliche Isotope[2]: Isotop (Massenzahl A)	Relative Häufigkeit Atome%	Atomgewicht[1] (physik. Skala)	Zerfallsart[5] (Strahlung)	Energie MeV	Halbwertzeit[6]
74	W	**Wolfram** Tungstène Tungsten	183,86	2, 4, 5, 6	3380 ([11])	(5900)	fest 19,3	0,0055		0,49		^{180}W	0,13$_5$	180,001	α	3,2	~3×10^{14}a
												^{182}W	26,4	182,004			
												^{183}W	14,4	183,005			
												^{184}W	30,6	184,006			
												^{186}W	28,4	186,010			
75	Re	**Rhenium** Rhénium Rhenium	186,22	3, 4, 5, 6, 7	3147		fest 21,40	1×10^{-7}		0,135		^{185}Re	37,0$_7$				
												^{187}Re	62,9$_3$	187,011	β$^-$	< 0,008	5×10^{10}a
76	Os	**Osmium** Osmium Osmium	190,2	2, 3, 4, 6, 8	2700	4400	fest 22,48 (dichtestes aller Elemente)	5×10^{-6}		1,00		^{184}Os	0,018				
												^{186}Os	1,59	186,010			
												^{187}Os	1,64	187,011			
												^{188}Os	13,3	188,014			
												^{189}Os	16,1	189,018			
												^{190}Os	26,4	190,017			
												^{192}Os	41,0	192,022			
77	Ir	**Iridium** Iridium Iridium	192,2([13])	3, 4	2443 ([11]) (Erstarrungspunkt)	4350	fest 22,4	1×10^{-6}		0,821		^{191}Ir	38,5	191,021			
												^{193}Ir	61,5	193,025			
78	Pt	**Platin** Platine Platinum	195,09	2, 4	1769 ([11]) (Erstarrungspunkt)	4010	flüssig 19/1755° fest 21,45	2×10^{-5}		1,625		^{190}Pt	0,012		α	3,3	~1×10^{12}a
												^{192}Pt	0,78	192,023			
												^{194}Pt	32,8	194,024			
												^{195}Pt	33,7	195,026$_4$			
												^{196}Pt	25,4	196,026$_9$			
												^{198}Pt	7,2	198,029			
79	Au	**Gold** Or Gold (Aurum)	197,0	1, 3	1063,0 ([10]) (Erstarrungspunkt)	2660	flüssig 17,0/1300° fest 19,3	5×10^{-7}		0,145		^{197}Au	100	197,028			
80	Hg	**Quecksilber** Mercure Mercury (Hydrargyrum)	200,61	1, 2	—38,87 ([11]) (Erstarrungspunkt)	356,58 ([11])	14,43/—38,87° 13,595/0° 13,546/20° ([14])	2,7×10^{-6}		0,284		^{196}Hg	0,14$_6$	196,027			
												^{198}Hg	10,0$_2$	198,029			
												^{199}Hg	16,84	199,031			
												^{200}Hg	23,1$_3$	200,032			
												^{201}Hg	13,2$_2$	201,034			
												^{202}Hg	29,8$_0$	(202,035$_4$)			
												^{204}Hg	6,85	204,0373			

81	Tl	**Thallium** Thallium Thallium	204,39	1, 3	303,6	1457	fest	11,85	1×10^{-5}		0,108					
												^{203}Tl 29,5$_0$	203,0360			
												^{205}Tl 70,5$_0$	205,0384$_8$			
												^{206}Tl (Radium E″)	206,04045	β⁻ kein γ	1,51	4,20 m
												^{207}Tl (Actinium C″)	207,04214	β⁻ γ	1,47 0,87	4,78 m
												^{208}Tl (Thorium C″)	208,04701	β⁻ γ	1,80/1,29/1,52/2,38 0,583/2,615 0,511/0,86	3,1 m
												^{210}Tl (Radium C″)	210,05562	β⁻	1,8	1,32 m
82	Pb	**Blei** Plomb Lead (Plumbum)	207,21	2, 4	327,3 ([11]) (Erstarrungspunkt)	1750	flüssig fest	10,51/400° 11,34	0,002		0,47					
												^{204}Pb 1,5	204,0368$_6$			
												^{206}Pb 23,6 (Radium G)	206,03883			
												^{207}Pb 22,6	207,04058			
												^{208}Pb 52,3	208,04164			
												^{210}Pb (Radium D)	210,04983	β⁻ γ	0,017 0,0467	19,4 a
												^{211}Pb (Actinium B)	211,0547$_5$	β⁻ γ	~1,4/0,5 0,82$_9$ 0,065-0,76$_4$	36,1 m
												^{212}Pb (Thorium B)	212,05817	β⁻ γ	0,35/0,59 0,2386$_0$/0,299/0,115-0,249	10,64 h
												^{214}Pb (Radium B)	214,0665$_8$	β⁻ γ	0,65 0,3519$_9$/0,2952$_2$/0,0523$_6$-0,2578	26,8 m
83	Bi	**Wismut** Bismuth Bismuth	209,00	3, 5	271,0	1420	fest	9,8	$3{,}4\times10^{-6}$		0,144					
												^{209}Bi 100	209,0457$_9$	α	~3	~ 2×10^{17} a
												^{210}Bi (Radium E)	210,04976	α β⁻ kein γ	4,77 1,17$_0$	5,00 d
												^{210}Bi		α β⁻	4,94	$2{,}6\times10^{6}$ a
												^{211}Bi (Actinium C)	211,0532$_6$	α β⁻ γ	6,61$_9$/6,27$_3$ 0,35$_0$	2,16 m
												^{212}Bi (Thorium C)	212,05754	α β⁻ γ	6,047/6,086 2,25$_3$/2,1$_5$ 0,040–2,2	60,5 m
												^{214}Bi (Radium C)	214,06552	α β⁻ γ	5,505/5,444 1,65/3,17 1,76/0,6094-2,43	19,7 m
												^{215}Bi	(215,0689)	β⁻		8 m

Fußnoten siehe S. 224.

Ordnungszahl Z	Symbol	Element deutsch / französisch / englisch / (lateinisch)	Atomgewicht[1] 1957 (chem. Skala)	Valenzen	Schmelzpunkt bei 760 Torr, wenn nicht anders vermerkt °C	Siedepunkt bei 760 Torr, wenn nicht anders vermerkt °C	Dichte Gase: g/l bei 760 Torr und 0°C; Feste Stoffe: g/cm³ oder spez. Gewicht 20°/4°C, wenn nicht anders vermerkt	Relative Verbreitung: in der Erdkruste[3] %	in der Atmosphäre (Troposphäre)	im Weltall (Atome pro 10^6 Si-Atome)[4]	im menschl. Körper %	Natürliche Isotope[2]: Isotop (Massenzahl A)	Relative Häufigkeit Atome%	Atomgewicht[1] (physik. Skala)	Zerfallsart[5] (Strahlung)	Energie MeV	Halbwertzeit[6]
84	Po	**Polonium** Polonium Polonium	210 (12)	(2, 3, 4)	254	962	fest: α-Form 9,32 β-Form 9,51	$1{,}5\times10^{-15}$				^{210}Po (Radium F)		210,04850	α γ	5,298 $0{,}80_2$	138,40 d
												^{211}Po (Actinium C′)		211,05261	α γ	$7{,}43_4$/6,56/6,88 0,88/0,56	0,52 s
												^{212}Po (Thorium C′)		$212{,}05512_9$	α	$8{,}77_6$	0,304 µs
												^{214}Po (Radium C′)		214,06211	α	$7{,}68_0$	164 µs
												^{215}Po (Actinium A)		$215{,}0667_1$	α β⁻	$7{,}36_5$	$1{,}83\times10^{-3}$ s
												^{216}Po (Thorium A)		216,06946	α	$6{,}77_4$	0,158 s
												^{218}Po (Radium A)		$218{,}0770_2$	α β⁻	5,998	3,05 m
85	At	**Astatin** Astatine Astatine	210	(1, 3, 5, 7)				4×10^{-23}				^{215}At		$215{,}0658_9$	α	8,00	$\sim10^{-4}$ s
												^{216}At		$216{,}0699_5$	α	7,79	3×10^{-4} s
												^{218}At		218,0766	α β⁻	$6{,}6_3$	~2 s
												^{219}At			α β⁻	6,27	0,9 m
86	Rn	**Radon** Emanation Niton Radon Radon	222 (12)	0	−71	−61,8	Gas 9,73 flüssig 4,4/—62° fest (4)	6×10^{-18}				^{219}Rn (Actinon)		$219{,}0780_4$	α γ	$6{,}82_4$/$6{,}55_9$/$6{,}43_4$ 0,198/0,067–0,589	3,92 s
												^{220}Rn (Thoron)		220,08021	α γ	$6{,}27_8$ $0{,}54_2$	52 s
												^{222}Rn (Radon)		$222{,}0869_0$	α γ	$5{,}48_6$ $0{,}51_0$	3,825 d
87	Fr	**Francium** Francium Francium	223 (12)	1				7×10^{-23}				^{223}Fr (Actinium K)		$223{,}0896_0$	α β⁻ γ	$5{,}3_4$ $1{,}1_5$ 0,050–0,31	21 m
88	Ra	**Radium** Radium Radium	226,05	2	700	(1140)	fest (5)	7×10^{-12}			$<10^{-12}$	^{223}Ra (Actinium X)		$223{,}0883_2$	α γ	$5{,}71_9$/$5{,}43_3$–$5{,}75_0$ 0,026–0,44	11,68 d
												^{224}Ra (Thorium X)		224,09030	α γ	5,681/$5{,}44_8$/$5{,}19_4$ 0,241	3,64 d
												^{226}Ra		$226{,}0960_0$	α γ	4,777/4,591 0,186/$0{,}6_6$	1622 a
												^{228}Ra (Mesothorium I)		$228{,}1025_6$	β⁻ kein γ	<0,02	6,7 a

89	Ac	**Actinium** Actinium Actinium	227 ([12])	3	1050 ± 50				3×10^{-15}
90	Th	**Thorium** Thorium Thorium	232,05	4	1750	(> 3000)	fest	11,7	0,0025
91	Pa	**Protactinium** Protactinium Protactinium	231 ([12])	5	(< 1873)		fest	15,37	6×10^{-12}

^{227}Ac		227,0988$_8$	α β−	4,94 0,045$_5$	21,8 a
^{228}Ac (Mesothorium II)		228,1025$_1$	β− γ	1,11/0,45–2,18 0,057/0,098/0,127/1,59	6,13 h
^{227}Th (Radioactinium)		227,0987$_9$	α γ	5,97$_2$/5,70$_4$–6,03$_0$ 0,050/0,113/0,23$_6$/0,335	18,4 d
^{228}Th (Radiothorium)		228,1001$_1$	α γ	5,42$_1$/5,33$_8$/5,20$_8$/5,17$_3$ 0,084$_5$/0,212/0,137/0,169	1,91 a
^{230}Th (Ionium)		230,1050$_0$	α γ	4,68$_5$/4,61$_8$ 0,068/0,142/0,184	8×10^4 a
^{231}Th (Uran Y)		231,1086$_1$	β− γ	0,094/0,302/0,21$_6$ 0,022/0,085/0,061	25,64 h
^{232}Th	100	232,1108$_0$	α γ	3,98/3,93 0,055	$1{,}39\times10^{10}$ a
^{234}Th (Uran X$_1$)		234,1167$_8$	β− γ	0,193/0,103 0,092/0,063/0,029	24,10 d
^{231}Pa		231,1082$_7$	α γ	5,00$_6$/5,020/5,049 0,331/0,027/0,102	$3{,}43\times10^4$ a
^{234}Pa (Uran X$_2$)			β− γ IT	2,31 1,0/0,76	1,175 m
^{234}Pa (Uran Z)		234,1166	β− γ	0,5 0,099–0,567	6,66 h

Fußnoten siehe S. 224.

Ordnungszahl Z	Symbol	Element deutsch / französisch / englisch / (lateinisch)	Atomgewicht[1] 1957 (chem. Skala)	Valenzen	Schmelzpunkt bei 760 Torr, wenn nicht anders vermerkt °C	Siedepunkt bei 760 Torr, wenn nicht anders vermerkt °C	Dichte Gase: g/l bei 760 Torr und 0°C; Feste Stoffe: g/cm³ oder spez. Gewicht 20°/4°C, wenn nicht anders vermerkt	Relative Verbreitung: in der Erdkruste[3] %	in der Atmosphäre (Troposphäre)	im Weltall (Atome pro 10^6 Si-Atome)[4]	im menschl. Körper %	Natürliche Isotope[2]: Isotop (Massenzahl A)	Relative Häufigkeit Atome%	Atomgewicht[1] (physik. Skala)	Zerfallsart[5] (Strahlung)	Energie MeV	Halbwertzeit[6]
92	U	**Uran** Uranium Uranium	238,07	3, 4, 6	1131 ± 1	3818	fest 19,04/25°	2×10^{-5}				^{234}U (Uran II)	0,0058	$234,1140_8$	α γ	$4,76_8/4,70_7/4,59_3$ 0,018/0,053/0,12/0,09	$2,48\times10^5$ a
												^{235}U (Actinouran)	0,720	$235,1175_0$	α γ	4,39/4,57/4,18 0,18/0,37	$7,13\times10^8$ a
												^{238}U (Uran I)	99,274	$238,1252_2$	α γ	$4,18_0$ 0,045	$4,51\times10^9$ a

Fußnoten:

1) Über die chemische und physikalische Atomgewichtsskala siehe Fußnote *2*, S. 209.

2) Nach SULLIVAN, W. H., *Trilinear Chart of Nuclides*, Washington (United States Atomic Energy Commission, 1957). Nur die natürlich vorkommenden Isotope sind aufgeführt.

3) Die angegebenen Werte sind Prozentzahlen aus dem Gesamtgebiet der Lithosphäre (äußere 16 km), Hydrosphäre und Atmosphäre (nach REMY, H., *Lehrbuch der anorganischen Chemie*, 7. Aufl., Bd. 2, Leipzig [1954], S. 542).

4) Nach SUESS und UREY, *Rev. mod. Phys.*, **28**, 53 (1956).

5) α = Alphateilchen (Heliumkern = 2 Protonen + 2 Neutronen), β^- = Betateilchen (negativ geladenes Elektron), γ = Gammastrahlung, e^- = interne Elektronenumwandlung, K = Elektroneneinfang aus der K-Schale, IT = isomerer Übergang.

6) a = Jahr, d = Tag, h = Stunde, m = Minute, s = Sekunde.

7) Normaler Wasserstoff besteht aus einer Mischung von Ortho- und Para-Wasserstoff (Moleküle, deren zwei Kerne parallelen bzw. nichtparallelen Spin besitzen) im Verhältnis 3 : 1. Der Siedepunkt des reinen Ortho-Wasserstoffs ist 272,71°C. Vgl. WOOLLEY et al., *J. Res. nat. Bur. Stand.*, **41**, 379 (1948).

8) Mengenverhältnis $^1H : {}^3H$ = etwa $10^{17} : 1$ (Atome).

9) Auf Grund der natürlichen Variation des Isotopenmengenverhältnisses für Schwefel weist das Atomgewicht dieses Elementes einen Schwankungsbereich von ± 0,003 auf.

10) Primärer Fixpunkt der Internationalen Temperaturskala von 1948. Vgl. STIMSON, H. F., *J. Res. nat. Bur. Stand.*, **42**, 209 (1949).

11) Sekundärer Fixpunkt der Internationalen Temperaturskala von 1948. Vgl. STIMSON, H. F., *J. Res. nat. Bur. Stand.*, **42**, 209 (1949).

12) Massenzahl des stabilsten bekannten Isotops.

13) Das Atomgewicht des Iridiums wurde analytisch bestimmt; es ist noch nicht gelungen, das Element so rein darzustellen, daß das Atomgewicht mit dem aus der Isotopenzusammenstellung berechneten Wert übereinstimmt.

14) Über international anerkannte Dichtewerte für Quecksilber bei anderen Temperaturen siehe GRAY, D. E. (Hrsg.), *American Institute of Physics Handbook*, New York (1957), S. 2; KAYE und LABY, *Tables of Physical and Chemical Constants and Some Mathematical Functions*, 11. Aufl., London (1956), S. 31.

Ordnungszahl Z	Symbol	Transuranelement[1]	Atomgewicht (Massenzahl des stabilsten bekannten Isotops)	Valenzen	Schmelzpunkt °C	Siedepunkt °C	Dichte g/cm³	Isotope[2]				
								Isotop (Massenzahl A)	Atomgewicht (physikalische Skala)	Zerfallsart[3] (Strahlung)	Energie MeV	Halbwertzeit[4]
93	Np	**Neptunium**	237	3, 4, 5, 6	640 ± 1		fest: α-Form 20,2/20° β-Form 19,36/313°	^{231}Np	$231{,}1105_8$	α	6,28	50 m
								^{232}Np	$(232{,}1126_4)$	γ, K		~ 13 m
								^{233}Np	$233{,}1135_2$	α K	5,53	35 m
								^{234}Np	(234,1164)	α β+ γ K, L	~ 0,8 $0{,}44_5$–1,57	4,40 d
								^{235}Np	$235{,}1176_7$	α kein γ K, L	5,06	1,12 a
								^{236}Np	$236{,}1205_0$	β⁻ γ e⁻ K	$0{,}51_8$ $0{,}044_6/0{,}045_2$	22 h
								^{236}Np		β⁻		> 5000 a
								^{237}Np	$237{,}1222_0$	α γ	$4{,}78_7/4{,}76_7/4{,}87$ 0,087/0,02–0,20	$2{,}20 \times 10^6$ a
								^{238}Np	$238{,}1253_6$	β⁻ γ	1,26/0,26 0,044/0,102–1,03	2,10 d
								^{239}Np	$239{,}1277_7$	β⁻ γ	$0{,}32_9$/0,44 0,061/0,277 0,105/0,045–0,49	2,33 d
								^{240}Np	$240{,}1314_2$	β⁻ γ	2,16/1,59 0,040–1,50	7,3 m
								^{240}Np		β⁻ γ	0,9 0,97/0,88/1,14	60 m
								^{241}Np (?)		β⁻		16 m
94	Pu	**Plutonium**	242	3, 4, 5, 6	639,5		fest: α-Form 19,74/25° β-Form 17,65/150° flüssig 16,5 ± 0,08/665°	^{232}Pu	$232{,}1137_0$	α (K)	6,58	36 m
								^{233}Pu	$(233{,}1158_5)$	α K	6,3	20 m
								^{234}Pu	$234{,}1166_0$	α kein γ K	6,19	9 h
								^{235}Pu	$235{,}1189_0$	α K, L	5,85	26 m
								^{236}Pu	$236{,}1199_6$	α γ	5,75 ~ 0,045	2,7 a
								^{237}Pu	$(237{,}1224_3)$	γ K	~ 0,064	40 d

Fußnoten siehe S. 228.

Ordnungszahl Z	Symbol	Transuranelement[1]	Atomgewicht (Massenzahl des stabilsten bekannten Isotops)	Valenzen	Schmelzpunkt °C	Siedepunkt °C	Dichte g/cm³	Isotope[2]				
								Isotop (Massenzahl A)	Atomgewicht (physikalische Skala)	Zerfallsart[3] (Strahlung)	Energie MeV	Halbwertzeit[4]
94	Pu	**Plutonium** (Fortsetzung)	242	3, 4, 5, 6	639,5		fest: α-Form 19,74/25° β-Form 17,65/150° flüssig 16,5 ± 0,08/665°	^{238}Pu	$238{,}1239_6$	α γ	$5{,}49_5/5{,}45_2/5{,}35_2$ 0,044/0,100/0,15	89,6 a
								^{239}Pu	$239{,}1270_0$	α γ	$5{,}15_0/5{,}13_7/5{,}09_9$ 0,053/0,039	$2{,}44 \times 10^4$ a
								^{240}Pu	$240{,}1291_0$	α γ	$5{,}16_2/5{,}11_8$ 0,050	6600 a
								^{241}Pu	$241{,}1321_5$	α β⁻ γ	4,91 0,020 0,100/0,145	13,2 a
								^{242}Pu	$242{,}1344_5$	α	$4{,}89_8$	$3{,}8 \times 10^5$ a
								^{243}Pu	$243{,}1380_9$	β⁻ γ	0,57/0,47/0,37 0,085/0,12	4,98 h
								^{244}Pu	(244,1406)	α	(4,8)	7×10^7 a
								^{245}Pu	$(245{,}144_1)$	β⁻ γ		11 h
								^{246}Pu	(246,1471)	β⁻ γ	0,103/0,22/0,043/ $0{,}17_5$	11 d
95	Am	**Americium**	243	3, 4, 5, 6	>1100	1200	fest 11,7 ± 0,3	^{237}Am	$237{,}1239_6$	α K	6,01	~ 1,3 h
								^{238}Am	(238,1266)	kein α γ K, e⁻	$0{,}58/0{,}98/0{,}10_2$	1,86 h
								^{239}Am	$239{,}1278_4$	α γ K, e⁻	5,75 0,286/0,048	12 h
								^{240}Am	$(240{,}1305_6)$	γ K, e⁻	1,02/1,40/0,92	50 h
								^{241}Am	$241{,}1321_3$	α γ	$5{,}47_6/5{,}43_3$ 0,0596/0,026–0,37	462 a
								^{242}Am		β⁻ γ K	0,625 0,0422/0,045	16,0 h
								^{242}Am	$242{,}1351_9$	α β⁻ γ K	5,5 0,585 0,042	100 a
								^{243}Am	$243{,}1374_8$	α γ	5,267/5,224/5,169 0,075	8000 a

									^{244}Am	244,1409$_2$	β$^-$ K	1,50	26 m
									^{245}Am	(245,1428$_3$)	β$^-$ γ	0,9$_0$ 0,036/0,25$_5$/0,06–0,23$_2$	2,0 h
									^{246}Am	(246,1468)	β$^-$ γ	1,2 1,07/0,80/0,10$_3$/0,019	25 m
96	Cm	**Curium**	247	3			fest	(7)	^{238}Cm	238,1275$_7$	α K	6,5$_0$	2,5 h
									^{239}Cm	(239,1298)	K		~ 3 h
									^{240}Cm	240,1306$_6$	α	6,25	26,8 d
									^{241}Cm	(241,1331)	α γ K	5,90 0,47$_2$	35 d
									^{242}Cm	242,1345$_1$	α γ	6,110/6,066/5,96 0,044/0,100/0,15$_7$	162,5 d
									^{243}Cm	243,1374$_8$	α γ	5,777/5,732/5,985 0,334/0,278/0,23/ 0,21/0,045	~ 35 a
									^{244}Cm	244,1393$_1$	α γ	5,79$_8$/5,75$_5$/5,65$_5$ 0,043/0,100/0,150	18,4 a
									^{245}Cm	(245,1428$_3$)	α γ	5,3$_6$ 0,10/0,17	2 × 10^4 a
									^{246}Cm	(246,1441$_3$)	α	5,37$_3$	6600 a
									^{247}Cm	(247,1475$_0$)			> 10^6 a
									^{248}Cm	(248,1501)	α	5,05$_4$	4,2 × 10^5 a
									^{249}Cm	(249,153$_6$)	β$^-$		kurz
									^{250}Cm	250,0880	β$^-$		1,7 × 10^4 a
97	Bk	**Berkelium**	249	3, 4					^{243}Bk	243,1390$_5$	α γ	6,55/6,72/6,20 0,15–0,96	4,5 h
									^{244}Bk	(244,1415)	α γ K	6,66 0,90–1,7	4,4 h
									^{245}Bk	245,1429$_2$	α γ K	6,17/5,89/6,37 0,165/0,205/0,48	5,0 d
									^{246}Bk	(246,1457)	γ K	0,145–1,13	1,9 d
									^{247}Bk	(247,1476)	α γ	5,67/5,50/5,30 0,085/0,26$_5$/0,42?	7000 a
									^{248}Bk	248,1507	β$^-$	0,67	18 h
									^{249}Bk	(249,1526$_1$)	α β$^-$ γ	5,4$_0$/5,0$_8$ 0,10 0,32	290 d
									^{250}Bk	(250,1566$_4$)	β$^-$ γ	0,9/1,9 0,9	3,1 h
98	Cf	**Californium**	251	(3)					^{244}Cf	244,1423$_5$	α K	7,17	25 m
									^{245}Cf	(245,1446)	α	7,11	44 m
									^{246}Cf	246,1457$_5$	α γ	6,75$_3$/6,71$_1$ 0,044/0,097/0,14$_9$	35,7 h
									^{247}Cf	(247,1485)	γ K	0,28$_5$/0,49	2,4 h
									^{248}Cf	248,1500$_2$	α	6,26	250 d

Fußnoten siehe S. 228.

Ordnungszahl Z	Symbol	Transuranelement[1]	Atomgewicht (Massenzahl des stabilsten bekannten Isotops)	Valenzen	Schmelzpunkt °C	Siedepunkt °C	Dichte g/cm³	Isotope[2]				
								Isotop (Massenzahl A)	Atomgewicht (physikalische Skala)	Zerfallsart[3] (Strahlung)	Energie MeV	Halbwertzeit[4]
98	Cf	**Californium** (Fortsetzung)	251	(3)				^{249}Cf	(249,1525)	α γ	5,82/5,91/6,19 0,40/0,34	470 a
								^{250}Cf	$250{,}1546_0$	α γ	6,02/5,98 $0{,}042_8$	10 a
								^{251}Cf	(251,1580)			~ 700 a
								^{252}Cf	(252,1607)	α γ	$6{,}11_2$/6,07 0,043/0,10	2,2 a
								^{253}Cf	$(253{,}163_9)$	β⁻		18 d
								^{254}Cf	(254,1668)			60 d
99	Es	**Einsteinium** (5)	254 (?)	(3)				^{246}Es	$(246{,}150_2)$	K		kurz
								^{247}Es	247,1509	α K	7,35	7,3 m
								^{248}Es	(248,1531)	α	$6{,}8_7$	25 m
								^{249}Es	(249,1542)	α	6,76	2 h
								^{250}Es	$(250{,}156_7)$	α?		8 h
								^{251}Es	$(251{,}158_6)$	α	6,48	1,5 d
								^{252}Es	(252,1617)	α	6,64	~ 140 d
								^{253}Es	(253,1637)	α γ	6,63/6,60/6,55 0,042/0,39	20 d
								^{254}Es	$254{,}167_5$	β⁻ γ K	$1{,}0_4$ 0,68	38 h
								^{254}Es	$254{,}167_3$	α	6,44	300 d
								^{255}Es	$(255{,}169_8)$	β⁻		30 d
								^{256}Es	$(256{,}174_2)$	β⁻		kurz
100	Fm	**Fermium** (5)	253	(3)				^{250}Fm	(250,1577)	α	7,4	30 m
								^{250}Fm		α		~ 0,5 h
								^{251}Fm	$(251{,}160_0)$	α	6,9	7,5 h
								^{252}Fm	252,1616	α	$7{,}0_4$	36 h
								^{253}Fm	(253,1642)	α	$6{,}8_5$	> 7 d
								^{254}Fm	(254,1663)	α γ	7,22/7,18 0,042/0,094	3,38 h
								^{255}Fm	(255,1696)	α	7,08	21,5 h
								^{256}Fm	$(256{,}172_1)$			3,1 h
101	Md	**Mendelevium**	256	(3)				^{256}Md	$(256{,}173_8)$	K		1 h
102	No	**Nobelium**	253 (?)					(^{253}No)		α	8,5	~ 10 m

1) Die Transurane sind als künstlich hergestellte Elemente bekanntgeworden. Sie sind aber in dem Sinne ebenfalls als natürliche Elemente anzusehen, als sie auch in der Natur vorgekommen bzw. in geringsten Mengen heute noch (zum Beispiel Plutonium 239) nachzuweisen sind. Sie sind gewissermaßen «ausgestorben», weil ihre Halbwertzeit relativ kurz ist.

2) Nach SULLIVAN, W. H., *Trilinear Chart of Nuclides*, Washington (United States Atomic Energy Commission, 1957).

3) α = Alphateilchen (Heliumkern = 2 Protonen + 2 Neutronen), β⁻ = Betateilchen (negativ geladenes Elektron), γ = Gammastrahlung, e⁻ = interne Elektronenumwandlung, K, L = Elektroneneinfang aus der K- bzw. L-Schale, IT = isomerer Übergang. 4) a = Jahr, d = Tag, h = Stunde, m = Minute, s = Sekunde.

5) Einsteinium und Fermium wurden erstmals 1952 in den Atomtrümmern nach der Wasserstoffbombenexplosion auf Eniwetok gefunden.

Elektronenstruktur der Elemente[1]

Z = Ordnungszahl; E_r = Resonanzenergie (eV); E_i = Ionisierungsenergie (eV); E_{i_1} = Resonanzenergie des einfach ionisierten Atoms (eV)

Z	Element	E_r	E_i	E_{i_1}	K	L		M			N				O				P			Q
					$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$	$3d$	$4s$	$4p$	$4d$	$4f$	$5s$	$5p$	$5d$	$5f$	$6s$	$6p$	$6d$	$7s$
1	H	10,19	13,60		1																	
2	He	21,20	24,58	40,8	2																	
3	Li	1,85	5,39	62,2	2	1																
4	Be	5,28	9,32	3,96	2	2																
5	B	4,96	8,30	9,10	2	2	1															
6	C	7,48	11,26	9,29	2	2	2															
7	N	10,3	14,54	11,4	2	2	3															
8	O	9,52	13,61	14,8	2	2	4															
9	F	12,98	17,42	20,42	2	2	5															
10	Ne	16,84	21,56	26,89	2	2	6															
11	Na	2,10	5,14	33,3	2	2	6	1														
12	Mg	4,34	7,64	4,42	2	2	6	2														
13	Al	3,14	5,98	7,42	2	2	6	2	1													
14	Si	4,92	8,15	6,86	2	2	6	2	2													
15	P	6,94	10,95	8,09	2	2	6	2	3													
16	S	6,86	10,36	9,84	2	2	6	2	4													
17	Cl	9,21	13,01	11,56	2	2	6	2	5													
18	Ar	11,53	15,75	13,47	2	2	6	2	6													
19	K	1,61	4,34	20,6	2	2	6	2	6		1											
20	Ca	2,93	6,11	3,12	2	2	6	2	6		2											
21	Sc	2,32	6,56	3,40	2	2	6	2	6	1	2											
22	Ti	1,97	6,83	3,66	2	2	6	2	6	2	2											
23	V	2,24	6,74	4,40	2	2	6	2	6	3	2											
24	Cr	2,89	6,76	6,00	2	2	6	2	6	5	1											
25	Mn	3,07	7,43	4,76	2	2	6	2	6	5	2											
26	Fe	3,21	7,90	5,20	2	2	6	2	6	6	2											
27	Co	3,57	7,86	5,83	2	2	6	2	6	7	2											
28	Ni	3,54	7,63	6,39	2	2	6	2	6	8	2											
29	Cu	3,79	7,72	8,26	2	2	6	2	6	10	1											
30	Zn	4,03	9,39	5,91	2	2	6	2	6	10	2											
31	Ga	3,07	6,00	8,78	2	2	6	2	6	10	2	1										
32	Ge	4,64	8,13	8,06	2	2	6	2	6	10	2	2										
33	As	6,28	9,81	9,14	2	2	6	2	6	10	2	3										
34	Se	6,32	9,75	10,39	2	2	6	2	6	10	2	4										
35	Br	8,32	11,84	12,21	2	2	6	2	6	10	2	5										
36	Kr	10,03	13,99	15,82	2	2	6	2	6	10	2	6										
37	Rb	1,59	4,17	17,8	2	2	6	2	6	10	2	6			1							
38	Sr	2,69	5,69	2,94	2	2	6	2	6	10	2	6			2							
39	Y	1,99	6,57	2,91	2	2	6	2	6	10	2	6	1		2							
40	Zr	2,02	6,95	3,47	2	2	6	2	6	10	2	6	2		2							
41	Nb	2,97	6,77	4,13	2	2	6	2	6	10	2	6	4		1							
42	Mo	3,18	7,18	6,08	2	2	6	2	6	10	2	6	5		1							
43	Tc	2,88	7,45	4,68	2	2	6	2	6	10	2	6	(5)		(2)							
44	Ru	3,26	7,5	6,29	2	2	6	2	6	10	2	6	7		1							
45	Rh	3,35	7,7	4,97	2	2	6	2	6	10	2	6	8		1							
46	Pd	4,22	8,33	8,12	2	2	6	2	6	10	2	6	10									
47	Ag	3,66	7,58	11,1	2	2	6	2	6	10	2	6	10		1							
48	Cd	3,80	8,99	5,47	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2							
49	In	3,02	5,78	7,82	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	1						
50	Sn	4,30	7,33	7,30	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	2						
51	Sb	5,36	8,64	9,56	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	3						
52	Te	5,78	9,01	8,82	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	4						
53	I	7,67	10,44	10,04	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	5						
54	Xe	8,44	12,13	11,27	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	6						
55	Cs	1,38	3,89	15,2	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	6			1			
56	Ba	2,24	5,21	2,51	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	6			2			
57	La	1,64	5,61	1,75	2	2	6	2	6	10	2	6	10		2	6	1		2			
58	Ce		6,91	2,72	2	2	6	2	6	10	2	6	10	2	2	6			2?			
59	Pr		5,76	2,81	2	2	6	2	6	10	2	6	10	3	2	6			2?			
60	Nd		6,31	2,63	2	2	6	2	6	10	2	6	10	4	2	6			2?			
61	Pm				2	2	6	2	6	10	2	6	10	5	2	6			2?			
62	Sm	1,71	5,6	2,63	2	2	6	2	6	10	2	6	10	6	2	6			2			
63	Eu	1,74	5,67	2,95	2	2	6	2	6	10	2	6	10	7	2	6			2			
64	Gd	1,665	6,16	3,18	2	2	6	2	6	10	2	6	10	7	2	6	1		2			
65	Tb		6,74		2	2	6	2	6	10	2	6	10	8	2	6	1		2?			
66	Dy		6,82		2	2	6	2	6	10	2	6	10	9	2	6	1		2?			
67	Ho				2	2	6	2	6	10	2	6	10	10	2	6	1		2?			
68	Er				2	2	6	2	6	10	2	6	10	11	2	6	1		2?			
69	Tm	2,62?		2,68	2	2	6	2	6	10	2	6	10	13	2	6			2			
70	Yb	2,23	6,2	3,35	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6			2			
71	Lu	2,16?	5,0	3,38	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	1		2			
72	Hf	2,19	5,5	3,43	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	2		2			
73	Ta	2,44	6	3,63	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	3		2			
74	W	2,49	7,98	4,48	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	4		2			
75	Re	3,57	7,88		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	5		2			
76	Os	2,80	8,7		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	6		2			
77	Ir	4,65	9,2		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	7		2			
78	Pt	4,04	8,97	6,38	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	9		1			
79	Au	4,63	9,22	7,81	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		1			
80	Hg	4,89	10,43	6,38	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2			
81	Tl	3,28	6,11	9,38	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	1		
82	Pb	4,33	7,42	7,35	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	2		
83	Bi	4,04	8,0	8,63	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	3		
84	Po		7,25		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	4		
85	At				2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	5		
86	Rn	6,78	10,75		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6		
87	Fr				2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6		1
88	Ra	2,57	5,28	2,65	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6		2
89	Ac				2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6	1	2?
90	Th			2,12	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10		2	6	2	2?
91	Pa				2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	2	2	6	1	2?
92	U	1,44	~ 4	3,21	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	3	2	6	1	2?
93	Np				2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	4	2	6	1	2?
94	Pu				2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	5	2	6	1	2?
95	Am				2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	7	2	6		2?
96	Cm				2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	7	2	6	1	2?
97	Bk				2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	8	2	6	1	2?
98	Cf				2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	10	2	6		2?
99	Es				2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	11	2	6		2?
100	Fm				2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	12	2	6		2?
101	Md				2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	13	2	6		2?

1) Nach MAVRODINEANU und BOITEUX, *L'Analyse spectrale quantitative par la flamme*, Masson, Paris (1954). Wiedergabe mit freundlicher Erlaubnis des Verlegers. Ergänzt durch HODGMAN et al. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry and Physics, 1958/59*, 40. Aufl., Cleveland (1958).

Die Tabelle enthält, nach steigender Wellenlänge in Ångström geordnet, Spektrallinien und Bandenköpfe, die in Luft-Acetylen- und Sauerstoff-Acetylen-Flammen registriert wurden, sowie das Symbol des Emissionszentrums (Atom, Ion oder Molekül). Die Angaben für die Wellenlänge sind auf die erste Dezimalstelle gerundet. Die Abkürzungen bedeuten:

Kolonne 1: Die Buchstaben «R» bzw. «V» nach der Wellenlänge bezeichnen einen Bandenkopf; «R» bedeutet Abweichung der Bande in Richtung der größeren, «V» in Richtung der kleineren Wellenlänge.

Kolonne 2: «*F*» bedeutet, daß die Bande der Flamme selbst entstammt; «II» bezeichnet ein einfach ionisiertes Atom.

Kolonne 3: «A» bedeutet, daß die Spektrallinie oder die Bande in Luft-Acetylen-Flammen erscheinen, «O», daß sie in Sauerstoff-Acetylen-Flammen auftreten, «K», daß die Spektrallinien nur im inneren Flammenkegel erscheinen, und «Res» gibt eine Resonanzlinie an.

Wellenlänge Å	Emissionszentrum	Bemerkungen (siehe oben)	Wellenlänge Å	Emissionszentrum	Bemerkungen (siehe oben)	Wellenlänge Å	Emissionszentrum	Bemerkungen (siehe oben)
2428,0	Au	A, Res	3034,1	Sn	A, K, Res	3380,9	Ni	O
47,9	Pd	O	37,4	Fe	A	81,7 R	SnO	A
76,4	Pd	O	37,9	Ni	O	82,9	Ag	A, Res
78,6	C	O, K	39,4	In	A	85,2	Co	A
83,3	Fe	O	44,0	Co	A	88,2	Co	A
88,1	Fe	O	47,6	Fe	A	88,3 R	SnO	A
90,6	Fe	O	50,8	Ni	O	91,1	Ni	A
2522,8	Fe	O	57,6	Ni	O	93,0	Ni	A
27,4	Fe	O	59,1	Fe	A	95,4	Co	A
36,5	Hg	A, Res	64,0 R	(*F*, OH)	A, O	96,9	Rh	A, Res
2609,0 R	(*F*, OH)	O, K	64,6	Ni	O	3404,6	Pd	A, Res
13,7	Pb	O	64,7	Pt	A, Res	05,1	Co	A
14,2	Pb	O	75,9	Zn	A, K, Res	06,9 R	SnO	A
59,4	Pt	O	3122,0 R	(*F*, OH)	A, O	09,2	Co	A
61,2	Sn	A, K	32,6	Mo	A, K	12,3	Co	A
76,0	Au	A, Res	34,1	Ni	O	12,6	Co	A
77,0 R	(*F*, OH)	O, K	44,0	(*F*, CH)	A, O	14,8	Ni	A, Res
2706,5	Sn	A, K, Res	58,2	Mo	A, K	15,8 R	SnO	A
53,0 R	(*F*, OH)	O, K	70,3	Mo	A, K	17,2	Co	A
61,8	Sn	A, K	75,0	Sn	A, K, Res	21,2	Pd	A, Res
63,1	Pd	O	85,0 R	(*F*, OH)	A, O	23,7	Ni	A
67,9	Tl	A	94,0	Mo	A, K	28,0 R	(*F*, OH)	O
76,7	Mg	A, K	3205,8 R	SnO	A	28,3	Ru	A
78,3	Mg	A, K	08,8	Mo	A, K	31,6	Co	A
79,8	Mg	A, K	32,6	Li	A	33,0	Co	A
79,8	Sn	A, K	33,0	Ni	O	33,4	Pd	O
81,4	Mg	A, K	42,7	Pd	A	33,6	Ni	A
83,0	Mg	A, K	43,1	Ni	O	34,9	Rh	A
85,0	Sn	A, K	47,5	Cu	A, Res	36,7	Ru	A
94,8	Mn	A	51,4 R	SnO	A	37,3	Ni	A
95,5	Mg II	A	54,0 R	(*F*, OH)	O	40,6	Fe	A
98,3	Mn	A	56,1	In	A	41,0	Fe	A
2801,1	Mn	A	58,6	In	A	41,4	Pd	O
02,7	Mg II	A	61,1	Cd	A, Res	43,6	Co	A
11,0 R	(*F*, OH)	A, K; O	62,3	Sn	A, K	44,6 R	SnO	A
13,6	Sn	A, K	62,4	SnO	A	46,3	Ni	A
33,1	Pb	A, Res	74,0	Cu	A, Res	46,4	K	A
40,0	Sn	A, K, Res	80,7	Ag	A, Res	47,4	K	A
50,6	Sn	A, K	82,3	Zn	A, K	49,2	Co	A
52,1	Mg	A, Res	91,8 R	SnO	A	49,4	Co	A
63,3	Sn	A, K, Res	3302,1	Pd	A	52,9	Ni	A
74,2	Ga	O	02,3	Na	A	53,5	Co	A
75,0 R	(*F*, OH)	O	03,0	Na	A	55,2	Co	A
2943,6	Ga	O	15,7	Ni	O	55,2	Rh	O
44,2	Ga	O	23,1	Rh	O	58,5	Ni	A
45,0 R	(*F*, OH)	O	23,4 R	SnO	A	60,8	Pd	A
66,9	Fe	A	29,9	Mg	A, K	61,7	Ni	A
73,1	Fe	A	30,6	Sn	A, K	62,0	Rh	O
73,2	Fe	A	32,2	Mg	A, K	62,8	Co	A
83,6	Fe	A	34,1	Co	A	65,8	Co	A
94,4	Fe	A	36,7	Mg	A, K	65,9	Fe	A
			45,0	Zn	A, K	72,5	Ni	A
3000,9	Fe	A	45,6	Zn	A, K	74,0	Co	A, Res
02,5	Ni	O	45,9	Zn	A, K	75,4	Fe	A
03,6	Ni	O	54,4	Co	A	81,2	Pd	A
08,1	Fe	A	60,0	(*F*, NH)	A, K; O	83,4	Co	A
09,1	Sn	A, K, Res	67,1	Co	A	83,8	Ni	A
12,0	Ni	O	69,6	Ni	A	84,5 R	SnO	A
20,5	Fe	A	73,0	Pd	A	85,0 R	(*F*, OH)	O
20,6	Fe	A	80,6	Ni	A	90,6	Fe	A

1) Modifiziert nach MAVRODINEANU und BOITEUX, *L'analyse spectrale quantitative par la flamme*, Masson, Paris (1954). Wiedergabe mit freundlicher Erlaubnis des Verlages. Ergänzt nach HODGMAN et al. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry and Physics, 1958/59*, 40. Aufl., Cleveland (1958).

Wellenlänge Å	Emissions-zentrum	Bemerkungen (siehe S. 230)	Wellenlänge Å	Emissions-zentrum	Bemerkungen (siehe S. 230)	Wellenlänge Å	Emissions-zentrum	Bemerkungen (siehe S. 230)
3493,0	Ni	A, Res	3619,4	Ni	A	3806,8	Rh	O
95,7	Co	A	26,6	Rh	O	07,1	Ni	A
98,7	Rh	O	27,8	Co	A	11,3	MgO	A
98,9	Ru	A	31,5	Fe	A	18,2	Rh	O
3502,3	Co	A	34,7	Pd	A, Res	20,4	Fe	A
02,5	Rh	A	34,9	Ru	O	22,3	Rh	O
06,3	Co	A	39,6	Pb	A, Res	23,3	Mg	A, K
07,3	Rh	O	42,7	MgO	A	25,9	Fe	O
09,8	Co	A	47,7	Co	A	27,8	Fe	O
10,3	Ni	A	47,8	Fe	O	28,5	Rh	O
12,6	Co	A	47,9	Fe	A	29,4	Mg	A, K
12,9 R	SnO	A	48,6	MgO	A	32,3	Mg	A, K
13,5	Co	A	52,5	Co	A	32,3	Pd	O
15,1	Ni	A, Res	58,0	Rh	A	33,2 R	SnO	A
16,9	Pd	A	61,4	Ru	A	33,9	Rh	O
19,2	Tl	A	66,2	Rh	O	34,2	Fe	A
20,1	Co	A	74,8	MgO	A	38,3	Mg	A, K
21,3	Fe	A	79,9	Fe	A	40,4	Fe	A
21,6	Co	O	81,6	MgO	A	42,1	Co	A
23,4	Co	O	83,0	Fe	A	48,5	MgO	A
24,5	Ni	A, Res	83,5	Pb	A, Res	49,8	MgO	A
26,8	Co	O	90,3	Pd	O	54,7	(*F*, CN)	A, K
28,0	Rh	A	90,7	Rh	A	56,4	Fe	A, Res
29,0	Co	O	91,4 R	SnO	A	56,5	Rh	O
29,4	Tl	A	92,4	Rh	A	58,3	Ni	A
29,8	Co	A	3700,9	Rh	A	59,9	Fe	A, Res
33,4	Co	A	05,6	Fe	A	61,9	(*F*, CN)	A, K
38,1	Rh	O	09,6 V	LaO	A	64,1	Mo	A, K, Res
42,4 R	SnO	A	13,0	Rh	O	71,4	(*F*, CN)	A, K
43,9	Rh	O	18,9	Pd	O	72,0 R	(*F*, CH)	A, K
49,5	Rh	O	20,0	Fe	A	73,1	Co	A
50,6	Co	A	20,7	MgO	A	74,0	Co	A
53,1	Pd	A	21,0	MgO	A	76,4	Cs	A
65,4	Fe	A	21,2 R	SnO	A	78,6	Fe	A, Res
66,2 V	LaO	A	22,6	Fe	A	81,9	Co	A
66,4	Ni	A	24,4	MgO	A	84,3	(*F*, CH)	A, K
69,4	Co	A	24,8	MgO	A	86,3	Fe	A, Res
70,1	Fe	A	25,9	MgO	A	88,7	Cs	A
70,2	Rh	A	26,9	Ru	A, Res	94,1	Co	A
71,2	Pd	O	28,0	Ru	A, Res	94,2	Pd	O
71,9	Ni	A	30,4	Ru	O	95,7	Fe	A, Res
75,0	Co	A	33,3	Fe	O	99,3 R	SnO	A
75,4	Co	A	34,9	Fe	A	99,7	Fe	A, Res
78,7	Cr	A	37,1	Fe	A	3902,9	Fe	A
81,2	Fe	A	42,3	Ru	A	03,0	Mo	A, K, Res
83,1	Rh	A	45,6	Fe	A	05,1	MgO	A
83,9	(*F*, CN)	A, K	48,2	Rh	O	10,9	MgO	A
85,4 R	SnO	A	48,3	Fe	O	20,3	Fe	A, Res
85,9	(*F*, CN)	A, K	49,5	Fe	A	22,9	Fe	A, Res
87,1	Rb	A	52,3 R	SnO	A	25,9	Ru	A
87,2	Co	A	55,9	Ru	O	27,9	Fe	A, Res
89,2	Ru	A	58,2	Fe	A	30,3	Fe	A, Res
90,4	(*F*, CN)	A, K	63,8	Fe	A	31,8	Ru	A
91,6	Rb	A	65,1	Rh	O	33,7	Ca II	A
93,0	Ru	A	66,5	MgO	A	34,2	Rh	O
93,5	Cr	A	67,2	Fe	A	38,4	MgO	A
94,9	Co	A	72,2	MgO	A	43,7	MgO	A
96,2	Rh	O	75,7	Tl	A, Res	44,0	Al	A, Res
96,2	Ru	O	78,2	MgO	A	51,0 R	SnO	A
97,1	Rh	O	86,1	Ru	O	58,6	Pd	O
97,7	Ni	A	87,9	Fe	A	58,9	Rh	O
3602,1	Co	A	88,5	Rh	O	61,5	Al	A, Res
04,6 V	LaO	A	90,5	Ru	A	68,5	Ca II	A
05,3	Cr	A	93,2	Rh	O	83,9 R	SnO	A
08,1 V	LaO	A	98,1	Ru	A	95,3	Co	A
08,9	Fe	A	98,3	Mo	A, K, Res			
09,5	Pd	A	98,9	Ru	A	4030,8	Mn	A, Res
10,5	Ni	A	99,1	MgO	A	33,0	Ga	A, Res
11,5 V	LaO	A	99,2	Pd	O	33,1	Mn	A, Res
12,5	Rh	O	99,3	Ru	A	34,5	Mn	A, Res
12,7	Ni	A	99,3	Rh	O	44,2	K	A
14,7 R	SnO	A	3801,0	Sn	A, K	45,8	Fe	O
14,9 V	LaO	A	02,7 R	SnO	A	47,2	K	A
18,8	Fe	A	05,0	MgO	A	57,8	Pb	A, Res

Wellenlänge Å	Emissionszentrum	Bemerkungen (siehe S. 230)	Wellenlänge Å	Emissionszentrum	Bemerkungen (siehe S. 230)	Wellenlänge Å	Emissionszentrum	Bemerkungen (siehe S. 230)
4071,7	Fe	O	4636,8 R	BaO	A	5492,7 R	BaO	A
77,7	Sr II	A	48,2 R	AlO	A	5501,9 V	(F, C_2)	A, K; O, K
80,6	Ru	A	63,5 R	BaO	A	06,5 R	CaO	A
82,8	Rh	O	72,0 R	AlO	A	09,7 R	BaO	A
4101,8	In	A, Res	78,6 V	(F, C_2)	A, K	27,9 R	FeO	A
08,9 R	SnO	A	80,3 R	BaO	A	35,6	Ba	A, Res
12,7	Ru	O	84,8 V	(F, C_2)	A, K	40,7 V	(F, C_2)	A, K; O, K
18,8	Co	A	94,6 R	AlO	A	43,2 R	FeO	A
21,3	Co	A	97,6 V	(F, C_2)	A, K	43,7 R	CrO	A
28,9	Rh	O	4715,2 V	(F, C_2)	A, K	44,0	Ca	
35,3	Rh	O	15,5 R	AlO	A	47,8 R	BaO	A
44,4 R	SnO	A	22,2	Zn	A, K	64,1 R	CrO	A
72,1	Ga	A, Res	22,7 R	BaO	A	82,5 R	FeO	A
96,5	Rh	O	35,8 R	AlO	A	85,5 V	(F, C_2)	A, K; O, K
98,9	Ru	O	37,1 V	(F, C_2)	A, K	86,4 R	MnO	A
4201,9	Rb	A	41,0 R	BaO	A	92,0	$MnCl_2$	
06,0	Ru	O	70,1 R	(F, C_2)	O, K	5602,4 R	LaO	A
11,1	Rh	O	84,1 R	BaO	A	02,4 R	BaO	A
12,1	Ru	O	4810,5	Zn	A, K	09,5 R	MnO	A
13,0	Pd	O	30,0 R	BaO	A	13,9 R	FeO	A
15,5	Sr II	A	36,1 R	(F, C_2)	O, K	23,3 R	CrO	A
15,6	Rb	A	42,3 R	AlO	A	28,6 R	LaO	A
26,7	Ca	A, Res	50,6 R	BaO	A	35,5 V	(F, C_2)	A, K; O, K
40,3 R	SnO	A	66,4 R	AlO	A	38,9 R	MnO	A
54,3	Cr	A, Res	73,8 R	BaO	A	44,1 R	BaO	A
71,8	Fe	O	96,5 R	BaO	A	54,8 R	LaO	A
74,8	Cr	A, Res	4911,0 R	(F, C_2)	O, K	59,0 R	BaO	A
89,7	Cr	A, Res	34,1	Ba II	A	72,9 R	BaO	A
4307,9	Fe	O	41,7 R	BaO	A	81,1 R	LaO	A
12,5 V	(F, CH)	A, K	65,4 R	BaO	A	85,1 R	CrO	A
24,0	(F, CH)	A, K	96,7 R	(F, C_2)	O, K	99,0	Ru	A
25,8	Fe	O				5710,0 R	BaO	A
52,6 R	AlO	A	5012,4 R	BaO	A	13,7 R	BaO	A
65,2 V	(F, C_2)	A, K	86,7 R	BaO	A	19,3 R	CaO	A
71,4 V	(F, C_2)	A, K	97,7 V	(F, C_2)	A, K; O, K	48,7 R	CrO	A
72,0 R	LaO	A	5129,3 V	(F, C_2)	A, K; O, K	58,4 R	BaO	A
73,7 R	AlO	A	37,0	Ba		70,1 R	BaO	A
74,8	Rh	O	58,0	$MnCl_2$		89,6 R	FeO	A
75,8 R	LaO	A	65,2 V	(F, C_2)	A, K; O, K	94,4 R	CrO	A
79,7 R	LaO	A	93,0	B		5805,1 R	BaO	A
82,5 V	(F, C_2)	A, K	93,0	$MnCl_2$		05,6 R	FeO	A
83,5	Fe	O	5204,5	Cr	A	12,2 R	CaO	A
83,5 R	LaO	A	06,0	Cr	A	17,6 R	BaO	A
87,6 R	LaO	A	08,4	Cr	A	18,4 R	FeO	A
91,6 R	LaO	A	14,7 R	BaO	A	29,2 R	BaO	A
93,8 R	AlO	A	30,0	$MnCl_2$		52,1 R	CrO	A
95,7 R	LaO	A	81,2 R	CaO	A	59,6 R	MnO	A
4404,7	Fe	O	5346,0 R	CaO	A	64,5 R	BaO	A
18,2 R	LaO	A	47,0	Ba		67,6 R	FeO	A
23,2 R	LaO	A	49,7 R	BaO	A	69,5 R	LaO	A
28,1 R	LaO	A	50,5	Tl	A, Res	75,3 R	BaO	A
33,0 R	LaO	A	56,4 R	CrO	A	80,3 R	MnO	A
38,0 R	LaO	A	59,4 R	MnO	A	86,9 R	BaO	A
43,0 R	LaO	A	60,0	$MnCl_2$		90,0	Na	A, Res
48,0 R	LaO	A	66,7 R	BaO	A	95,9	Na	A, Res
70,5 R	AlO	A	82,5 R	LaO	A	96,7 R	LaO	A
94,0 R	AlO	A	89,4 R	MnO	A	5902,6 R	FeO	A
4511,3	In	A, Res	92,0	$MnCl_2$		09,1 R	MnO	A
16,4 R	AlO	A	94,7	Mn	A	13,1 R	CrO	A
24,0 R	BaO	A	5402,7 R	BaO	A	23,4 V	(F, C_2)	A, K; O, K
24,7	Sn	A, K	07,7 R	LaO	A	24,0 R	LaO	A
28,7	Rh	O	16,5 R	CrO	A	25,1 R	BaO	A
37,6 R	AlO	A	19,8 R	BaO	A	51,3 R	LaO	A
37,8 R	BaO	A	23,8 R	MnO	A	58,7 V	(F, C_2)	A, K; O, K
54,0	Ba II	A	24,0	$MnCl_2$		75,0 R	NdO	A
54,5	Ru	O	32,5	Mn	A	75,9 R	CrO	A
55,4	Cs	A	33,1 R	LaO	A	76,3 R	BaO	A
57,6 R	AlO	A	40,0	B		78,8 R	LaO	A
76,3 R	AlO	A	54,6 R	BaO	A	84,9 R	BaO	A
79,4 R	BaO	A	58,7 R	LaO	A			
84,4	Ru	O	70,3 V	(F, C_2)	A, K; O, K	6002,2 V	CaO	A
93,2	Cs	A	75,0 R	CaO	A	03,0 V	NdO	A
4607,3	Sr	A	79,2 R	CrO	A	04,9 V	(F, C_2)	A, K; O, K
21,1 R	BaO	A	81,0	B		39,6 R	BaO	A

Wellenlänge Å	Emissionszentrum	Bemerkungen (siehe S. 230)	Wellenlänge Å	Emissionszentrum	Bemerkungen (siehe S. 230)	Wellenlänge Å	Emissionszentrum	Bemerkungen (siehe S. 230)
6042,8 R	CrO	A	6771,8 R	CrO	A	7800,3	Rb	A, Res
51,6 R	CrO	A	82,8 R	BaO	A	15,2 R	BaO	A
59,7 V	(F, C_2)	A, K; O, K	6829,2 R	CrO	A	42,8 R	CrO	A
60,0	Sr		57,2 R	BaO	A	52,8 R	SrO	A
85,1 V	SrO	A	58,8 V	(F, C_2)	O, K	82,3 R	SrO	A
90,2 V	SrO	A	61,4 V	SrO	A	7902,0 R	SrO	A
94,8 R	FeO	A	67,9 V	SrO	A	05,1 R	BaO	A
96,5 V	SrO	A	75,6 V	SrO	A	08,0 R	CrO	A
6101,3 V	SrO	A	84,5 V	SrO	A	10,5 R	LaO	A
02,3 R	BaO	A	91,5 R	CrO	A	44,9 R	LaO	A
03,6	Li	A	6931,4 R	BaO	A	47,6	Rb	A, Res
07,5 V	SrO	A	39,0	K	A	79,7 R	LaO	A
08,0 R	CrO	A	57,2 R	CrO	A			
09,3 R	FeO	A	64,7	K	A	8014,8 R	LaO	A
09,9 V	SrO	A	73,3	Cs		15,7	Cs	A
11,0 R	BaO	A				50,2 R	LaO	A
11,9 V	SrO	A	7007,1 R	BaO	A	78,9	Cs	A
16,2 V	SrO	A	11,2 R	LaO	A	79,0	Cs	A
16,2 R	BaO	A	22,0 R	FeO	A	86,1 R	LaO	A
22,1 V	(F, C_2)	A, K; O, K	27,5 R	CrO	A	8112,0 R	FeO	A
54,9 R	MnO	A	40,8 R	LaO	A	22,2 R	LaO	A
65,1 R	BaO	A	70,8 R	LaO	A	53,1 R	CaO	A
67,3 R	CrO	A	97,4 R	BaO	A	59,0 R	LaO	A
69,6 R	BaO	A	7101,0 R	LaO	A	64,7 R	CaO	A
75,9 R	MnO	A	31,6 R	LaO	A	67,3 R	CaO	A
80,7 R	FeO	A	62,6 R	LaO	A	83,3	Na	A
82,0	Ca		76,6 R	BaO	A	94,8	Na	A
91,2 V	(F, C_2)	A, K; O, K	87,1 R	CrO	A	96,1 R	LaO	A
6203,0	Ca		93,7 R	LaO	A	8230,0 R	FeO	A
03,2 R	MnO	A	7208,0 V	SrO	A	33,1 R	LaO	A
13,0	Cs		49,1 R	CrO	A	57,8 R	SrO	A
18,3 R	FeO	A	54,3 R	BaO	A	70,7 R	LaO	A
24,7 R	BaO	A	64,5 V	SrO	A	72,2 R	SrO	A
29,1 R	CrO	A	86,0 V	SrO	A	8302,0 R	FeO	A
69,0 V	CaO	A	7308,3 R	CaO	A	60,3 R	CrO	A
91,0 R	BaO	A	13,8 R	CrO	A	8453,5 R	LaO	A
94,1 R	CrO	A	18,5 R	CaO	A	90,0 R	LaO	A
6358,0 R	BaO	A	26,0 R	CaO	A	8521,1	Cs	A, Res
63,7 R	CrO	A	36,9 R	BaO	A	26,6 R	LaO	A
94,3 R	CrO	A	75,3 R	CrO	A	63,5 R	LaO	A
6411,0 R	NdO	A	7403,5 R	LaO	A	78,0 R	FeO	A
23,1 R	BaO	A	28,0 R	FeO	A	8600,8 R	LaO	A
25,0 R	NdO	A	34,3 R	LaO	A	38,5 R	LaO	A
40,0 R	NdO	A	36,0 V	SrO	A	52,2 R	CaO	A
42,3 V	(F, C_2)	O, K	39,5 R	CrO	A	76,6 R	LaO	A
51,5 R	CrO	A	40,4 R	BaO	A	8700,0 R	SrO	A
80,5 V	(F, C_2)	O, K	65,2 R	LaO	A	22,5 R	SrO	A
93,1 R	BaO	A	89,7 V	SrO	A	61,4	Cs	A
6500,0 V	CaO	A	96,5 R	LaO	A	90,0 R	FeO	A
11,0 R	SmO	A	7500,6 R	SrO	A	8943,5	Cs	A, Res
11,8 R	CrO	A	22,8 R	SrO	A			
33,0 R	SmO	A	23,5 R	BaO	A			
33,7 V	(F, C_2)	O, K	27,0 R	FeO	A			
57,0 R	SmO	A	28,2 R	LaO	A			
63,2 R	BaO	A	41,6 R	SrO	A			
70,0 R	SmO	A	60,0 R	LaO	A			
75,1 R	CrO	A	92,3 R	LaO	A			
80,0 R	NdO	A	7610,1 R	BaO	A			
99,2 V	(F, C_2)	O, K	18,9	Rb	A			
6600,0 R	NdO	A	25,0 R	LaO	A			
20,0 R	NdO	A	57,8 R	LaO	A			
28,0	Sr		64,9	K	A, Res			
34,5 R	BaO	A	87,8 R	CaO	A			
43,6 R	CrO	A	90,0 R	FeO	A			
50,0 R	NdO	A	91,1 R	LaO	A			
77,3 V	(F, C_2)	O, K	99,0	K	A, Res			
6700,0 R	FeO	A	7712,2 R	CaO	A			
04,5 R	BaO	A	13,9 R	CrO	A			
07,9	Li	A, Res	15,5 R	CaO	A			
15,1 R	CrO	A	21,1 R	CaO	A			
23,3	Cs		25,0 R	LaO	A			
47,0	Sr		57,7	Rb	A			
50,0 V	CaO	A	75,0 R	FeO	A			
63,2 V	(F, C_2)	O, K	78,1 R	CrO	A			

Die Anwendung der künstlich radioaktiven Isotope in Medizin und Biologie*

Von Dr. phil. HILDE LEVI

Zoophysiologisches Laboratorium A der Universität Kopenhagen

Einleitung

Seitdem die künstlich radioaktiven Isotope in Amerika, England sowie – in etwas geringerem Ausmaße – in einigen europäischen Ländern hergestellt werden können und in großen Mengen zur Verfügung stehen, hat ihre Anwendung in der medizinischen und biologischen Forschung eine Fülle neuer Untersuchungen ermöglicht. Nach Freigabe der in den Atomreaktoren produzierten radioaktiven Stoffe zu Forschungs- und Behandlungszwecken ist die von G. HEVESY entwickelte Indikatormethode zu einem Werkzeug geworden, das in kaum einem wissenschaftlichen Laboratorium oder Krankenhaus entbehrt werden kann. Die notwendige Meßapparatur ist in verschiedenster Ausführung auf den Markt gebracht und unzähligen speziellen Aufgaben angepaßt worden.

Es ist natürlich eine Voraussetzung für die erfolgreiche Anwendung der radioaktiven Indikatoren – ebenso wie für jede andere Methode –, daß man nicht nur die Meßtechnik beherrscht, sondern auch die gewonnenen Meßresultate kritisch zu bewerten versteht. Untersuchungen mit Hilfe von Isotopen können eine eingehende Kenntnis der biologischen Prozesse und der physikalisch-chemischen Grundlagen keineswegs ersetzen.

Die folgenden Tabellen bringen außer einer Übersicht über die in der medizinischen und biologischen Forschung angewandten Isotope die physikalischen Daten, die zur Beurteilung der Anwendungsmöglichkeiten und der strahlenbiologischen Wirkung dieser Stoffe notwendig sind. Bei der Zusammenstellung der Tabellen mußte unter den Hunderten von künstlich radioaktiven Isotopen eine begrenzte Auswahl getroffen werden, wobei natürlich bestimmend war, ob das betreffende Isotop in der Biologie oder Medizin angewandt worden oder anwendbar ist. Dies hängt hinwiederum unter anderm davon ab, ob das betreffende Element im Organismus eine – wenn auch nur kleine – Rolle spielt und ob die physikalischen Eigenschaften seines radioaktiven Isotops dessen Anwendung praktisch möglich machen. Mehrere biologisch interessante radioaktive Isotope zerfallen so rasch, das heißt im Laufe von Sekunden oder wenigen Minuten, daß sie zu biologischen Versuchen wegen ihrer Lebensdauer ungeeignet sind. Solche Isotope sind in den Tabellen weggelassen.

Ferner sind diejenigen Stoffe nicht aufgeführt, die bis jetzt nur als «Spurenelemente» angesehen werden. Die Tatsache, daß radioaktive Isotope in außerordentlich geringer Konzentration bzw. hoher Verdünnung nachgewiesen werden können, ermöglicht die Applikation nichttoxischer Mengen. Zahlreiche Isotope solcher Elemente sind versuchsweise Tieren eingegeben worden; die Verteilung im Organismus und die Ausscheidung wurden gemessen, ohne daß jedoch wesentliche Schlußfolgerungen aus diesen Messungen gezogen werden konnten.

Tabelle 1 gibt die physikalischen Eigenschaften der wichtigsten künstlich radioaktiven Isotope. Spalte 2 enthält die Halbwertzeiten, Spalte 3 die Zerfallsart, Spalte 4 und Spalte 7 die maximale Energie der β-Strahlung bzw. der γ-Strahlung in MeV (Million-Elektron-Volt), Spalte 5 die mittlere Energie der β-

Tabelle 1

Physikalische Eigenschaften der für die Medizin und Biologie wichtigsten künstlich radioaktiven Isotope

Isotop	Halbwertzeit[1]	Art des Zerfalls	Maximale Energie der β-Strahlung[1] MeV	Mittlere Energie der β-Strahlung MeV	Maximale Reichweite der β-Strahlung in H_2O mm	Energie der γ-Strahlung[1] MeV	Zerfallsrate pro Tag**
^{3}H	12,26 a	β^-	0,018	0,006	0,003		2×10^{-4}
^{11}C	20 m	β^+	0,98	0,38	4		1,0
^{14}C	5568 a	β^-	0,155	0,05	0,3		4×10^{-7}
^{13}N	10 m	β^+	1,25	0,48	5,6		1,0
^{18}F	1,87 h	β^+	0,65	0,25	2,5		1,0
^{22}Na	2,6 a	β^+; γ	0,54	0,2	2	1,28	7×10^{-4}
^{24}Na	15,0 h	β^-; γ	1,39	0,54	6	1,37; 2,76	0,68
^{31}Si	2,62 h	β^-; γ	1,47	0,6	7	1,26	0,998
^{32}P	14,2 d	β^-	1,71	0,68	8		0,05
^{35}S	87 d	β^-	0,167	0,05	0,3		0,008
^{36}Cl	$3{,}1 \times 10^5$ a	β^-	0,714	0,24	2,5		5×10^{-9}
^{38}Cl	37,3 m	β^-; γ	4,8; 2,8; 1,1	1,39	27	1,6; 2,15	1,0
^{42}K	12,5 h	β^-; γ	3,6; 2,0	1,4	19	1,53	0,74
^{45}Ca	153 d	β^-	0,25	0,09	0,6		0,004
^{51}Cr	27,8 d	γ; K		0,01		0,323	0,01
^{52}Mn	5,7 d	β^+; γ; K	0,58	0,2	2,2	0,7; 0,9; 1,5	0,10
^{54}Mn	291 d	γ; K		0,005		0,84	0,002
^{55}Fe	2,94 a	K		0,006			6×10^{-4}
^{59}Fe	45 d	β^-; γ	0,46; 0,27; 1,56	0,12	1,6	1,1; 1,3; 0,19	0,015
^{60}Co	5,25 a	β^-; γ	0,306	0,1	0,8	1,17; 1,33	4×10^{-3}
^{63}Zn	38 m	β^+; γ; K	2,36; 1,4	0,96	11	1,0; 1,9; 2,6	1,0
^{65}Zn	245 d	β^+; γ; K	0,325	0,1	0,8	1,11	0,003
^{82}Br	36 h	β^-; γ	0,44	0,15	1,4	0,55–1,48	0,40
^{85}Kr	10,6 a	β^-; γ	0,67	0,2	2,5	0,52	2×10^{-4}
^{89}Sr	51 d	β^-; γ	1,46	0,55	7	0,91	0,013
^{131}I	8 d	β^-; γ	0,61; 0,81	0,2	2	0,36; 0,6–0,72	0,08
^{198}Au	2,69 d	β^-; γ	0,96; 0,29; 1,37	0,34	3,8	0,41; 0,67; 1,1	0,26

* Definitionen der Maßeinheiten: Erg (erg) und Elektron-Volt (eV) siehe S. 187; Millicurie (mc), Mikrocurie (μc) und Röntgen (r) siehe S. 197; Rad siehe S. 198.

** Siehe auch Zerfallstabellen radioaktiver Isotope, S. 240–254.

1) Die Zahlenwerte sind STROMINGER et al., *Rev. mod. Phys.*, **30**, 585 (1958), und dem *International Directory of Radioisotopes*, Bd. 1, International Atomic Energy Agency, Wien (1959), entnommen.

Strahlung. Spalte 6 der Tabelle 1 gibt die maximale Reichweite der β-Komponente in Wasser an. Diese Größe ist von besonderem Interesse, wenn die von einem lokal applizierten radioaktiven Isotop bestrahlte Gewebemenge zu bestimmen ist. Vereinfachend setzt man die Dichte des frischen Gewebes gleich der des Wassers, das heißt gleich 1. Wird zum Beispiel eine gegebene Menge ^{32}P nahezu punktförmig in eine Gewebemasse eingeführt (es ist hier an eine unlösliche, nicht resorbierbare Verbindung gedacht), so wird das umgebende Gewebe bis zu einem Abstand von 8 mm von der Applikationsstelle bestrahlt. Ferner gibt die maximale Reichweite auch die Abschirmung, die zur völligen Absorption der β-Strahlung notwendig ist. Die letzte Spalte gibt den Bruchteil des Isotops an, der je Tag zerfällt. Auch dieser Zahlenwert geht in die Dosisberechnung ein und ist deshalb in Tabelle 2 wiederholt.

Es sei an dieser Stelle betont, daß die Halbwertzeiten und die Maximalenergien einiger Isotope noch immer nicht endgültig bestimmt sind. Neuere und exaktere Meßmethoden haben zu von früheren Ergebnissen abweichenden Resultaten geführt.

Tabelle 2

Dosierung einiger künstlich radioaktiver Isotope *

(1) Isotop	(2) Halbwertzeit T	(3) Zerfallsrate je Tag f_d	(4) Mittlere Energie der β-Strahlung $\bar{E}_\beta$ (MeV)	(5) Dosisfaktor K_β	(6) Maximal zulässige Konzentration S_β (μc/kg)	(7) Kritisches Organ[1]	(8) Gewicht des kritischen Organs[1] (g)	(9) Maximal zulässige Konzentration im gesamten Körper[1] (μc)
^{3}H	12,26 a	2×10^{-4}	0,006	2400	140	ges. Körper	7×10^{4}	10^{3}
^{11}C	20 m	1,0	0,38	0,47	106	—	—	—
^{14}C	5568 a	4×10^{-7}	0,05	9×10^{6}	16	Fett; ges. Körper	10^{4}; 7×10^{4}	300; 400
^{13}N	10 m	1,0	0,48	0,3	167	—	—	—
^{18}F	1,87 h	1,0	0,25	1,8	28	—	—	—
^{22}Na	2,6 a	7×10^{-4}	0,2	$1{,}8 \times 10^{4}$	4	ges. Körper	7×10^{4}	10
^{24}Na	15,0 h	0,68	0,54	29	2,5	ges. Körper	7×10^{4}	7
^{31}Si	2,62 h	0,998	0,6	6	7,2	ges. Körper	7×10^{4}	30
^{32}P	14,2 d	0,05	0,68	860	1,16	Knochen	7×10^{3}	6
^{35}S	87 d	0,008	0,05	380	15	Haut; Testes	2×10^{3}; 40	100
^{36}Cl	$3{,}1 \times 10^{5}$ a	5×10^{-9}	0,24	3×10^{9}	3	ges. Körper	7×10^{4}	80
^{38}Cl	37,3 m	1,0	1,39	3,2	16	—	—	—
^{42}K	12,5 h	0,74	1,4	70	1,0	Muskel	3×10^{4}	20
^{45}Ca	153 d	0,004	0,09	1200	10,5	Knochen	7×10^{3}	30
^{51}Cr	27,8 d	0,01	0,01	20	100	ges. Körper	7×10^{4}	800
^{52}Mn	5,7 d	0,10	0,2	10	50	ges. Körper	7×10^{4}	9
^{54}Mn	291 d	0,002	0,005	135	185	Leber	$1{,}7 \times 10^{3}$	20
^{55}Fe	2,94 a	6×10^{-4}	0,006	570	140	Milz; Blut	150; 5×10^{3}	1000
^{59}Fe	45 d	0,015	0,12	480	7	Milz; Blut	150; 5×10^{3}	20
^{60}Co	5,25 a	4×10^{-3}	0,1	$1{,}7 \times 10^{4}$	7,4	ges. Körper	7×10^{4}	10
^{63}Zn	38 m	1,0	0,96	2,3	22	—	—	—
^{65}Zn	245 d	0,003	0,1	220	80	ges. Körper	7×10^{4}	60
^{82}Br	36 h	0,40	0,15	20	6,4	ges. Körper	7×10^{4}	10
^{85}Kr	10,6 a	2×10^{-4}	0,2	6×10^{4}	8	—	—	—
^{89}Sr	51 d	0,013	0,55	2600	1,5	Knochen	7×10^{3}	4
^{131}I	8 d	0,08	0,2	140	4,5	Schilddrüse	20	0,7
^{198}Au	2,69 d	0,26	0,34	—	2,3	Niere	3×10^{3}	20

Zu Spalte 3: Zerfallsrate des Isotops in 24 Stunden: $f_d = (1 - e^{-0{,}693/T})$, wobei T = Halbwertzeit in Tagen (siehe auch S. 240–254).

4: Bei ^{51}Cr, ^{54}Mn und ^{55}Fe, die keine β-Strahlung aufweisen, ist die γ-Strahlung nach Elektroneneinfang aus der K-Schale berücksichtigt.

5: $K_\beta = 88 \times \bar{E}_\beta \times T$ = Dosis in Rep** für je ein vollständig zerfallenes Mikrocurie je Gramm Gewebe. Die Werte sind auf Grund der angegebenen physikalischen Daten berechnet.

6: Die maximal zulässige Konzentration in Mikrocurie je Kilogramm Gewebe, welche die maximal zulässige Dosis von 0,05 rep je Tag liefert, ist $S_\beta = \frac{0{,}05 \times 1000}{K_\beta \times f_d}$. Bei der Berechnung ist für gleichzeitig β- und γ-strahlende Isotope nur die β-Komponente berücksichtigt *. Die Werte sind auf Grund der angegebenen physikalischen Daten berechnet.

Tabelle 2 gibt die für die Dosisschätzung notwendigen Daten, die maximal zulässigen Konzentrationen in Mikrocurie je Kilogramm Gewebe und die maximal zulässigen Konzentrationen einiger Isotope im menschlichen Körper bei andauernder Aussetzung. Da eine eingehende Diskussion des Toleranzproblems über den Rahmen der vorliegenden Bemerkungen hinausgeht, sei hier nur erwähnt, daß die zulässige Dosis 0,3 r pro Arbeitswoche (meist 40 Stunden) den Berechnungen der Tabelle 2 zugrunde gelegt wurde. Dieser Wert für die maximal zulässige Dosis wurde in den letzten Jahren in den meisten Ländern anerkannt, ist jedoch nicht endgültig.

Die Spalten 2, 3 und 4 der Tabelle 2 geben die Halbwertzeiten, die Zerfallsraten und die mittlere Energie der β-Strahlung an. Der Dosisfaktor K_β errechnet sich nach der Gleichung $K_\beta = 88 \times \bar{E}_\beta \times T$, wobei $\bar{E}_\beta$ die mittlere Energie der β-Strahlung, T die Halbwertzeit in Tagen ist; der Faktor 88 ist unter anderm auf die Umrechnung von Million-Elektron-Volt in die Energieeinheit Erg zurückzuführen. Der Dosisfaktor gibt also die Dosis

* Dosisleistungen einiger γ-Strahler sind in Tabelle 3, S. 236, aufgeführt.

** Das Rep ist nach ICRU-Report 1957 (*Handbook 62*, NBS, Washington) eine fallengelassene Einheit. Es entspricht ca. 0,93 rad (Gewebe).

1) Die Angaben in den Kolonnen 7–9 sind der Publikation *Maximum Permissible Amounts of Radioisotopes in the Human Body and Maximum Permissible Concentrations in Air and Water*, National Bureau of Standards Handbook 52, Washington (1953), S. 15/16, sowie den Empfehlungen der International Commission on Radiological Protection, 1959 (*Brit. J. Radiol.*, im Druck), entnommen.

für je ein vollständig zerfallendes Mikrocurie je Gramm Gewebe (Spalte 5). Die maximal zulässige Konzentration ist in Spalte 6 angegeben. Zur Vereinfachung ist angenommen, daß sich die in Spalte 1 genannten Isotope gleichmäßig in einem Kilogramm Gewebe verteilen, und unter dieser Voraussetzung wurde berechnet, welche Konzentrationen der verschiedenen Isotope dieser Gewebemasse die zulässige Dosis von 0,05 rep je Tag liefern. (Der Wert 0,05 rep = $^1/_6$ der Wochendosis ist ebenfalls eine grobe Annäherung.) Es ist einleuchtend, daß die Werte für S_β nur zur Orientierung dienen, da sich die wenigsten Stoffe gleichmäßig im Organismus verteilen. Bei einigen Stoffen, zum Beispiel Jod und Calcium, kennt man die Gewebemasse, in der sich das Isotop vorzugsweise ansammelt, und man kann daher abschätzen, wie viele Mikrocurie dem Gesamtorganismus zugeführt werden können, ohne daß die zulässige Dosis in dem betreffenden Gewebe überschritten wird. Tabelle 3 enthält die Bestrahlungsdosisleistung des γ-Anteils einiger wichtiger β- und γ-strahlender Isotope (Isotopenquelle von 1 mc in einer Entfernung von 1 m bzw. 1 cm). (Über die spezifische Gammastrahlungsleistung siehe S. 198).

Auf Grund obiger Betrachtungen sind in der einschlägigen Literatur Werte für die «zulässige» Indikator-Konzentration zu finden (permissible tracer level), und man meint damit diejenige Menge eines Isotops in Mikrocurie, die man dem menschlichen Organismus zuführen kann, ohne zu irgendeinem Zeitpunkt in irgendeinem Gewebe die maximal zulässige Konzentration zu überschreiten. Eine zuverlässige Berechnung solcher «zulässigen» Indikator-Konzentrationen erfordert jedoch die Berücksichtigung zahlreicher biologischer und physikalisch-chemischer Faktoren (Resorption, Verweilzeit, Ausscheidungsgeschwindigkeit, «biologische Halbwertzeit», Verteilung usw.). Eine Veröffentlichung dieser Art von kompetenter Seite liegt nach Ansicht der Verfasserin zurzeit noch nicht vor.

Tabelle 3

Dosiskonstante I_γ je Millicurie verschiedener γ-strahlender Isotope*

Isotop	Halbwertzeit (annähernd)	Energie der γ-Strahlung in MeV (annähernd)	Dosiskonstante mr/mch in 1 m Entfernung**	Dosiskonstante r/mch in 1 cm Entfernung**
^{22}Na	2,6 a	1,3	1,16	13
^{24}Na	15,0 h	1,4; 2,8	1,87	18,7
^{38}Cl	37 m	1,6; 2,2	0,76	7,6
^{42}K	12,5 h	1,5	0,15	1,5
^{51}Cr	27,8 d	0,3	0,18	1,8
^{52}Mn	5,7 d	0,7; 0,9; 1,5	1,95	19,5
^{56}Mn	2,6 h	0,8; 1,8; 2,1	0,94	9,4
^{59}Fe	45 d	1,1; 1,3; 0,2	0,62	6,2
^{60}Co	5,3 a	1,2; 1,3	1,31	13,1
^{65}Zn	38 m	1,0; 1,9; 2,6	0,69	6,9
^{65}Zn	245 d	1,1	0,28	2,8
^{82}Br	36 h	0,5–1,5	1,46	14,6
^{131}I	8 d	0,4; 0,6–0,7	0,22	2,2
^{137}Cs	30 a	0,7	0,31	3,1
^{182}Ta	112 d	effektiv 1,1	0,61	6,1
^{192}Ir	74,4 d	effektiv 0,6	0,50	5,0
^{198}Au	2,7 d	0,4; 0,7; 1,1	0,24	2,35

Wertvolle Aufschlüsse und Richtlinien betreffend diese schwierigen Probleme sind aus den «Empfehlungen» der International Commission on Radiological Protection (ICRP) zu ersehen. Diese werden in regelmäßigen Abständen veröffentlicht[1] und sind außerdem in der Reihe der Handbücher des National Bureau of Standards, Washington[2], enthalten. Man muß sich jedoch klar darüber sein, daß sich die ICRP von Anfang an nur mit der beruflichen Exponierung, das heißt der externen Bestrahlung mit Röntgen- oder γ-Strahlen, beschäftigt hat. Im Laufe der letzten Jahre hat die Unterkommission II der ICRP jedoch Ergebnisse gesammelt und Berechnungen der maximal zulässigen Konzentration von Radionukliden in der Luft und im Wasser ausgeführt und auch versucht, die maximal zulässige Körperbelastung dieser Stoffe bei dauernder Aufnahme anzugeben. Das *National Bureau of Standards Handbook 52*[2] enthält diese Daten; die aufgeführten Zahlen sind von besonderem Interesse für die verantwortlichen Leiter von Isotopenversuchen sowie für Personen, die mit der diagnostischen und therapeutischen Anwendung von radioaktiven Isotopen beim Menschen zu tun haben.

Die allerneuesten Veröffentlichungen der ICRP (1958[3] und 1959[4]) sind umfassender als alle vorausgehenden, da sie neben den früheren Angaben auch eine kritische Auswertung des Begriffes «maximal zulässige Dosis» für andere Einzelpersonen und Bevölkerungsgruppen als die beruflich exponierten bringen. Die allgemeine Einstellung, die diesen «Empfehlungen» zugrunde liegt, kommt auf den 18 Seiten der 1958er «Empfehlungen»[3] deutlich zum Ausdruck. Bezüglich der beruflichen Exponierung sei der folgende kurze Abschnitt angeführt: «Die maximal zulässige, in den Gonaden, den blutbildenden Organen und den Linsen der Augen akkumulierte Totaldosis soll stets bei einem Alter von über 18 Jahren durch die Gleichung $D = 5\ (N - 18)$ bestimmt sein, wo D die Gewebsdosis in Roentgen-equivalent-man (rem) und N das Alter in Jahren ist. Für eine Person, die vom 18. Lebensjahr an beruflich mit einer konstanten Dosisleistung bestrahlt wird, bedeutet die Formel eine maximale Wochendosis von 0,1 rem. Es wird empfohlen, diesen Wert Plänen und Entwürfen zugrunde zu legen.»

Bei einer Bestrahlung von Einzelpersonen, die sich im wesentlichen auf Teile oder einzelne Organe des Körpers – ausgenommen die Gonaden, die blutbildenden Organe und die Linsen der Augen – beschränkt, ist eine höhere als die von der obengenannten Formel abzuleitende Dosis gestattet. Die folgenden Empfehlungen sind denjenigen des Komitees entnommen: «Während 13 Wochen eine maximale Dosis von 8 rem für die Haut, 20 rem für Hände und Unterarme, Füße und Knöchel und 4 rem für eine begrenzte Exponierung anderer innerer Organe, ausgenommen der Schilddrüse, der Gonaden und der blutbildenden Organe.»

Die maximal zulässige interne Exponierung von Einzelpersonen infolge der Aufnahme radioaktiver Isotope wird in den ICRP-Empfehlungen nicht ausdrücklich besprochen, aber die in den Jahren 1958/1959 vorgenommene Revision der Zahlenwerte für die maximal zulässige Körperbelastung bei andauernder Exponierung – in Verbindung mit den Empfehlungen hinsichtlich der Exponierung von Einzelpersonen – kann als Grundlage für die Schätzung eines zulässigen Isotopenniveaus im Menschen verwendet werden.

Das Problem der genetischen Schädigung der Gesamtbevölkerung durch externe oder interne Bestrahlung hat mit der vorliegenden Diskussion der Anwendung von radioaktiven Isotopen in der medizinischen Forschung und Therapie nur wenig zu tun. Der Leser, der sich für dieses Problem interessiert, sei ebenfalls auf die «Empfehlungen» von 1958[3] (S. 14–16) hingewiesen.

Um dem Leser schätzungsweise Berechnungen von maximal zulässigen Konzentrationen zu erleichtern, sind in den Tabellen 4 und 5 einige Zahlenwerte des «Standardmenschen» abgedruckt, die den Berechnungen der Internationalen Radiologischen Kommissionen zugrunde liegen.

* Weiteres über Dosisleistung siehe unter Radiologische Dosiseinheiten, S. 197.

** Quellen zu diesen Angaben sind in der Tabelle auf S. 198 gegeben.

1) In folgenden Zeitschriften: *British Journal of Radiology* (besonders Suppl. 6, 1955); *American Journal of Roentgenology, Radium Therapy, and Nuclear Medicine*; *Nucleonics*; *Fortschritte auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen und der Nuklearmedizin.*

2) *Recommendations of the International Commission on Radiological Protection and of the International Commission on Radiological Units*, National Bureau of Standards Handbook 47, Washington (1950); *Maximum Permissible Amounts of Radioisotopes in the Human Body and Maximum Permissible Concentrations in Air and Water*, National Bureau of Standards Handbook 52, Washington (1953).

3) *Radiation Protection*: *Recommendations of the International Commission on Radiological Protection*, London und New York (1959).

4) International Commission on Radiological Protection, *Brit. J. Radiol.*, im Druck.

Tabelle 6 gibt eine Übersicht über die wichtigsten in der Medizin und Biologie angewandten radioaktiven Isotope. Bei der medizinischen Anwendung ist zwischen Therapie und Diagnose unterschieden, während medizinisch-physiologische Indikator-Untersuchungen unter Biologie aufgeführt sind. Die Literatur auf diesem Gebiete ist so umfangreich, daß jeder Versuch, auf die Originalarbeiten hinzuweisen, zu einer unvollständigen und daher ungerechten Literaturübersicht führen würde. Über Prinzipien der strahlentherapeutischen Anwendung radioaktiver Isotope siehe S. 239.

Tabelle 4

Gewichtsverteilung beim «Standardmenschen»[1] (Gesamtkörpergewicht rund 70 kg)

Organ	Gewicht in Gramm	Organ	Gewicht in Gramm
Fett	10 000	Testes	40
Muskeln	30 000	Herz	300
Skelett:		Lymphdrüsen	700
Knochen	7 000	Gehirn	1 500
Rotes Knochenmark	1 500	Rückenmark	30
Weißes Knochenmark	1 500	Blase	150
Blut	5 400	Speicheldrüse	50
Magendarmkanal (ohne Inhalt)	2 000	Augen	30
Lungen	1 000	Zähne	20
Leber	1 700	Prostata	20
Niere	300	Nebennieren	20
Milz	150	Thymusdrüse	10
Pancreas	70	Haut	2 100
Schilddrüse	20	Bindegewebe	4 100

Tabelle 5

Andere Eigenschaften des «Standardmenschen» (Gesamtkörpergewicht rund 70 kg)

Chemische Zusammensetzung des Körpers[1]			*Wasserhaushalt (hydraulisches Gleichgewicht)*[1]	
Element	Prozentsatz des Gesamtkörpergewichts	Gesamtgewicht g		Milliliter je Tag
Sauerstoff	65,0	45 500	Tägliche Wasseraufnahme:	
Kohlenstoff	18,0	12 600	Mit der Nahrung (einschließlich 300 ml	
Wasserstoff	10,0	7 000	Verbrennungswasser)	1000
Stickstoff	3,0	2 100	Als Flüssigkeit	1500
Calcium	1,5	1 050	Total	2500
Phosphor	1,0	700		
Schwefel	0,25	175	Tägliche Wasserausscheidung:	
Kalium	0,2	140	Schweiß	500
Natrium	0,15	105	Aus der Lunge	400
Chlor	0,15	105	In den Fäces	100
Magnesium	0,05	35	Im Harn	1500
Eisen	0,006	4	Total	2500
Kupfer	0,000 2	0,1		
Mangan	0,000 03	0,02	Eingeatmete Luft pro Tag:	
Jod	0,000 04	0,03	8 Arbeitsstunden	10×10^6
			16 Ruhestunden	10×10^6
			Total	20×10^6

Tabelle 6

Anwendung der Isotope

Anwendung in der Medizin	Isotop	Biologische und physiologische Anwendung
	Wasserstoff ^{3}H	Körperwassergehalt
	Kohlenstoff ^{11}C	CO_2 -Stoffwechsel
	^{14}C	Verwendung von ^{14}C-markierten Substanzen bei Stoffwechseluntersuchungen (Lokalisierung, Reaktionsmechanismus, Verweil- oder Lebensdauer, Stoffwechsel-Pool einer Substanz mit Hilfe der Isotopen-Verdünnungsmethode). Kohlenhydrat-, Fett-, Protein-, Aminosäuren-Stoffwechsel.
	Stickstoff ^{13}N	Gasaustausch bei der Atmung.

1) Nach Recommendations of the International Commission on Radiological Protection, *Brit. J. Radiol.*, Suppl. 6 (1955).

Tabelle 6 (Fortsetzung)

Anwendung in der Medizin	Isotop	Biologische und physiologische Anwendung
	Fluor ^{18}F	Physiologie und Chemie der Knochen und Zähne.
Therapie: Ganzbestrahlung, Erythropoese, Polyglobulie.	Natrium ^{24}Na	(Auch ^{22}Na). Ausscheidung, Resorption, Permeabilitätsuntersuchungen an Kapillaren, Magen- und Darmwand, Placenta, Organzellwänden, Verteilung zwischen Plasma und Gewebe. Ionentransport.
Diagnose: Kreislaufmessungen mit Plasma, dem ^{24}Na zugesetzt wird. Bestimmung des extrazellulären Raumes nach der Verdünnungsmethode. Extremitäten- und Organdurchblutung. Kardiale Insuffizienz.		
Therapie: Oberflächentherapie bei Fehl- und Mißbildungen, Hautverletzungen, Ekzemen. Chronische Leucämie und Polycythämie. Selektivbestrahlung mit kolloidalen ^{32}P-haltigen Stoffen.	Phosphor ^{32}P	Mineralstoffwechsel, Intermediärstoffwechsel.
Diagnose: Blutvolumenbestimmung und Kreislaufdiagnostik mit ^{32}P-markierten Erythrocyten.		
Therapie: Versuche mit Selektivbestrahlung der Gelenke.	Schwefel ^{35}S	Permeabilitätsstudien. Intermediärstoffwechsel. Stoffwechsel der schwefelhaltigen Aminosäuren und Peptide, ^{35}S-markierte Pharmaceutica. Mineralstoffwechsel.
Diagnose: Untersuchung über Schwefelanhäufung in Tumoren.		
	Chlor ^{36}Cl ^{38}Cl	Mineralstoffwechsel, Permeabilität, Ionentransport durch Membranen.
	Kalium ^{42}K	Mineralstoffwechsel. Physiologie der Nebenniere.
	Calcium ^{45}Ca	Mineralstoffwechsel. Einlagerung von Calcium im Knochen bei rachitischen und mit Vitamin D behandelten Tieren. Knochenheilung.
Diagnose: Blutvolumen- und Kreislaufuntersuchungen mit ^{51}Cr-markierten Erythrocyten.	Chrom ^{51}Cr	Plasma-Proteinuntersuchungen mit $^{51}CrCl_3$.
Therapie: Lokalbestrahlung von Lymphknoten. Verteilung von kolloidalem MnO_2 im reticulo-endothelialen System.	Mangan ^{52}Mn ^{54}Mn	Mineralstoffwechsel.
Diagnose: Blutvolumen, Lebensdauer der Erythrocyten.	Eisen ^{55}Fe ^{59}Fe	Mineralstoffwechsel, Physiologie des Blutes, Resorption von der Schleimhaut des Magendarmkanals. Verteilung des Eisens im Organismus. Blutkonservierung.
Therapie: Telecurietherapie, extern (hohe Tiefendosen). Kobaltdraht zur Lokalapplikation. Intrakavitär Kobaltchlorid flüssig in Gummiballons als Hohlapplikator (Blase).	Kobalt ^{60}Co	Mineralstoffwechsel.
Therapie: Intratumorale Therapie, ^{63}Zn als unlösliches Sulfid und als Sol; auch bei intraperitonealer und intrapleuraler Applikation. ^{63}Zn in grobdisperser Sulfidform führt zur selektiven Fixation in der Lunge.	Zink ^{63}Zn ^{65}Zn	Mineralstoffwechsel. Lebensdauer von Leucocyten.
	Brom ^{82}Br	Elektrolytenaustausch. Physiologie der Schilddrüse, Verteilung bromierter Farbstoffe.
Diagnose: Bestimmung des Minutenvolumens.	Krypton ^{85}Kr	Gasaustausch bei der Atmung.
Therapie von Knochensarkomen.	Strontium ^{89}Sr	Absorption – Verteilung – Ausscheidung. Physiologie der Knochen.
Therapie: Selektivbestrahlung der Schilddrüse, Behandlung von Hyperthyreose, Schilddrüsenkarzinom, diffusen und knotigen Strumen.	Jod ^{131}I	Jodstoffwechsel. Physiologie der Schilddrüse.
Diagnose: Dysfunktion der Schilddrüse. Lokalisierung von Geschwülsten mittels ^{131}I-Dijodofluorescein.		
Telecurietherapie.	Caesium ^{137}Cs	
Therapie: Oberflächenbestrahlung, in Moulagen eingebaut; Spickung mit Draht.	Tantal ^{182}Ta	
Therapie: Interstitielle Applikation.	Iridium ^{192}Ir	
Therapie: In unlöslicher Form (Pektinsol) zur Innenraumbehandlung (Blase). Bauchfell- und Pleurocarcinose. Intratumorale Therapie.	Gold ^{198}Au	Absorption – Verteilung – Ausscheidung. Verteilung bei Arthritis.

Von Dr. phil. nat. H. LÜTHY, Isotopenlabor des Bürgerspitals, Basel

Im Gegensatz zu den natürlichen radioaktiven Strahlern, die nur im Zerfallsgleichgewicht mit ihren Folgeprodukten unter gasdichtem Einschluß (Nadeln, Röhrchen oder Platten aus Platin, Gold oder Monelmetall) verwendet werden können, erlauben künstlich radioaktive Isotope eine Anwendung in fester oder flüssiger Form, meistens ohne Umhüllung. Die Lokalisierung eines strahlenden Nuklids auf einen umschriebenen Krankheitsherd unter möglichster Schonung des gesunden Gewebes – Grundprinzip der Strahlentherapie – kann mit verschiedenen Methoden erreicht werden.

1. Teletherapie (γ-Strahler)

Isotop: vor allem ^{60}Co; spezifische Aktivitäten: 20–100 c/g. (Übliche Quellengröße: Zylinder, 10 × 10 bis 25 × 25 mm).

Die Quelle befindet sich vollkommen strahlengeschützt in einem Wolfram- oder Bleibehälter. Der Strahlenaustritt wird durch variable oder austauschbare Blenden aus Wolfram begrenzt. Die gewünschte Expositionszeit wird durch einen ferngesteuerten Wolframverschluß bewirkt. Bestrahlungsdistanzen: 20–100 cm, je nach Aktivität; Feldgrößen: etwas kleinere, als in der Röntgentiefentherapie üblich. Kreuzfeuertechnik oder Rotations- und Pendelbestrahlung. Vorteile gegenüber Röntgentherapie bei 200 kV: höhere relative Tiefendosen; schärfere seitliche Feldbegrenzung; die Knochenabsorption ist praktisch gleich der Weichteilabsorption (Schonung des Knochens!); das Dosismaximum liegt 4–5 mm *unter* der Hautoberfläche (Dosis auf Hautoberfläche 25–30% des Maximums, wesentlich geringere Hautreaktion). Die relative biologische Wirksamkeit, verglichen mit 200 kV Röntgenstrahlung, beträgt etwa 0,8; man dosiert allgemein etwas höher als bei Röntgentherapie.

Isotop: ^{137}Cs. Verunreinigung mit ^{134}Cs (kürzere Halbwertzeit) ist möglich, was rascheres Absinken der anfänglichen Aktivität bedingt. Vorteil von ^{137}Cs: größere Halbwertzeit als ^{60}Co. Nachteile: wesentlich geringere spezifische Aktivität, deshalb größere Quellen und damit großer Halbschatten; kleinere γ-Energie, Haut- und Knochenschonung geringer als bei ^{60}Co.

2. Oberflächenbestrahlung

Zur Bestrahlung rein oberflächlicher Krankheitsherde (Dermatologie, Ophthalmologie) eignen sich reine β-Strahler, die als Flächenapplikatoren auf die Läsion gelegt werden. Isotope: ^{32}P und ^{90}Sr–^{90}Y. Maximale Eindringtiefe 5–8 mm, praktische Reichweite ca. 3 mm. Handelsformen: flexible Kunststoffolie mit 20% rotem Phosphor, im Atomreaktor aktiviert. Metallkapseln mit ^{90}Sr gefüllt, Austrittsfläche mit dünner Silberfolie gefiltert; zur Wirkung kommt die β-Strahlung der Tochtersubstanz ^{90}Y; für ophthalmologische Zwecke sind der Corneakrümmung angepaßte Applikatoren erhältlich.

Größere Tiefenwirkung wird mit oberflächlich aufgelegten γ-Strahlern erreicht. Handelsformen: Granulat aus ^{60}Co in plastisch verformbarer Masse (Plastobalt) oder ^{60}Co-Kugeln (6 mm Durchmesser, goldplattiert) in verformbarer Moulage; optimale Anpassung an komplizierte Oberflächenkrümmung; steiler Dosisabfall in die Tiefe (quadratisches Abfallgesetz): Tantaldraht ^{182}Ta in biegbarem Plasticschlauch, als Ringquelle besonders für epibulbäre Bestrahlung.

3. Interstitielle Bestrahlung

a) Spickmethode mit festen γ-Strahlern. Drähte aus ^{60}Co (duktile Legierung «Cobanic» 55% Ni + 45% Co) in Stahlnadeln oder Nylonschläuchen, die als «Faden» in die Läsion eingenäht werden können und gegenüber starren Trägern wesentliche Vorteile besitzen. Speziell für die Bestrahlung der Blasenwand wurde eine Technik entwickelt, mit der haarnadelförmige Schleifen aus Tantaldraht (^{182}Ta, 0,4 mm Durchmesser, 0,1 mm Platinüberzug) in das Tumorgewebe eingezogen werden. ^{192}Ir besitzt ebenfalls sehr günstige Eigenschaften für die interstitielle Applikation. Nach Beendigung der Bestrahlung müssen die Drähte aus dem Gewebe entfernt werden.

Für nur kurzfristig zugängliche Tumoren eignet sich die Spikkung mit Radiogoldstäbchen ^{198}Au (ca. 2,5 mm lang, 0,8 mm Durchmesser); die β-Strahlung wird von einem inaktiven Gold- oder Platinmantel abgefiltert (Radiogold-Seeds). Die Seeds lassen sich mit einem pistolenartigen Instrument rasch und präzis im Gewebe placieren. Es werden handelsüblich mit Gold-Seeds gefüllte Magazine geliefert, die man vor Gebrauch sterilisiert und dann auf den Pistolenhandgriff aufsetzt. Andere Apparate gestatten, unter Strahlenschutz von einem längeren Golddrahtstück (umgeben mit inaktivem Goldmantel) beliebige Stücke abzuschneiden und mit einem Führungsröhrchen an die gewünschte Stelle im Gewebe zu schieben. ^{198}Au-Seeds weisen gegenüber Radon-Seeds wesentliche Vorteile auf.

b) Infiltrationsmethoden (β-Strahler). Die radioaktive Substanz wird als kolloidale Lösung direkt in das Tumorgewebe injiziert. Angenähert homogene Strahlenbelastung ist gewährleistet, wenn die einzelnen Depots nicht weiter als 3 mm auseinanderliegen. Isotope: kolloidales ^{198}Au, kolloidales ^{32}P als Phosphate. Es kommt zu einem teilweisen Abtransport der Aktivität auf dem Lymphweg und zur Anreicherung in benachbarten Lymphknoten.

Formeln zur Dosisberechnung (Voraussetzung: gleichmäßige Verteilung des Isotops):

C = Konzentration in Mikrocurie pro Gramm

$\bar{E}_\beta$ = mittlere β-Strahlen-Energie ($\cong E_{max}/3$)

T_{eff} = effektive Halbwertzeit ($\cong$ physikalische Halbwertzeit)

g = mittlerer Geometriefaktor für Kugel[2] (für Kugel mit $R < 10$ cm $\cong 3\pi R$)

I_γ = Dosiskonstante in Röntgen pro Millicurie pro Stunde in 1 cm Abstand

Für β-Strahlung

Gesamtdosis $D_\beta = 73{,}8 \times C \times \bar{E}_\beta \times T_{eff}$ [rad]

Dosis $D_{\beta t}$ nach der Zeit $t = D_\beta \times (1 - e^{\lambda t})$ [rad],

$\lambda = 0{,}693/T_{eff}$ (λ und T_{eff} bezogen auf Tage)

Für γ-Strahlung

Mittlere absorbierte γ-Strahlen-Dosis bei völligem Zerfall

$$D_{\gamma(\infty)} = 0{,}0322 \times C \times g \times I_\gamma \times T_{eff} \text{ [rad]}$$

4. Intrakavitäre Bestrahlung

a) Intraperitoneale und intrapleurale Infusion von kolloidaler Radiogoldsuspension ^{198}Au bei oberflächlichen und ausgedehnten Carcinosen. Einzeldosen von 100–150 mc, eventuell wiederholt bis Gesamtdosis von 500 mc in einigen Monaten. Wirksam ist vor allem die β-Strahlung; geringe Tiefenwirkung bis ca. 3 mm. Neuerdings wird diese Technik auch zur Bestrahlung der Blaseninnenwand benützt. 300 mc ^{198}Au während etwa 4 Stunden. Dosierung nach Nomogramm[3].

b) Eine plastisch verformbare Masse enthält ^{60}Co-Kügelchen von rund 1 mm Durchmesser. Hauptanwendungsgebiete für intrakavitäre Bestrahlung mit solchen Trägern: Tumoren des Mund-, Nasen- und Rachenraumes. ^{60}Co-Kügelchen von 6 mm Durchmesser und zentraler Bohrung können zu strahlenden Ketten zusammengefügt (Einlage in Ösophagus) oder als Kugelhaufen in natürliche oder operativ eröffnete Körperhöhlen gelegt werden. Die Dosierung muß sich auf experimentell mit kleinen Ionisationskammern gewonnene Isodosenkurven stützen.

5. Enterale und intravenöse Applikation

Hierbei kann nur ein therapeutischer Effekt erwartet werden, wenn sich das Isotop im Gewebe genügend hoch konzentriert. Bisher gelingt es nur mit Radiojod, das in der gesunden Schilddrüse zu 30–50% gespeichert wird, in wenigen Ausnahmefällen (höchstens 10% aller Schilddrüsentumoren), in Primärtumoren oder Metastasen bei hinreichender Speicherung eine adäquate Strahlungsdosis abzugeben. Übliche verabfolgte Menge: 100 bis 150 mc ^{131}I per os. Bei *Hyperthyreose* werden perorale Gaben von 4–10 mc ^{131}I, eventuell wiederholt unter periodischer klinischer Kontrolle, gegeben. Die Dosierung stützt sich auf Speicherungshöhe (Tracerversuch), effektive Halbwertzeit und Schilddrüsengröße. Da in der Schilddrüse Konzentrationsunterschiede des Isotops von 1:100 auftreten können und eine generelle Berechnung damit unmöglich wird, beruht die Dosierung weitgehend auf klinischer Empirie.

Für die Therapie der Blutkrankheiten (Polycythaemia vera, Leucosen) kommt vor allem ^{32}P zur Anwendung. Unter Einrechnung einer 20–40%igen Ausscheidung im Urin nach intravenöser Injektion entspricht die gesamte Strahlenexposition eines 70 kg schweren Mannes für 1 mc ^{32}P etwa der Wirkung von 10 r. Die Dosierung erfolgt je nach der Reaktion des Blutbildes.

---

1) Weiteres siehe SCHWIEGK, H., *Künstliche radioaktive Isotope in Physiologie, Diagnostik und Therapie*, Berlin (1953); HAHN, P. F. (Hrsg.), *Therapeutic Use of Artificial Radioisotopes*, New York (1956); FIELDS und SEED (Hrsg.), *Clinical Use of Radioisotopes*, Chicago (1957); VEALL und VETTER, *Radioisotope Techniques in Clinical Research and Diagnosis*, London (1958); HINE und BROWNELL (Hrsg.), *Radiation Dosimetry*, New York (1956). *2)* Für Zylinder siehe LOEVINGER et al., in: HINE und BROWNELL (Hrsg.), *Radiation Dosimetry*, New York (1956), S. 801. *3)* ELLIS und OLIVER, *Brit. med. J.*, **1**, 136 (1955).

Erläuterungen zu den Seiten 240–254*

Kolonnen 1, 2 und 3: t = Zeitspanne zwischen t_0 und t in Tagen (d), Stunden (h) und Minuten (min).

Kolonne 4: N_t = zur Zeit t noch nicht zerfallener prozentualer Anteil von N_0 (an Stelle von N_t und N_0 können selbstverständlich auch die Aktivitäten A_t und A_0 eingesetzt werden).

Kolonnen 5 und 6: Faktor und dessen Zehnerlogarithmus zur Berechnung von N_0 (oder A_0), oder ihnen proportionalen Anteilen, aus N_t (oder A_t):

$$N_0 = \frac{N_0}{N_t} N_t \quad \text{oder} \quad A_0 = \frac{A_0}{A_t} A_t$$

Die Halbwertzeiten T wurden entnommen: Knolls Atomic Power Laboratory, *General Electric Company Chart of the Nuclides*, 5. Aufl., New York (1956). Die Tafeln waren schon berechnet, als die Publikation von SULLIVAN, W. H., *Trilinear Chart of Nuclides*, Washington (United States Atomic Energy Commission, 1957) erschien. Die Differenzen in den Halbwertzeiten waren aber so klein, daß wir auf eine Neuberechnung unserer Zerfallstabellen verzichteten.

Berechnungen (elektronisch)

Kolonne 4 nach: $\ln \frac{N_t}{N_0} = \frac{-\ln 2}{T_t} t$

Kolonnen 5 und 6 nach: $\ln \frac{N_0}{N_t} = \frac{\ln 2}{T_t} t$

$\left(\text{Zerfallskonstante } \lambda_t = \frac{\ln 2}{T_t}\right)$

Natrium 24

Halbwertzeit 15,0 h

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
		00	100,00	1,000	0,00000
		10	99,23	1,007	0,00335
		20	98,47	1,015	0,00669
		30	97,72	1,023	0,01003
		40	96,97	1,031	0,01338
		50	96,22	1,039	0,01672
	1	**00**	95,48	1,047	0,02007
		10	94,75	1,055	0,02341
		20	94,02	1,063	0,02676
		30	93,30	1,071	0,03010
		40	92,59	1,080	0,03345
		50	91,88	1,088	0,03679
	2	**00**	91,17	1,096	0,04014
		10	90,47	1,105	0,04348
		20	89,78	1,113	0,04683
		30	89,09	1,122	0,05017
		40	88,41	1,131	0,05352
		50	87,73	1,139	0,05686
	3	**00**	87,06	1,148	0,06021
		10	86,39	1,157	0,06355
		20	85,72	1,166	0,06690
		30	85,07	1,175	0,07024
		40	84,41	1,184	0,07359
		50	83,77	1,193	0,07693
	4	**00**	83,12	1,203	0,08028
		10	82,49	1,212	0,08362
		20	81,85	1,221	0,08696
		30	81,23	1,231	0,09031
		40	80,60	1,240	0,09365
		50	79,98	1,250	0,09700
	5	**00**	79,37	1,259	0,10034
		10	78,76	1,269	0,10369
		20	78,16	1,279	0,10703
		30	77,56	1,289	0,11038
		40	76,96	1,299	0,11372
		50	76,37	1,309	0,11707
	6	**00**	75,79	1,319	0,12041
		10	75,20	1,329	0,12376
		20	74,63	1,339	0,12710
		30	74,05	1,350	0,13045
		40	73,49	1,360	0,13379
		50	72,92	1,371	0,13714
	7	**00**	72,36	1,381	0,14048
		10	71,81	1,392	0,14383
		20	71,26	1,403	0,14717
		30	70,71	1,414	0,15052
		40	70,17	1,425	0,15386
		50	69,63	1,436	0,15720
	8	**00**	69,10	1,447	0,16055
		10	68,57	1,458	0,16389
		20	68,04	1,469	0,16724
		30	67,52	1,481	0,17058
		40	67,00	1,492	0,17393
		50	66,49	1,504	0,17727
	9	**00**	65,98	1,515	0,18062
		10	65,47	1,527	0,18396
		20	64,97	1,539	0,18731
		30	64,47	1,551	0,19065
		40	63,97	1,563	0,19400
		50	63,48	1,575	0,19734
	10	**00**	63,00	1,587	0,20069
		10	62,51	1,599	0,20403
		20	62,03	1,612	0,20738
		30	61,56	1,624	0,21072
		40	61,08	1,637	0,21407
		50	60,62	1,649	0,21741
	11	**00**	60,15	1,662	0,22076
		10	59,69	1,675	0,22410
		20	59,23	1,688	0,22745
		30	58,78	1,701	0,23079
		40	58,33	1,714	0,23413
		50	57,88	1,727	0,23748
	12	**00**	57,43	1,741	0,24082
		10	56,99	1,754	0,24417
		20	56,56	1,768	0,24751
		30	56,12	1,781	0,25086
		40	55,69	1,795	0,25420
		50	55,27	1,809	0,25755
	13	**00**	54,84	1,823	0,26089
		10	54,42	1,837	0,26424
		20	54,00	1,851	0,26758
		30	53,59	1,866	0,27093
		40	53,18	1,880	0,27427
		50	52,77	1,895	0,27762
	14	**00**	52,36	1,909	0,28096
		10	51,96	1,924	0,28431
		20	51,56	1,939	0,28765
		30	51,17	1,954	0,29100
		40	50,78	1,969	0,29434
		50	50,39	1,984	0,29769
	15	**00**	50,00	2,000	0,30103
		10	49,62	2,015	0,30438
		20	49,24	2,031	0,30772
		30	48,86	2,046	0,31106
		40	48,48	2,062	0,31441
		50	48,11	2,078	0,31775
	16	**00**	47,74	2,094	0,32110
		10	47,38	2,110	0,32444
		20	47,01	2,127	0,32779
		30	46,65	2,143	0,33113
		40	46,29	2,160	0,33448
		50	45,94	2,176	0,33782
	17	**00**	45,59	2,193	0,34117
		10	45,24	2,210	0,34451
		20	44,89	2,227	0,34786
		30	44,54	2,244	0,35120
		40	44,20	2,262	0,35455
		50	43,86	2,279	0,35789
	18	**00**	43,53	2,297	0,36124
		10	43,19	2,315	0,36458
		20	42,86	2,333	0,36793
		30	42,53	2,351	0,37127
		40	42,21	2,369	0,37462
		50	41,88	2,387	0,37796
	19	**00**	41,56	2,406	0,38131
		10	41,24	2,424	0,38465
		20	40,93	2,443	0,38799
		30	40,61	2,462	0,39134
		40	40,30	2,481	0,39468
		50	39,99	2,500	0,39803
	20	**00**	39,69	2,519	0,40137
		10	39,38	2,539	0,40472
		20	39,08	2,558	0,40806
		30	38,78	2,578	0,41141
		40	38,48	2,598	0,41475
		50	38,19	2,618	0,41810
	21	**00**	37,89	2,639	0,42144
		10	37,60	2,659	0,42479
		20	37,31	2,679	0,42813
		30	37,03	2,700	0,43148
		40	36,74	2,721	0,43482
		50	36,46	2,742	0,43817
	22	**00**	36,18	2,763	0,44151
		10	35,90	2,785	0,44486
		20	35,63	2,806	0,44820
		30	35,36	2,828	0,45155
		40	35,08	2,850	0,45489
		50	34,81	2,872	0,45823
	23	**00**	34,55	2,894	0,46158
		10	34,28	2,916	0,46492
		20	34,02	2,939	0,46827
		30	33,76	2,962	0,47161
		40	33,50	2,985	0,47496
		50	33,24	3,008	0,47830
1	**00**		32,99	3,031	0,48165
	01		31,50	3,174	0,50172
	02		30,08	3,324	0,52179
	03		28,72	3,482	0,54185
	04		27,42	3,646	0,56192
	05		26,18	3,819	0,58199
	06		25,00	3,999	0,60206
	07		23,87	4,189	0,62213
	08		22,79	4,387	0,64220
	09		21,76	4,594	0,66227
	10		20,78	4,812	0,68233
	11		19,84	5,039	0,70240
	12		18,95	5,278	0,72247
	13		18,09	5,527	0,74254
	14		17,27	5,789	0,76261
	15		16,49	6,062	0,78268
	16		15,75	6,349	0,80274
	17		15,04	6,649	0,82281
	18		14,36	6,964	0,84288
	19		13,71	7,293	0,86295
	20		13,09	7,638	0,88302
	21		12,50	7,999	0,90308
	22		11,94	8,378	0,92315
	23		11,40	8,774	0,94322
2	**00**		10,88	9,189	0,96329
	01		10,39	9,623	0,98335
	02		9,92	10,079	1,00343
	03		9,47	10,556	1,02350
	04		9,05	11,055	1,04357
	05		8,64	11,578	1,06364
	06		8,25	12,125	1,08371
	07		7,87	12,699	1,10378
	08		7,52	13,299	1,12385
	09		7,18	13,928	1,14391
	10		6,86	14,587	1,16398
	11		6,55	15,277	1,18405
	12		6,25	16,000	1,20412
	13		5,97	16,756	1,22419
	14		5,70	17,549	1,24426
	15		5,44	18,379	1,26433
	16		5,20	19,248	1,28439
	17		4,96	20,158	1,30446
	18		4,74	21,112	1,32453
	19		4,52	22,110	1,34460
	20		4,32	23,156	1,36467
	21		4,12	24,251	1,38474
	22		3,94	25,398	1,40481
	23		3,76	26,599	1,42488
3	**00**		3,59	27,857	1,44494
	01		3,43	29,175	1,46501
	02		3,27	30,554	1,48508
	03		3,13	32,000	1,50515
	04		2,98	33,513	1,52522
	05		2,85	35,098	1,54529
	06		2,72	36,758	1,56536
	07		2,60	38,496	1,58542
	08		2,48	40,317	1,60549
	09		2,37	42,224	1,62556
	10		2,26	44,221	1,64563
	11		2,16	46,312	1,66570
	12		2,06	48,502	1,68577
	13		1,97	50,796	1,70584
	14		1,88	53,199	1,72590
	15		1,79	55,714	1,74597
	16		1,71	58,349	1,76604
	17		1,64	61,109	1,78611
	18		1,56	63,999	1,80618
	19		1,49	67,026	1,82625
4	**00**		1,18	84,447	1,92659
	01		1,13	88,440	1,94665
	02		1,08	92,623	1,96672
	03		1,03	97,003	1,98679
	04		0,98	101,594	2,00687
	05		0,94	106,398	2,02694
	06		0,90	111,430	2,04700
	07		0,86	116,701	2,06708
	08		0,82	122,219	2,08714
	09		0,78	128,000	2,10721
	10		0,75	134,053	2,12728
	11		0,71	140,394	2,14735
	12		0,68	147,032	2,16741
	13		0,65	153,988	2,18749
	14		0,62	161,269	2,20755
	15		0,59	168,896	2,22762
	16		0,57	176,884	2,24769
	17		0,54	185,250	2,26776
	18		0,52	194,012	2,28783
	19		0,49	203,185	2,30789
	20		0,47	212,797	2,32797
	21		0,45	222,861	2,34803
	22		0,43	233,399	2,36810
	23		0,41	244,439	2,38817

Magnesium 28

Halbwertzeit 21,3 h

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
		00	100,00	1,000	0,00000
		10	99,46	1,005	0,00236
		20	98,92	1,010	0,00471
		30	98,39	1,016	0,00707
		40	97,85	1,021	0,00942
		50	97,32	1,027	0,01178
	1	**00**	96,80	1,033	0,01413
		10	96,27	1,038	0,01649
		20	95,75	1,044	0,01884
		30	95,24	1,050	0,02120
		40	94,72	1,055	0,02356
		50	94,21	1,061	0,02591
	2	**00**	93,70	1,067	0,02827
		10	93,19	1,073	0,03062
		20	92,69	1,078	0,03298
		30	92,19	1,084	0,03533
		40	91,69	1,090	0,03769
		50	91,19	1,096	0,04004
	3	**00**	90,70	1,102	0,04240
		10	90,21	1,108	0,04475
		20	89,72	1,114	0,04711
		30	89,23	1,120	0,04947
		40	88,75	1,126	0,05182
		50	88,27	1,132	0,05418
	4	**00**	87,79	1,139	0,05653
		10	87,32	1,145	0,05889
		20	86,85	1,151	0,06124
		30	86,38	1,157	0,06360
		40	85,91	1,164	0,06595
		50	85,45	1,170	0,06831
	5	**00**	84,98	1,176	0,07066
		10	84,52	1,183	0,07302
		20	84,07	1,189	0,07538
		30	83,61	1,195	0,07773
		40	83,16	1,202	0,08009
		50	82,71	1,209	0,08244
	6	**00**	82,26	1,215	0,08480
		10	81,82	1,222	0,08715
		20	81,38	1,228	0,08951

* Nachdruck der Seiten 240–254 nur mit Erlaubnis des Herausgebers.

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
		30	80,94	1,235	0,09186
		40	80,50	1,242	0,09422
		50	80,06	1,249	0,09658
	7	00	79,63	1,255	0,09893
		10	79,20	1,262	0,10129
		20	78,77	1,269	0,10364
		30	78,34	1,276	0,10600
		40	77,92	1,283	0,10835
		50	77,50	1,290	0,11071
	8	00	77,08	1,297	0,11306
		10	76,66	1,304	0,11542
		20	76,25	1,311	0,11777
		30	75,84	1,318	0,12013
		40	75,42	1,325	0,12249
		50	75,02	1,333	0,12484
	9	00	74,61	1,340	0,12720
		10	74,21	1,347	0,12955
		20	73,81	1,354	0,13191
		30	73,41	1,362	0,13426
		40	73,01	1,369	0,13662
		50	72,62	1,377	0,13897
	10	00	72,22	1,384	0,14133
		10	71,83	1,392	0,14368
		20	71,44	1,399	0,14604
		30	71,06	1,407	0,14840
		40	70,67	1,414	0,15075
		50	70,29	1,422	0,15311
	11	00	69,91	1,430	0,15546
		10	69,53	1,438	0,15782
		20	69,16	1,446	0,16017
		30	68,78	1,453	0,16253
		40	68,41	1,461	0,16488
		50	68,04	1,469	0,16724
	12	00	67,67	1,477	0,16959
		10	67,31	1,485	0,17195
		20	66,94	1,493	0,17431
		30	66,58	1,501	0,17666
		40	66,22	1,510	0,17902
		50	65,86	1,518	0,18137
	13	00	65,50	1,526	0,18373
		10	65,15	1,534	0,18608
		20	64,80	1,543	0,18844
		30	64,45	1,551	0,19079
		40	64,10	1,560	0,19315
		50	63,75	1,568	0,19550
	14	00	63,41	1,577	0,19786
		10	63,06	1,585	0,20022
		20	62,72	1,594	0,20257
		30	62,38	1,602	0,20493
		40	62,05	1,611	0,20728
		50	61,71	1,620	0,20964
	15	00	61,38	1,629	0,21199
		10	61,05	1,638	0,21435
		20	60,72	1,647	0,21670
		30	60,39	1,655	0,21906
		40	60,06	1,665	0,22142
		50	59,74	1,674	0,22377
	16	00	59,41	1,683	0,22613
		10	59,09	1,692	0,22848
		20	58,77	1,701	0,23084
		30	58,45	1,710	0,23319
		40	58,14	1,720	0,23555
		50	57,82	1,729	0,23790
	17	00	57,51	1,738	0,24026
		10	57,20	1,748	0,24261
		20	56,89	1,757	0,24497
		30	56,58	1,767	0,24733
		40	56,28	1,776	0,24968
		50	55,97	1,786	0,25204
	18	00	55,67	1,796	0,25439
		10	55,37	1,806	0,25675
		20	55,07	1,815	0,25910
		30	54,77	1,825	0,26146
		40	54,47	1,835	0,26381
		50	54,18	1,845	0,26617
	19	00	53,89	1,855	0,26852
		10	53,59	1,865	0,27088
		20	53,30	1,876	0,27324
		30	53,02	1,886	0,27559
		40	52,73	1,896	0,27795
		50	52,44	1,906	0,28030
	20	00	52,16	1,917	0,28266
		10	51,88	1,927	0,28501
		20	51,60	1,938	0,28737
		30	51,32	1,948	0,28972
		40	51,04	1,959	0,29208
		50	50,77	1,969	0,29444
	21	00	50,49	1,980	0,29679
		10	50,22	1,991	0,29915
		20	49,95	2,002	0,30150
		30	49,68	2,013	0,30386
		40	49,41	2,024	0,30621
		50	49,14	2,035	0,30857
	22	00	48,87	2,046	0,31092
		10	48,61	2,057	0,31328
		20	48,35	2,068	0,31563
		30	48,09	2,079	0,31799
		40	47,83	2,090	0,32035
		50	47,57	2,102	0,32270
	23	00	47,31	2,113	0,32506
		10	47,05	2,125	0,32741
		20	46,80	2,136	0,32977
		30	46,55	2,148	0,33212
		40	46,29	2,160	0,33448
		50	46,04	2,171	0,33683
1	00		45,79	2,183	0,33919
	01		44,33	2,255	0,35332
	02		42,91	2,330	0,36745
	03		41,53	2,407	0,38159
	04		40,20	2,487	0,39572
	05		38,92	2,569	0,40985
	06		37,67	2,654	0,42399
	07		36,47	2,742	0,43812
	08		35,30	2,833	0,45225
	09		34,17	2,926	0,46638
	10		33,07	3,023	0,48052
	11		32,01	3,123	0,49465
	12		30,99	3,226	0,50878
	13		30,00	3,333	0,52292
	14		29,04	3,443	0,53705
	15		28,11	3,557	0,55118
	16		27,21	3,675	0,56532
	17		26,34	3,797	0,57945
	18		25,49	3,922	0,59358
	19		24,68	4,052	0,60771
	20		23,89	4,186	0,62185
	21		23,12	4,324	0,63598
	22		22,38	4,467	0,65011
	23		21,66	4,615	0,66424
2	00		20,97	4,768	0,67838
	01		20,30	4,926	0,69251
	02		19,65	5,089	0,70664
	03		19,02	5,257	0,72078
	04		18,41	5,431	0,73491
	05		17,82	5,611	0,74904
	06		17,25	5,796	0,76317
	07		16,70	5,988	0,77731
	08		16,16	6,186	0,79144
	09		15,65	6,391	0,80557
	10		15,15	6,602	0,81970
	11		14,66	6,820	0,83384
	12		14,19	7,046	0,84797
	13		13,74	7,279	0,86210
	14		13,30	7,520	0,87623
	15		12,87	7,769	0,89037
	16		12,46	8,025	0,90450
	17		12,06	8,291	0,91863
	18		11,67	8,565	0,93276
	19		11,30	8,848	0,94689
	20		10,94	9,141	0,96103
	21		10,59	9,444	0,97516
	22		10,25	9,756	0,98929
	23		9,92	10,079	1,00343
3	00		9,60	10,412	1,01757
	01		9,30	10,757	1,03170
	02		9,00	11,113	1,04583
	03		8,71	11,480	1,05997
	04		8,43	11,860	1,07410
	05		8,16	12,252	1,08823
	06		7,90	12,657	1,10236
	07		7,65	13,076	1,11650
	08		7,40	13,509	1,13063
	09		7,17	13,956	1,14476
	10		6,94	14,417	1,15890
	11		6,71	14,894	1,17303
	12		6,50	15,387	1,18716
	13		6,29	15,896	1,20129
	14		6,09	16,422	1,21543
	15		5,89	16,965	1,22956
	16		5,71	17,526	1,24369
	17		5,52	18,106	1,25783
	18		5,35	18,705	1,27196
	19		5,17	19,323	1,28609
	20		5,01	19,962	1,30022
	21		4,85	20,623	1,31436
	22		4,69	21,305	1,32849
	23		4,54	22,010	1,34262
4	00		4,40	22,738	1,35676
	01		4,26	23,490	1,37089
	02		4,12	24,267	1,38502
	03		3,99	25,069	1,39915
	04		3,86	25,899	1,41329
	05		3,74	26,755	1,42742
	06		3,62	27,640	1,44155
	07		3,50	28,555	1,45569
	08		3,39	29,499	1,46982
	09		3,28	30,475	1,48395
	10		3,18	31,483	1,49808
	11		3,07	32,524	1,51222
	12		2,98	33,600	1,52635
	13		2,88	34,712	1,54048
	14		2,79	35,860	1,55462
	15		2,70	37,046	1,56875
	16		2,61	38,271	1,58288
	17		2,53	39,537	1,59701
	18		2,45	40,845	1,61115
	19		2,37	42,196	1,62528
	20		2,29	43,592	1,63941
	21		2,22	45,034	1,65355
	22		2,15	46,523	1,66768
	23		2,08	48,062	1,68181
5	00		2,01	49,652	1,69594
	06		1,66	60,358	1,78074
	12		1,36	73,372	1,86553
	18		1,12	89,192	1,95033
6	00		0,92	108,425	2,03513
	06		0,76	131,804	2,11993
	12		0,62	160,223	2,20473
	18		0,51	194,772	2,28953
7	00		0,42	236,764	2,37432
	06		0,35	287,819	2,45912
	12		0,29	349,882	2,54392
	18		0,24	425,314	2,62871
8	00		0,19	517,009	2,71350
	06		0,16	628,496	2,79830
	12		0,13	764,000	2,88309
	18		0,11	928,763	2,96791

Phosphor 32

Halbwertzeit 14,5 d

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
	0	00	100,00	1,000	0,00000
	6		98,81	1,012	0,00519
	12		97,64	1,024	0,01038
	18		96,48	1,036	0,01557
1	00		95,33	1,048	0,02076
	06		94,20	1,061	0,02595
	12		93,08	1,074	0,03114
	18		91,97	1,087	0,03633
2	00		90,88	1,100	0,04152
	06		89,80	1,113	0,04671
	12		88,74	1,126	0,05190
	18		87,68	1,140	0,05709
3	00		86,64	1,154	0,06228
	06		85,61	1,168	0,06747
	12		84,59	1,182	0,07266
	18		83,59	1,196	0,07785
4	00		82,60	1,210	0,08304
	06		81,61	1,225	0,08823
	12		80,64	1,240	0,09342
	18		79,69	1,254	0,09861
5	00		78,74	1,269	0,10380
	06		77,80	1,285	0,10899
	12		76,88	1,300	0,11418
	18		75,97	1,316	0,11937
6	00		75,06	1,332	0,12456
	06		74,17	1,348	0,12975
	12		73,29	1,364	0,13494
	18		72,42	1,380	0,14014
7	00		71,56	1,397	0,14533
	06		70,71	1,414	0,15052
	12		69,87	1,431	0,15571
	18		69,04	1,448	0,16090
8	00		68,22	1,465	0,16609
	06		67,41	1,483	0,17128
	12		66,61	1,501	0,17647
	18		65,82	1,519	0,18166
9	00		65,04	1,537	0,18685
	06		64,26	1,556	0,19204
	12		63,50	1,574	0,19723
	18		62,75	1,593	0,20242
10	00		62,00	1,612	0,20761
	06		61,26	1,632	0,21280
	12		60,54	1,651	0,21799
	18		59,82	1,671	0,22318
11	00		59,11	1,691	0,22837
	06		58,40	1,712	0,23356
	12		57,71	1,732	0,23875
	18		57,02	1,753	0,24394
12	00		56,35	1,774	0,24913
	06		55,68	1,796	0,25432
	12		55,02	1,817	0,25951
	18		54,36	1,839	0,26470
13	00		53,72	1,861	0,26989
	06		53,08	1,883	0,27508
	12		52,45	1,906	0,28027
	18		51,83	1,929	0,28546
14	00		51,21	1,952	0,29065
	06		50,60	1,976	0,29584
	12		50,00	2,000	0,30103
	18		49,41	2,024	0,30622
15	00		48,82	2,048	0,31141
	06		48,24	2,073	0,31660
	12		47,67	2,097	0,32179
	18		47,10	2,123	0,32698
16	00		46,54	2,148	0,33217
	06		45,99	2,174	0,33736
	12		45,44	2,200	0,34255
	18		44,90	2,227	0,34774
17	00		44,37	2,253	0,35293
	06		43,84	2,280	0,35812
	12		43,32	2,308	0,36331
	18		42,81	2,336	0,36850
18	00		42,30	2,364	0,37369
	06		41,79	2,392	0,37888
	12		41,30	2,421	0,38407
	18		40,81	2,450	0,38926
19	00		40,32	2,480	0,39445
	06		39,84	2,509	0,39964
	12		39,37	2,539	0,40483
	18		38,90	2,570	0,41002
20	00		38,44	2,601	0,41521
	06		37,98	2,632	0,42040
	12		37,53	2,664	0,42559
	18		37,09	2,696	0,43078
21	00		36,65	2,728	0,43597
	06		36,21	2,761	0,44117
	12		35,78	2,794	0,44636
	18		35,36	2,828	0,45155
22	00		34,94	2,862	0,45674
	06		34,52	2,896	0,46193
	12		34,11	2,931	0,46712
	18		33,71	2,966	0,47231
23	00		33,30	3,002	0,47750
	06		32,91	3,038	0,48269
	12		32,52	3,075	0,48788
	18		32,13	3,112	0,49307
24	00		31,75	3,149	0,49826
	06		31,37	3,187	0,50345
	12		31,00	3,225	0,50864
	18		30,63	3,264	0,51383
25	00		30,27	3,303	0,51902
	06		29,91	3,343	0,52421
	12		29,55	3,383	0,52940
	18		29,20	3,424	0,53459
26	00		28,86	3,465	0,53978
	06		28,51	3,507	0,54497
	12		28,17	3,549	0,55016
	18		27,84	3,592	0,55535
27	00		27,51	3,635	0,56054
	06		27,18	3,678	0,56573
	12		26,86	3,723	0,57092
	18		26,54	3,767	0,57611
28	00		26,22	3,813	0,58130
	06		25,91	3,859	0,58649
	12		25,60	3,905	0,59168
	18		25,30	3,952	0,59687
29	00		25,00	3,999	0,60206
	06		24,70	4,048	0,60725
	12		24,41	4,096	0,61244
	18		24,12	4,146	0,61763
30	00		23,83	4,195	0,62282
	06		23,55	4,246	0,62801
	12		23,27	4,297	0,63320
	18		22,99	4,349	0,63839
31	00		22,72	4,401	0,64358
	06		22,45	4,454	0,64877
	12		22,18	4,507	0,65396
	18		21,92	4,561	0,65915
32	00		21,66	4,616	0,66434
	06		21,40	4,672	0,66953
	12		21,15	4,728	0,67472
	18		20,90	4,785	0,67991
33	00		20,65	4,842	0,68510
	06		20,40	4,901	0,69029
	12		20,16	4,960	0,69548
	18		19,92	5,019	0,70067
34	00		19,69	5,079	0,70586
	06		19,45	5,141	0,71105
	12		19,22	5,202	0,71624
	18		18,99	5,265	0,72143
35	00		18,77	5,328	0,72662
	06		18,54	5,392	0,73181
	12		18,32	5,457	0,73700
	18		18,11	5,523	0,74219
36	00		17,89	5,589	0,74738
	06		17,68	5,656	0,75257
	12		17,47	5,724	0,75776
	18		17,26	5,793	0,76295
37	00		17,06	5,863	0,76814
	06		16,85	5,933	0,77333
	12		16,65	6,005	0,77852
	18		16,45	6,077	0,78371
38	00		16,26	6,150	0,78890
	06		16,07	6,224	0,79409
	12		15,88	6,299	0,79928
	18		15,69	6,374	0,80447
39	00		15,50	6,451	0,80967
	06		15,32	6,529	0,81485
	12		15,13	6,607	0,82005
	18		14,95	6,687	0,82524
40	00		14,78	6,767	0,83043
	12		14,43	6,931	0,84081
41	00		14,09	7,098	0,85119
	12		13,75	7,270	0,86157
42	00		13,43	7,446	0,87195
	12		13,11	7,626	0,88233
43	00		12,80	7,810	0,89270
	12		12,50	7,999	0,90308
44	00		12,20	8,193	0,91346
	12		11,92	8,391	0,92384

d	t h	min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
45	00		11,64	8,594	0,93422
	12		11,36	8,802	0,94460
46	**00**		11,09	9,015	0,95498
	12		10,83	9,233	0,96536
47	00		10,57	9,456	0,97574
	12		10,32	9,685	0,98612
48	**00**		10,08	9,919	0,99650
	12		9,84	10,159	1,00689
49	00		9,61	10,405	1,01727
	12		9,38	10,657	1,02765
50	**00**		9,16	10,915	1,03803
	12		8,95	11,179	1,04842
51	00		8,73	11,449	1,05880
	12		8,53	11,726	1,06918
52	**00**		8,33	12,010	1,07956
	12		8,13	12,300	1,08994
53	00		7,94	12,598	1,10032
	12		7,75	12,903	1,11070
54	**00**		7,57	13,215	1,12108
	12		7,39	13,534	1,13146
55	00		7,21	13,862	1,14184
	12		7,04	14,197	1,15222
56	**00**		6,88	14,541	1,16260
	12		6,71	14,892	1,17298
57	00		6,56	15,253	1,18336
	12		6,40	15,622	1,19374
58	**00**		6,25	16,000	1,20412
	12		6,10	16,387	1,21450
59	00		5,96	16,783	1,22488
	12		5,82	17,189	1,23526
60			5,68	17,605	1,24564
61			5,41	18,467	1,26640
62			5,16	19,371	1,28716
63			4,92	20,319	1,30792
64			4,69	21,314	1,32868
65			4,47	22,358	1,34945
66			4,26	23,453	1,37021
67			4,06	24,601	1,39097
68			3,88	25,806	1,41173
69			3,69	27,069	1,43249
70			3,52	28,395	1,45325
71			3,36	29,785	1,47401
72			3,20	31,244	1,49477
73			3,05	32,774	1,51553
74			2,91	34,378	1,53629
75			2,77	36,062	1,55705
76			2,64	37,827	1,57781
77			2,52	39,680	1,59857
78			2,40	41,622	1,61933
79			2,29	43,661	1,64009
80			2,18	45,798	1,66086
81			2,08	48,041	1,68162
82			1,98	50,393	1,70238
83			1,89	52,861	1,72314
84			1,80	55,449	1,74390
85			1,72	58,164	1,76466
86			1,64	61,012	1,78542
87			1,56	63,999	1,80618
88			1,49	67,133	1,82694
89			1,42	70,420	1,84770
90			1,35	73,868	1,86846
91			1,29	77,485	1,88922
92			1,23	81,279	1,90998
93			1,17	85,258	1,93074
94			1,12	89,432	1,95150
95			1,07	93,811	1,97226
96			1,02	98,404	1,99302
97			0,97	103,225	2,01379
98			0,92	108,280	2,03455
99			0,88	113,582	2,05531
100			0,84	119,142	2,07607
120			0,32	309,942	2,49128
140			0,12	806,321	2,90651
160			0,05	2097,76	3,32176
180			0,02	5455,54	3,73684

Phosphor 33

Halbwertzeit 25 d

d	t h	min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
	0		100,00	1,000	0,00000
	6		99,31	1,006	0,00301
	12		98,62	1,013	0,00602
	18		97,94	1,021	0,00903
1	**00**		97,27	1,028	0,01204
	06		96,59	1,035	0,01505
	12		95,93	1,042	0,01806
	18		95,26	1,049	0,02107
2	**00**		94,61	1,057	0,02408
	06		93,95	1,064	0,02709
	12		93,30	1,071	0,03010
	18		92,66	1,079	0,03311
3	**00**		92,02	1,086	0,03612
	06		91,38	1,094	0,03913
	12		90,75	1,101	0,04214
	18		90,13	1,109	0,04515
4	**00**		89,50	1,117	0,04817
	06		88,88	1,125	0,05118
	12		88,27	1,132	0,05419
	18		87,66	1,140	0,05720
5	**00**		87,06	1,148	0,06021
	06		86,45	1,156	0,06322
	12		85,86	1,164	0,06623
	18		85,26	1,172	0,06924
6	**00**		84,67	1,180	0,07225
	06		84,09	1,189	0,07526
	12		83,51	1,197	0,07827
	18		82,93	1,205	0,08128
7	**00**		82,36	1,214	0,08429
	06		81,79	1,222	0,08730
	12		81,23	1,231	0,09031
	18		80,66	1,239	0,09332
8	**00**		80,11	1,248	0,09633
	06		79,55	1,257	0,09934
	12		79,00	1,265	0,10235
	18		78,46	1,274	0,10536
9	**00**		77,92	1,283	0,10837
	06		77,38	1,292	0,11138
	12		76,84	1,301	0,11439
	18		76,31	1,310	0,11740
10	**00**		75,79	1,319	0,12041
	06		75,26	1,328	0,12342
	12		74,74	1,337	0,12643
	18		74,23	1,347	0,12944
11	**00**		73,71	1,356	0,13245
	06		73,20	1,366	0,13546
	12		72,70	1,375	0,13847
	18		72,20	1,385	0,14148
12	**00**		71,70	1,394	0,14449
	06		71,20	1,404	0,14751
	12		70,71	1,414	0,15052
	18		70,22	1,424	0,15353
13	**00**		69,74	1,433	0,15654
	06		69,26	1,443	0,15955
	12		68,78	1,453	0,16256
	18		68,30	1,464	0,16557
14	**00**		67,83	1,474	0,16858
	06		67,36	1,484	0,17159
	12		66,90	1,494	0,17460
	18		66,43	1,505	0,17761
15	**00**		65,98	1,515	0,18062
	06		65,52	1,526	0,18363
	12		65,07	1,536	0,18664
	18		64,62	1,547	0,18965
16	**00**		64,17	1,558	0,19266
	06		63,73	1,569	0,19567
	12		63,29	1,580	0,19868
	18		62,85	1,591	0,20169
17	**00**		62,42	1,602	0,20470
	06		61,99	1,613	0,20771
	12		61,56	1,624	0,21072
	18		61,13	1,635	0,21373
18	**00**		60,71	1,647	0,21674
	06		60,29	1,658	0,21975
	12		59,87	1,670	0,22276
	18		59,46	1,681	0,22577
19	**00**		59,05	1,693	0,22878
	06		58,64	1,705	0,23179
	12		58,24	1,717	0,23480
	18		57,83	1,729	0,23781
20	**00**		57,43	1,741	0,24082
	06		57,04	1,753	0,24383
	12		56,64	1,765	0,24685
	18		56,25	1,777	0,24986
21	**00**		55,86	1,790	0,25287
	06		55,48	1,802	0,25588
	12		55,10	1,815	0,25889
	18		54,71	1,827	0,26190
22	**00**		54,34	1,840	0,26491
	06		53,96	1,853	0,26792
	12		53,59	1,866	0,27093
	18		53,22	1,879	0,27394
23	**00**		52,85	1,892	0,27695
	06		52,49	1,905	0,27996
	12		52,12	1,918	0,28297
	18		51,76	1,931	0,28598
24	**00**		51,41	1,945	0,28899
	06		51,05	1,958	0,29200
	12		50,70	1,972	0,29501
	18		50,35	1,986	0,29802
25	**00**		50,00	2,000	0,30103
	06		49,65	2,013	0,30404
	12		49,31	2,027	0,30705
	18		48,97	2,042	0,31006
26	**00**		48,63	2,056	0,31307
	06		48,30	2,070	0,31608
	12		47,96	2,084	0,31909
	18		47,63	2,099	0,32210
27	**00**		47,30	2,114	0,32511
	06		46,98	2,128	0,32812
	12		46,65	2,143	0,33113
	18		46,33	2,158	0,33414
28	**00**		46,01	2,173	0,33715
	06		45,69	2,188	0,34016
	12		45,38	2,203	0,34317
	18		45,06	2,219	0,34619
29	**00**		44,75	2,234	0,34920
	06		44,44	2,250	0,35221
	12		44,14	2,265	0,35522
	18		43,83	2,281	0,35823
30	**00**		43,53	2,297	0,36124
	06		43,23	2,313	0,36425
	12		42,93	2,329	0,36726
	18		42,63	2,345	0,37027
31	**00**		42,34	2,361	0,37328
	06		42,04	2,378	0,37629
	12		41,75	2,394	0,37930
	18		41,47	2,411	0,38231
32	**00**		41,18	2,428	0,38532
	06		40,90	2,445	0,38833
	12		40,61	2,462	0,39134
	18		40,33	2,479	0,39435
33	**00**		40,05	2,496	0,39736
	06		39,78	2,514	0,40037
	12		39,50	2,531	0,40338
	18		39,23	2,549	0,40639
34	**00**		38,96	2,566	0,40940
	06		38,69	2,584	0,41241
	12		38,42	2,602	0,41542
	18		38,16	2,620	0,41843
35	**00**		37,89	2,639	0,42144
	06		37,63	2,657	0,42445
	12		37,37	2,675	0,42746
	18		37,11	2,694	0,43047
36	**00**		36,86	2,713	0,43348
	06		36,60	2,732	0,43649
	12		36,35	2,751	0,43950
	18		36,10	2,770	0,44251
37	**00**		35,85	2,789	0,44552
	06		35,60	2,808	0,44854
	12		35,36	2,828	0,45155
	18		35,11	2,848	0,45456
38	**00**		34,87	2,867	0,45757
	06		34,63	2,887	0,46058
	12		34,39	2,907	0,46359
	18		34,15	2,928	0,46660
39	**00**		33,92	2,948	0,46961
	06		33,68	2,969	0,47262
	12		33,45	2,989	0,47563
	18		33,22	3,010	0,47864
40	**00**		32,99	3,031	0,48165
	12		32,53	3,073	0,48767
41	00		32,09	3,116	0,49369
	12		31,64	3,160	0,49971
42	**00**		31,21	3,204	0,50573
	12		30,78	3,249	0,51175
43	00		30,35	3,294	0,51777
	12		29,94	3,340	0,52379
44	**00**		29,52	3,386	0,52981
	12		29,12	3,434	0,53583
45	00		28,72	3,482	0,54185
	12		28,32	3,530	0,54788
46	**00**		27,93	3,580	0,55390
	12		27,55	3,630	0,55992
47	00		27,17	3,680	0,56594
	12		26,79	3,732	0,57196
48	**00**		26,43	3,784	0,57798
	12		26,06	3,837	0,58400
49	00		25,70	3,890	0,59002
	12		25,35	3,944	0,59604
50	**00**		25,00	3,999	0,60206
	12		24,66	4,055	0,60808
51	00		24,32	4,112	0,61410
	12		23,98	4,169	0,62012
52	**00**		23,65	4,228	0,62614
	12		23,33	4,287	0,63216
53	00		23,00	4,346	0,63818
	12		22,69	4,407	0,64420
54	**00**		22,38	4,469	0,65022
	12		22,07	4,531	0,65625
55	00		21,76	4,594	0,66227
	12		21,46	4,658	0,66829
56	**00**		21,17	4,723	0,67431
	12		20,88	4,789	0,68033
57	00		20,59	4,856	0,68635
	12		20,31	4,924	0,69237
58	**00**		20,03	4,993	0,69839
	12		19,75	5,063	0,70441
59	00		19,48	5,133	0,71043
	12		19,21	5,205	0,71645
60	**00**		18,95	5,278	0,72247
	12		18,69	5,351	0,72849
61	00		18,43	5,426	0,73451
	12		18,17	5,502	0,74053
62	**00**		17,92	5,578	0,74655
	12		17,68	5,656	0,75257
63	00		17,43	5,735	0,75859
	12		17,19	5,815	0,76462
64	**00**		16,96	5,897	0,77064
	12		16,72	5,979	0,77666
65	00		16,49	6,062	0,78268
	12		16,27	6,147	0,78870
66	**00**		16,04	6,233	0,79472
	12		15,82	6,320	0,80074
67	00		15,60	6,408	0,80676
	12		15,39	6,497	0,81278
68	**00**		15,18	6,588	0,81880
	12		14,97	6,680	0,82482
69	00		14,76	6,773	0,83084
	12		14,56	6,868	0,83686
70			14,36	6,964	0,84288
71			13,97	7,160	0,85492
72			13,58	7,361	0,86696
73			13,21	7,568	0,87900
74			12,85	7,781	0,89104
75			12,50	7,999	0,90308
76			12,16	8,224	0,91513
77			11,83	8,456	0,92717
78			11,50	8,693	0,93921
79			11,19	8,938	0,95125
80			10,88	9,189	0,96329
81			10,58	9,447	0,97533
82			10,30	9,713	0,98737
83			10,01	9,986	0,99941
84			9,74	10,267	1,01146
85			9,47	10,556	1,02350
86			9,21	10,852	1,03554
87			8,96	11,157	1,04758
88			8,72	11,471	1,05963
89			8,48	11,794	1,07167
90			8,25	12,125	1,08371
91			8,02	12,466	1,09575
92			7,80	12,817	1,10779
93			7,59	13,177	1,11983
94			7,38	13,547	1,13187
95			7,18	13,928	1,14391
96			6,98	14,320	1,15596
97			6,79	14,723	1,16800
98			6,61	15,136	1,18004
99			6,43	15,562	1,19208
100			6,25	16,000	1,20412
105			5,44	18,379	1,26433
110			4,74	21,112	1,32453
115			4,12	24,251	1,38474
120			3,59	27,857	1,44494
125			3,13	32,000	1,50515
130			2,72	36,758	1,56536
135			2,37	42,224	1,62556
140			2,06	48,502	1,68577
145			1,79	55,714	1,74597
150			1,56	63,999	1,80618
155			1,36	73,515	1,86638
160			1,18	84,447	1,92659
165			1,03	97,003	1,98679
170			0,90	111,430	2,04700
175			0,78	128,000	2,10721
180			0,68	147,032	2,16741
185			0,59	168,896	2,22762
190			0,52	194,012	2,28783
195			0,45	222,861	2,34803
200			0,39	255,996	2,40823
205			0,34	294,065	2,46844
210			0,30	337,792	2,52865
215			0,26	388,018	2,58885
220			0,22	445,712	2,64906
225			0,20	512,006	2,70928
230			0,17	588,131	2,76947
235			0,15	675,584	2,82968

Schwefel 35

Halbwertzeit 87 d

d	t h	min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
0			100,00	1,000	0,00000
1			99,21	1,007	0,00346
2			98,42	1,016	0,00692
3			97,64	1,024	0,01038
4			96,86	1,032	0,01384
5			96,09	1,040	0,01730
6			95,33	1,048	0,02076
7			94,58	1,057	0,02422
8			93,83	1,065	0,02768
9			93,08	1,074	0,03114
10			92,34	1,082	0,03460
11			91,61	1,091	0,03806
12			90,88	1,100	0,04152
13			90,16	1,109	0,04498
14			89,45	1,117	0,04844
15			88,74	1,126	0,05190
16			88,03	1,135	0,05536
17			87,33	1,145	0,05882
18			86,64	1,154	0,06228
19			85,95	1,163	0,06574
20			85,27	1,172	0,06920

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
21			84,59	1,182	0,07266
22			83,92	1,191	0,07612
23			83,26	1,201	0,07958
24			82,60	1,210	0,08304
25			81,94	1,220	0,08650
26			81,29	1,230	0,08996
27			80,64	1,240	0,09342
28			80,00	1,249	0,09688
29			79,37	1,259	0,10034
30			78,74	1,269	0,10380
31			78,12	1,280	0,10726
32			77,50	1,290	0,11072
33			76,88	1,300	0,11418
34			76,27	1,311	0,11764
35			75,67	1,321	0,12110
36			75,06	1,332	0,12456
37			74,47	1,342	0,12802
38			73,88	1,353	0,13148
39			73,29	1,364	0,13494
40			72,71	1,375	0,13841
41			72,13	1,386	0,14187
42			71,56	1,397	0,14533
43			70,99	1,408	0,14879
44			70,43	1,419	0,15225
45			69,87	1,431	0,15571
46			69,32	1,442	0,15917
47			68,77	1,454	0,16263
48			68,22	1,465	0,16609
49			67,68	1,477	0,16955
50			67,14	1,489	0,17301
51			66,61	1,501	0,17647
52			66,08	1,513	0,17993
53			65,56	1,525	0,18339
54			65,04	1,537	0,18685
55			64,52	1,549	0,19031
56			64,01	1,562	0,19377
57			63,50	1,574	0,19723
58			63,00	1,587	0,20069
59			62,50	1,600	0,20415
60			62,00	1,612	0,20761
61			61,51	1,625	0,21107
62			61,02	1,638	0,21453
63			60,54	1,651	0,21799
64			60,06	1,665	0,22145
65			59,58	1,678	0,22491
66			59,11	1,691	0,22837
67			58,64	1,705	0,23183
68			58,17	1,719	0,23529
69			57,71	1,732	0,23875
70			57,25	1,746	0,24221
71			56,80	1,760	0,24567
72			56,35	1,774	0,24913
73			55,90	1,788	0,25259
74			55,46	1,803	0,25605
75			55,02	1,817	0,25951
76			54,58	1,832	0,26297
77			54,15	1,846	0,26643
78			53,72	1,861	0,26989
79			53,29	1,876	0,27335
80			52,87	1,891	0,27681
81			52,45	1,906	0,28027
82			52,03	1,921	0,28373
83			51,62	1,937	0,28719
84			51,21	1,952	0,29065
85			50,80	1,968	0,29411
86			50,40	1,984	0,29757
87			50,00	2,000	0,30103
88			49,60	2,015	0,30449
89			49,21	2,032	0,30795
90			48,82	2,048	0,31141
91			48,43	2,064	0,31487
92			48,05	2,081	0,31833
93			47,67	2,097	0,32179
94			47,29	2,114	0,32525
95			46,91	2,131	0,32871
96			46,54	2,148	0,33217
97			46,17	2,165	0,33563
98			45,80	2,183	0,33909
99			45,44	2,200	0,34255
100			45,08	2,218	0,34601
102			44,37	2,253	0,35293
104			43,67	2,290	0,35985
106			42,98	2,326	0,36677
108			42,30	2,364	0,37369
110			41,63	2,402	0,38061
112			40,97	2,440	0,38753
114			40,32	2,480	0,39445
116			39,69	2,519	0,40137
118			39,06	2,560	0,40829
120			38,44	2,601	0,41521
122			37,83	2,643	0,42213
124			37,23	2,685	0,42905
126			36,65	2,728	0,43597
128			36,07	2,772	0,44290
130			35,50	2,817	0,44982
132			34,94	2,862	0,45674
134			34,38	2,908	0,46366
136			33,84	2,955	0,47058
138			33,30	3,002	0,47750
140			32,78	3,050	0,48442
142			32,26	3,099	0,49134
144			31,75	3,149	0,49826
146			31,25	3,200	0,50518
148			30,75	3,251	0,51210
150			30,27	3,303	0,51902
152			29,79	3,356	0,52594
154			29,32	3,410	0,53286
156			28,86	3,465	0,53978
158			28,40	3,521	0,54670
160			27,95	3,577	0,55362
162			27,51	3,635	0,56054
164			27,07	3,693	0,56746
166			26,65	3,753	0,57438
168			26,22	3,813	0,58130
170			25,81	3,874	0,58822
172			25,40	3,936	0,59514
174			25,00	3,999	0,60206
176			24,60	4,064	0,60898
178			24,22	4,129	0,61590
180			23,83	4,195	0,62282
182			23,46	4,263	0,62974
184			23,09	4,331	0,63666
186			22,72	4,401	0,64358
188			22,36	4,471	0,65050
190			22,01	4,543	0,65742
192			21,66	4,616	0,66434
194			21,32	4,690	0,67126
196			20,98	4,766	0,67818
198			20,65	4,842	0,68510
200			20,32	4,920	0,69202
202			20,00	4,999	0,69894
204			19,69	5,079	0,70586
206			19,37	5,161	0,71278
208			19,07	5,244	0,71970
210			18,77	5,328	0,72662
212			18,47	5,414	0,73354
214			18,18	5,501	0,74046
216			17,89	5,589	0,74738
218			17,61	5,679	0,75430
220			17,33	5,770	0,76122
222			17,06	5,863	0,76814
224			16,79	5,957	0,77506
226			16,52	6,053	0,78198
228			16,26	6,150	0,78890
230			16,00	6,249	0,79582
232			15,75	6,349	0,80274
234			15,50	6,451	0,80967
236			15,26	6,555	0,81659
238			15,01	6,660	0,82351
240			14,78	6,767	0,83043
242			14,54	6,876	0,83735
244			14,31	6,986	0,84427
246			14,09	7,098	0,85119
248			13,86	7,212	0,85811
250			13,65	7,328	0,86503
255			13,11	7,626	0,88233
260			12,60	7,936	0,89962
265			12,11	8,258	0,91692
270			11,64	8,594	0,93422
275			11,18	8,943	0,95152
280			10,74	9,307	0,96882
285			10,32	9,685	0,98612
290			9,92	10,079	1,00343
295			9,53	10,488	1,02073
300			9,16	10,915	1,03803
305			8,80	11,358	1,05534
310			8,46	11,820	1,07264
315			8,13	12,300	1,08994
320			7,81	12,800	1,10724
325			7,51	13,321	1,12454
330			7,21	13,862	1,14184
335			6,93	14,425	1,15914
340			6,66	15,012	1,17644
345			6,40	15,622	1,19374
350			6,15	16,256	1,21104
360			5,68	17,605	1,24564
370			5,25	19,065	1,28024
380			4,84	20,646	1,31484
390			4,47	22,358	1,34945
400			4,13	24,212	1,38405
410			3,81	26,220	1,41865
420			3,52	28,395	1,45325
430			3,25	30,750	1,48785
440			3,00	33,300	1,52245
450			2,77	36,062	1,55705
460			2,56	39,052	1,59165
470			2,36	42,291	1,62625
480			2,18	45,798	1,66086
490			2,02	49,597	1,69546
500			1,86	53,710	1,73006
600			0,84	119,142	2,07607
700			0,38	264,291	2,42208
800			0,17	586,269	2,76810
900			0,08	1300,56	3,11413

Kalium 42

Halbwertzeit 12,5 h

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
		00	100,00	1,000	0,00000
		10	99,08	1,009	0,00401
		20	98,17	1,018	0,00803
		30	97,27	1,028	0,01204
		40	96,37	1,037	0,01606
		50	95,48	1,047	0,02007
	1	00	94,61	1,057	0,02408
		10	93,74	1,066	0,02810
		20	92,87	1,076	0,03211
		30	92,02	1,086	0,03612
		40	91,17	1,096	0,04014
		50	90,33	1,107	0,04415
	2	00	89,50	1,117	0,04817
		10	88,68	1,127	0,05218
		20	87,86	1,138	0,05619
		30	87,06	1,148	0,06021
		40	86,25	1,159	0,06422
		50	85,46	1,170	0,06823
	3	00	84,67	1,180	0,07225
		10	83,90	1,191	0,07626
		20	83,12	1,203	0,08028
		30	82,36	1,214	0,08429
		40	81,60	1,225	0,08830
		50	80,85	1,236	0,09232
	4	00	80,11	1,248	0,09633
		10	79,37	1,259	0,10034
		20	78,64	1,271	0,10436
		30	77,92	1,283	0,10837
		40	77,20	1,295	0,11239
		50	76,49	1,307	0,11640
	5	00	75,79	1,319	0,12041
		10	75,09	1,331	0,12443
		20	74,40	1,344	0,12844
		30	73,71	1,356	0,13245
		40	73,04	1,369	0,13647
		50	72,36	1,381	0,14048
	6	00	71,70	1,394	0,14449
		10	71,04	1,407	0,14851
		20	70,38	1,420	0,15252
		30	69,74	1,433	0,15654
		40	69,10	1,447	0,16055
		50	68,46	1,460	0,16456
	7	00	67,83	1,474	0,16858
		10	67,21	1,487	0,17259
		20	66,59	1,501	0,17660
		30	65,98	1,515	0,18062
		40	65,37	1,529	0,18463
		50	64,77	1,543	0,18865
	8	00	64,17	1,558	0,19266
		10	63,58	1,572	0,19667
		20	63,00	1,587	0,20069
		30	62,42	1,602	0,20470
		40	61,84	1,617	0,20871
		50	61,27	1,632	0,21273
	9	00	60,71	1,647	0,21674
		10	60,15	1,662	0,22076
		20	59,60	1,677	0,22477
		30	59,05	1,693	0,22878
		40	58,51	1,709	0,23280
		50	57,97	1,725	0,23681
	10	00	57,43	1,741	0,24082
		10	56,91	1,757	0,24484
		20	56,38	1,773	0,24885
		30	55,86	1,790	0,25287
		40	55,35	1,806	0,25688
		50	54,84	1,823	0,26089
	11	00	54,34	1,840	0,26491
		10	53,84	1,857	0,26892
		20	53,34	1,874	0,27293
		30	52,85	1,892	0,27695
		40	52,36	1,909	0,28096
		50	51,88	1,927	0,28498
	12	00	51,41	1,945	0,28899
		10	50,93	1,963	0,29300
		20	50,46	1,981	0,29702
		30	50,00	2,000	0,30103
		40	49,54	2,018	0,30504
		50	49,08	2,037	0,30906
	13	00	48,63	2,056	0,31307
		10	48,19	2,075	0,31709
		20	47,74	2,094	0,32110
		30	47,30	2,114	0,32511
		40	46,87	2,133	0,32913
		50	46,44	2,153	0,33314
	14	00	46,01	2,173	0,33715
		10	45,59	2,193	0,34117
		20	45,17	2,214	0,34518
		30	44,75	2,234	0,34920
		40	44,34	2,255	0,35321
		50	43,93	2,276	0,35722
	15	00	43,53	2,297	0,36124
		10	43,13	2,318	0,36525
		20	42,73	2,340	0,36926
		30	42,34	2,361	0,37328
		40	41,95	2,383	0,37729
		50	41,56	2,406	0,38131
	16	00	41,18	2,428	0,38532
		10	40,80	2,450	0,38933
		20	40,43	2,473	0,39335
		30	40,05	2,496	0,39736
		40	39,69	2,519	0,40137
		50	39,32	2,543	0,40539
	17	00	38,96	2,566	0,40940
		10	38,60	2,590	0,41341
		20	38,24	2,614	0,41743
		30	37,89	2,639	0,42144
		40	37,54	2,663	0,42546
		50	37,20	2,688	0,42947
	18	00	36,86	2,713	0,43348
		10	36,52	2,738	0,43750
		20	36,18	2,763	0,44151
		30	35,85	2,789	0,44552
		40	35,52	2,815	0,44954
		50	35,19	2,841	0,45355
	19	00	34,87	2,867	0,45757
		10	34,55	2,894	0,46158
		20	34,23	2,921	0,46559
		30	33,92	2,948	0,46961
		40	33,60	2,975	0,47362
		50	33,29	3,003	0,47763
	20	00	32,99	3,031	0,48165
		10	32,68	3,059	0,48566
		20	32,38	3,087	0,48968
		30	32,09	3,116	0,49369
		40	31,79	3,145	0,49770
		50	31,50	3,174	0,50172
	21	00	31,21	3,204	0,50573
		10	30,92	3,234	0,50974
		20	30,64	3,264	0,51376
		30	30,35	3,294	0,51777
		40	30,08	3,324	0,52179
		50	29,80	3,355	0,52580
	22	00	29,52	3,386	0,52981
		10	29,25	3,418	0,53383
		20	28,98	3,450	0,53784
		30	28,72	3,482	0,54185
		40	28,45	3,514	0,54587
		50	28,19	3,547	0,54988
	23	00	27,93	3,580	0,55390
		10	27,68	3,613	0,55791
		20	27,42	3,646	0,56192
		30	27,17	3,680	0,56594
		40	26,92	3,714	0,56995
		50	26,67	3,749	0,57396
1	00		26,43	3,784	0,57798
	01		25,00	3,999	0,60206
	02		23,65	4,228	0,62614
	03		22,38	4,469	0,65022
	04		21,17	4,723	0,67431
	05		20,03	4,993	0,69839
	06		18,95	5,278	0,72247
	07		17,92	5,578	0,74655
	08		16,96	5,897	0,77064
	09		16,04	6,233	0,79472
	10		15,18	6,588	0,81880
	11		14,36	6,964	0,84288
	12		13,58	7,361	0,86696
	13		12,85	7,781	0,89104
	14		12,16	8,224	0,91513
	15		11,50	8,693	0,93921
	16		10,88	9,189	0,96329
	17		10,30	9,713	0,98737
	18		9,74	10,267	1,01146
	19		9,21	10,852	1,03554
	20		8,72	11,471	1,05963
	21		8,25	12,125	1,08371
	22		7,80	12,817	1,10779
	23		7,38	13,547	1,13187
2	00		6,98	14,320	1,15596
	01		6,61	15,136	1,18004
	02		6,25	16,000	1,20412
	03		5,91	16,912	1,22820
	04		5,59	17,876	1,25229
	05		5,29	18,895	1,27637
	06		5,01	19,973	1,30045
	07		4,74	21,112	1,32453
	08		4,48	22,315	1,34861
	09		4,24	23,588	1,37270
	10		4,01	24,933	1,39678
	11		3,79	26,354	1,42086
	12		3,59	27,857	1,44494
	13		3,40	29,445	1,46903
	14		3,21	31,124	1,49311
	15		3,04	32,899	1,51719
	16		2,88	34,775	1,54127
	17		2,72	36,758	1,56536
	18		2,57	38,854	1,58944
	19		2,43	41,069	1,61352
	20		2,30	43,411	1,63760
	21		2,18	45,886	1,66169
	22		2,06	48,502	1,68577
	23		1,95	51,268	1,70985

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
3	00		1,85	54,191	1,73393
	01		1,75	57,281	1,75801
	02		1,65	60,547	1,78210
	03		1,56	63,999	1,80618
	04		1,48	67,648	1,83026
	05		1,40	71,505	1,85434
	06		1,32	75,582	1,87842
	07		1,25	79,891	1,90250
	08		1,18	84,447	1,92659
	09		1,12	89,261	1,95067
	10		1,06	94,351	1,97475
	11		1,00	99,730	1,99883
	12		0,95	105,419	2,02292
	13		0,90	111,430	2,04700
	14		0,85	117,784	2,07109
	15		0,80	124,500	2,09517
	16		0,76	131,597	2,11925
	17		0,72	139,101	2,14333
	18		0,68	147,032	2,16741
	19		0,64	155,417	2,19150
	20		0,61	164,279	2,21558
	21		0,58	173,644	2,23966
	22		0,54	183,546	2,26375
	23		0,52	194,012	2,28783
4	00		0,49	205,073	2,31191
	01		0,46	216,764	2,33599
	02		0,44	229,126	2,36008
	03		0,41	242,189	2,38416
	04		0,39	255,996	2,40823
	05		0,37	270,599	2,43233
	06		0,35	286,024	2,45640
	07		0,33	302,334	2,48049
	08		0,31	319,570	2,50457
	09		0,30	337,792	2,52865
	10		0,28	357,053	2,55273
	11		0,26	377,415	2,57682
	12		0,25	398,930	2,60090
	13		0,24	421,674	2,62498
	14		0,22	445,712	2,64906
	15		0,21	471,142	2,67315
	16		0,20	498,007	2,69724
	17		0,19	526,398	2,72132

Calcium 45

Halbwertzeit 160 d

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
0			100,00	1,000	0,00000
1			99,57	1,004	0,00188
2			99,14	1,008	0,00376
3			98,71	1,013	0,00564
4			98,28	1,017	0,00753
5			97,86	1,021	0,00941
6			97,43	1,026	0,01129
7			97,01	1,030	0,01317
8			96,59	1,035	0,01505
9			96,18	1,039	0,01693
10			95,76	1,044	0,01881
11			95,35	1,048	0,02070
12			94,93	1,053	0,02258
13			94,52	1,057	0,02446
14			94,12	1,062	0,02634
15			93,71	1,067	0,02822
16			93,30	1,071	0,03010
17			92,90	1,076	0,03198
18			92,50	1,081	0,03387
19			92,10	1,085	0,03575
20			91,70	1,090	0,03763
21			91,30	1,095	0,03951
22			90,91	1,099	0,04139
23			90,52	1,104	0,04327
24			90,13	1,109	0,04515
25			89,74	1,114	0,04704
26			89,35	1,119	0,04892
27			88,96	1,124	0,05080
28			88,58	1,128	0,05268
29			88,19	1,133	0,05456
30			87,81	1,138	0,05644
31			87,43	1,143	0,05833
32			87,06	1,148	0,06021
33			86,68	1,153	0,06209
34			86,30	1,158	0,06397
35			85,93	1,163	0,06585
36			85,56	1,168	0,06773
37			85,19	1,173	0,06961
38			84,82	1,178	0,07150
39			84,45	1,184	0,07338
40			84,09	1,189	0,07526
41			83,73	1,194	0,07714
42			83,36	1,199	0,07902
43			83,00	1,204	0,08090
44			82,65	1,209	0,08278
45			82,29	1,215	0,08467
46			81,93	1,220	0,08655
47			81,58	1,225	0,08843
48			81,23	1,231	0,09031
49			80,87	1,236	0,09219
50			80,52	1,241	0,09407
51			80,18	1,247	0,09595
52			79,83	1,252	0,09784
53			79,48	1,258	0,09972
54			79,14	1,263	0,10160
55			78,80	1,269	0,10348
56			78,46	1,274	0,10536
57			78,12	1,280	0,10724
58			77,78	1,285	0,10912
59			77,45	1,291	0,11101
60			77,11	1,296	0,11289
61			76,78	1,302	0,11477
62			76,45	1,308	0,11665
63			76,11	1,313	0,11853
64			75,79	1,319	0,12041
65			75,46	1,325	0,12229
66			75,13	1,330	0,12418
67			74,81	1,336	0,12606
68			74,48	1,342	0,12794
69			74,16	1,348	0,12982
70			73,84	1,354	0,13170
71			73,52	1,360	0,13358
72			73,20	1,366	0,13546
73			72,89	1,371	0,13735
74			72,57	1,377	0,13923
75			72,26	1,383	0,14111
76			71,95	1,389	0,14299
77			71,64	1,395	0,14487
78			71,33	1,402	0,14675
79			71,02	1,408	0,14863
80			70,71	1,414	0,15052
81			70,41	1,420	0,15240
82			70,10	1,426	0,15428
83			69,80	1,432	0,15616
84			69,50	1,438	0,15804
85			69,20	1,445	0,15992
86			68,90	1,451	0,16180
87			68,60	1,457	0,16369
88			68,30	1,464	0,16557
89			68,01	1,470	0,16745
90			67,71	1,476	0,16933
91			67,42	1,483	0,17121
92			67,13	1,489	0,17309
93			66,84	1,496	0,17497
94			66,55	1,502	0,17686
95			66,26	1,509	0,17874
96			65,98	1,515	0,18062
97			65,69	1,522	0,18250
98			65,41	1,528	0,18438
99			65,12	1,535	0,18626
100			64,84	1,542	0,18814
105			63,45	1,575	0,19755
110			62,09	1,610	0,20696
115			60,76	1,645	0,21637
120			59,46	1,681	0,22577
125			58,19	1,718	0,23518
130			56,94	1,756	0,24459
135			55,72	1,794	0,25399
140			54,53	1,834	0,26340
145			53,36	1,874	0,27281
150			52,21	1,915	0,28222
155			51,09	1,957	0,29162
160			50,00	2,000	0,30103
165			48,93	2,043	0,31044
170			47,88	2,088	0,31985
175			46,85	2,134	0,32925
180			45,85	2,181	0,33866
185			44,87	2,228	0,34807
190			43,91	2,277	0,35747
195			42,97	2,327	0,36688
200			42,04	2,378	0,37629
205			41,14	2,430	0,38570
210			40,26	2,483	0,39510
215			39,40	2,538	0,40451
220			38,56	2,593	0,41392
225			37,73	2,650	0,42332
230			36,92	2,708	0,43273
235			36,13	2,767	0,44214
240			35,36	2,828	0,45155
245			34,60	2,890	0,46095
250			33,86	2,953	0,47036
255			33,13	3,018	0,47977
260			32,42	3,084	0,48917
265			31,73	3,151	0,49858
270			31,05	3,220	0,50799
275			30,38	3,291	0,51740
280			29,73	3,363	0,52680
285			29,09	3,437	0,53621
290			28,47	3,512	0,54562
295			27,86	3,589	0,55502
300			27,26	3,668	0,56443
305			26,68	3,748	0,57384
310			26,11	3,830	0,58325
315			25,55	3,914	0,59265
320			25,00	3,999	0,60206
325			24,46	4,087	0,61147
330			23,94	4,177	0,62087
335			23,43	4,268	0,63028
340			22,93	4,362	0,63969
345			22,43	4,457	0,64910
350			21,95	4,555	0,65850
355			21,48	4,654	0,66791
360			21,02	4,756	0,67732
365			20,57	4,860	0,68672
370			20,13	4,967	0,69613
375			19,70	5,076	0,70554
380			19,28	5,187	0,71495
385			18,86	5,300	0,72435
390			18,46	5,417	0,73376
395			18,06	5,535	0,74317
400			17,68	5,656	0,75257
405			17,30	5,780	0,76198
410			16,93	5,907	0,77139
415			16,57	6,036	0,78080
420			16,21	6,168	0,79020
425			15,86	6,303	0,79961
430			15,52	6,441	0,80902
435			15,19	6,582	0,81842
440			14,87	6,727	0,82783
445			14,55	6,874	0,83724
450			14,23	7,024	0,84664
455			13,93	7,178	0,85605
460			13,63	7,335	0,86546
465			13,34	7,496	0,87486
470			13,05	7,660	0,88427
475			12,77	7,828	0,89368
480			12,50	7,999	0,90308
485			12,23	8,175	0,91249
490			11,97	8,354	0,92190
495			11,71	8,536	0,93130
500			11,46	8,723	0,94071
520			10,51	9,513	0,97834
540			9,64	10,374	1,01598
560			8,84	11,313	1,05361
580			8,11	12,337	1,09123
600			7,43	13,454	1,12886
620			6,82	14,672	1,16649
640			6,25	16,000	1,20412
660			5,73	17,448	1,24175
680			5,26	19,027	1,27938
700			4,82	20,749	1,31701
720			4,42	22,627	1,35464
740			4,05	24,675	1,39226
760			3,72	26,908	1,42989
780			3,41	29,344	1,46752
800			3,13	32,000	1,50515
820			2,87	34,896	1,54278
840			2,63	38,054	1,58041
860			2,41	41,498	1,61804
880			2,21	45,254	1,65567
900			2,03	49,350	1,69329
920			1,86	53,817	1,73092
940			1,70	58,688	1,76855
960			1,56	63,999	1,80618
980			1,43	69,791	1,84381
1000			1,31	76,108	1,88143
1020			1,20	82,996	1,91906
1040			1,10	90,507	1,95669
1060			1,01	98,699	1,99431
1080			0,93	107,634	2,03195
1100			0,85	117,376	2,06958
1120			0,78	128,000	2,10721
1140			0,72	139,584	2,14484
1160			0,66	152,218	2,18247
1180			0,60	165,994	2,22009
1200			0,55	181,018	2,25772
1220			0,51	197,402	2,29535
1240			0,46	215,271	2,33299
1260			0,43	234,752	2,37061
1280			0,39	255,996	2,40823
1300			0,36	279,173	2,44587
1320			0,33	304,432	2,48349
1340			0,30	331,994	2,52113
1360			0,28	362,043	2,55876
1380			0,25	394,804	2,59638
1400			0,23	430,533	2,63401
1420			0,21	469,505	2,67164
1440			0,20	512,006	2,70928
1460			0,18	558,347	2,74690
1480			0,16	608,865	2,78452

Chrom 51

Halbwertzeit 27 d

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
	0		100,00	1,000	0,00000
	6		99,36	1,006	0,00279
	12		98,72	1,012	0,00558
	18		98,09	1,019	0,00836
1	00		97,47	1,026	0,01115
	06		96,84	1,032	0,01394
	12		96,22	1,039	0,01672
	18		95,61	1,045	0,01951
2	00		95,00	1,052	0,02230
	06		94,39	1,059	0,02509
	12		93,78	1,066	0,02787
	18		93,18	1,073	0,03066
3	00		92,59	1,080	0,03345
	06		92,00	1,087	0,03624
	12		91,41	1,094	0,03902
	18		90,82	1,101	0,04181
4	00		90,24	1,108	0,04460
	06		89,66	1,115	0,04738
	12		89,09	1,122	0,05017
	18		88,52	1,129	0,05296
5	00		87,95	1,136	0,05575
	06		87,39	1,144	0,05853
	12		86,83	1,151	0,06132
	18		86,28	1,159	0,06411
6	00		85,72	1,166	0,06690
	06		85,18	1,174	0,06968
	12		84,63	1,181	0,07247
	18		84,09	1,189	0,07526
7	00		83,55	1,196	0,07805
	06		83,02	1,204	0,08083
	12		82,49	1,212	0,08362
	18		81,96	1,220	0,08641
8	00		81,43	1,227	0,08919
	06		80,91	1,235	0,09198
	12		80,40	1,243	0,09477
	18		79,88	1,251	0,09756
9	00		79,37	1,259	0,10034
	06		78,86	1,268	0,10313
	12		78,36	1,276	0,10592
	18		77,86	1,284	0,10871
10	00		77,36	1,292	0,11149
	06		76,86	1,301	0,11428
	12		76,37	1,309	0,11707
	18		75,88	1,317	0,11986
11	00		75,40	1,326	0,12264
	06		74,92	1,334	0,12543
	12		74,44	1,343	0,12822
	18		73,96	1,352	0,13100
12	00		73,49	1,360	0,13379
	06		73,02	1,369	0,13658
	12		72,55	1,378	0,13937
	18		72,09	1,387	0,14215
13	00		71,62	1,396	0,14494
	06		71,17	1,405	0,14773
	12		70,71	1,414	0,15052
	18		70,26	1,423	0,15330
14	00		69,81	1,432	0,15609
	06		69,36	1,441	0,15888
	12		68,92	1,450	0,16166
	18		68,48	1,460	0,16445
15	00		68,04	1,469	0,16724
	06		67,60	1,479	0,17003
	12		67,17	1,488	0,17281
	18		66,74	1,498	0,17560
16	00		66,32	1,507	0,17839
	06		65,89	1,517	0,18118
	12		65,47	1,527	0,18396
	18		65,05	1,537	0,18675
17	00		64,63	1,547	0,18954
	06		64,22	1,557	0,19233
	12		63,81	1,567	0,19511
	18		63,40	1,577	0,19790
18	00		63,00	1,587	0,20069
	06		62,59	1,597	0,20347
	12		62,19	1,607	0,20626
	18		61,79	1,618	0,20905
19	00		61,40	1,628	0,21184
	06		61,01	1,639	0,21462
	12		60,62	1,649	0,21741
	18		60,23	1,660	0,22020
20	00		59,84	1,671	0,22299
	06		59,46	1,681	0,22577
	12		59,08	1,692	0,22856
	18		58,70	1,703	0,23135
21	00		58,33	1,714	0,23413
	06		57,95	1,725	0,23692
	12		57,58	1,736	0,23971
	18		57,21	1,747	0,24250
22	00		56,85	1,759	0,24528
	06		56,48	1,770	0,24807
	12		56,12	1,781	0,25086
	18		55,76	1,793	0,25365
23	00		55,41	1,804	0,25643
	06		55,05	1,816	0,25922
	12		54,70	1,828	0,26201
	18		54,35	1,839	0,26480
24	00		54,00	1,851	0,26758
	06		53,66	1,863	0,27037
	12		53,31	1,875	0,27316
	18		52,97	1,887	0,27594
25	00		52,63	1,899	0,27873
	06		52,30	1,912	0,28152
	12		51,96	1,924	0,28431
	18		51,63	1,936	0,28709
26	00		51,30	1,949	0,28988
	06		50,97	1,961	0,29267
	12		50,65	1,974	0,29546
	18		50,32	1,987	0,29824
27	00		50,00	2,000	0,30103

t			N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
d	h	min			
	06		49,68	2,012	0,30382
	12		49,36	2,025	0,30661
	18		49,05	2,038	0,30939
28	00		48,73	2,052	0,31218
	06		48,42	2,065	0,31497
	12		48,11	2,078	0,31775
	18		47,80	2,091	0,32054
29	00		47,50	2,105	0,32333
	06		47,19	2,118	0,32612
	12		46,89	2,132	0,32890
	18		46,59	2,146	0,33169
30	00		46,29	2,160	0,33448
	06		46,00	2,174	0,33727
	12		45,70	2,188	0,34005
	18		45,41	2,202	0,34284
31	00		45,12	2,216	0,34563
	06		44,83	2,230	0,34841
	12		44,54	2,244	0,35120
	18		44,26	2,259	0,35399
32	00		43,98	2,273	0,35678
	06		43,70	2,288	0,35956
	12		43,42	2,303	0,36235
	18		43,14	2,318	0,36514
33	00		42,86	2,333	0,36793
	06		42,59	2,348	0,37071
	12		42,32	2,363	0,37350
	18		42,04	2,378	0,37629
34	00		41,78	2,393	0,37908
	06		41,51	2,409	0,38186
	12		41,24	2,424	0,38465
	18		40,98	2,440	0,38744
35	00		40,72	2,455	0,39022
	06		40,46	2,471	0,39301
	12		40,20	2,487	0,39580
	18		39,94	2,503	0,39859
36	00		39,69	2,519	0,40137
	06		39,43	2,536	0,40416
	12		39,18	2,552	0,40695
	18		38,93	2,568	0,40974
37	00		38,68	2,585	0,41252
	06		38,43	2,602	0,41531
	12		38,19	2,618	0,41810
	18		37,94	2,635	0,42088
38	00		37,70	2,652	0,42367
	06		37,46	2,669	0,42646
	12		37,22	2,686	0,42925
	18		36,98	2,704	0,43203
39	00		36,74	2,721	0,43482
	06		36,51	2,739	0,43761
	12		36,27	2,756	0,44040
	18		36,04	2,774	0,44318
40	00		35,81	2,792	0,44597
	06		35,58	2,810	0,44876
	12		35,36	2,828	0,45155
	18		35,13	2,846	0,45433
41	00		34,90	2,864	0,45712
	06		34,68	2,883	0,45991
	12		34,46	2,901	0,46269
	18		34,24	2,920	0,46548
42	00		34,02	2,939	0,46827
	06		33,80	2,958	0,47106
	12		33,59	2,977	0,47384
	18		33,37	2,996	0,47663
43	00		33,16	3,015	0,47942
	06		32,95	3,035	0,48221
	12		32,73	3,054	0,48499
	18		32,53	3,074	0,48778
44	00		32,32	3,094	0,49057
	06		32,11	3,114	0,49336
	12		31,90	3,134	0,49614
	18		31,70	3,154	0,49893
45	00		31,50	3,174	0,50172
	06		31,30	3,195	0,50450
	12		31,10	3,215	0,50729
	18		30,90	3,236	0,51008
46	00		30,70	3,257	0,51287
	06		30,50	3,278	0,51565
	12		30,31	3,299	0,51844
	18		30,11	3,320	0,52123
47	00		29,92	3,342	0,52402
	06		29,73	3,363	0,52680
	12		29,54	3,385	0,52959
	18		29,35	3,407	0,53238
48	00		29,16	3,428	0,53516
	06		28,98	3,451	0,53795
	12		28,79	3,473	0,54074
	18		28,61	3,495	0,54353
49	00		28,42	3,518	0,54631
	06		28,24	3,540	0,54910
	12		28,06	3,563	0,55189
	18		27,88	3,586	0,55468
50	00		27,70	3,609	0,55746
	12		27,35	3,656	0,56304
51	00		27,00	3,703	0,56861
	12		26,66	3,751	0,57419
52	00		26,32	3,799	0,57976
	12		25,98	3,848	0,58534
53	00		25,65	3,898	0,59091
	12		25,32	3,948	0,59649
54	00		25,00	3,999	0,60206
	12		24,68	4,051	0,60763
55	00		24,37	4,104	0,61321
	12		24,06	4,157	0,61878
56	00		23,75	4,210	0,62436
	12		23,45	4,265	0,62993
57	00		23,15	4,320	0,63551
	12		22,85	4,376	0,64108
58	00		22,56	4,432	0,64666
	12		22,27	4,489	0,65223
59	00		21,99	4,547	0,65781
	12		21,71	4,606	0,66338
60	00		21,43	4,666	0,66896
	12		21,16	4,726	0,67453
61	00		20,89	4,787	0,68010
	12		20,62	4,849	0,68568
62	00		20,36	4,911	0,69125
	12		20,10	4,975	0,69683
63	00		19,84	5,039	0,70240
	12		19,59	5,104	0,70798
64	00		19,34	5,170	0,71355
	12		19,09	5,237	0,71913
65	00		18,85	5,305	0,72470
	12		18,61	5,373	0,73028
66	00		18,37	5,443	0,73585
	12		18,14	5,513	0,74142
67	00		17,91	5,584	0,74700
	12		17,68	5,656	0,75257
68	00		17,45	5,729	0,75815
	12		17,23	5,803	0,76372
69	00		17,01	5,878	0,76930
	12		16,79	5,954	0,77487
70			16,58	6,031	0,78045
71			16,16	6,188	0,79160
72			15,75	6,349	0,80274
73			15,35	6,514	0,81389
74			14,96	6,684	0,82504
75			14,58	6,857	0,83619
76			14,21	7,036	0,84734
77			13,85	7,219	0,85849
78			13,50	7,406	0,86964
79			13,16	7,599	0,88079
80			12,83	7,797	0,89194
81			12,50	7,999	0,90308
82			12,18	8,207	0,91423
83			11,87	8,421	0,92538
84			11,57	8,640	0,93653
85			11,28	8,865	0,94768
86			10,99	9,095	0,95883
87			10,72	9,332	0,96998
88			10,44	9,574	0,98113
89			10,18	9,823	0,99227
90			9,92	10,079	1,00343
91			9,67	10,341	1,01458
92			9,42	10,610	1,02573
93			9,19	10,886	1,03688
94			8,95	11,169	1,04803
95			8,73	11,459	1,05918
96			8,50	11,757	1,07033
97			8,29	12,063	1,08148
98			8,08	12,377	1,09263
99			7,87	12,699	1,10378
100			7,67	13,029	1,11493
105			6,75	14,814	1,17067
110			5,94	16,842	1,22642
115			5,22	19,149	1,28217
120			4,59	21,772	1,33791
125			4,04	24,754	1,39366
130			3,55	28,145	1,44940
135			3,13	32,000	1,50515
140			2,75	36,382	1,56090
145			2,42	41,365	1,61664
150			2,13	47,031	1,67239
155			1,87	53,473	1,72814
160			1,64	60,796	1,78388
165			1,45	69,123	1,83963
170			1,27	78,590	1,89537
175			1,12	89,353	1,95111
180			0,98	101,594	2,00687
185			0,87	115,508	2,06261
190			0,76	131,328	2,11836
195			0,67	149,316	2,17411
200			0,59	169,767	2,22986
205			0,52	193,016	2,28560
210			0,46	219,452	2,34134
215			0,40	249,513	2,39709
220			0,35	283,687	2,45284
225			0,31	322,539	2,50858
230			0,27	366,716	2,56433
235			0,24	416,944	2,62008
240			0,21	474,045	2,67582
245			0,19	538,967	2,73156
250			0,16	612,782	2,78731
255			0,14	696,718	2,84306

Mangan 52
Halbwertzeit 5,7 d

t			N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
d	h	min			
	0		100,00	1,000	0,00000
	1		99,49	1,005	0,00220
	2		98,99	1,010	0,00440
	3		98,49	1,015	0,00660
	4		97,99	1,020	0,00880
	5		97,50	1,025	0,01100
	6		97,01	1,030	0,01320
	7		96,52	1,036	0,01540
	8		96,03	1,041	0,01760
	9		95,54	1,046	0,01980
	10		95,06	1,051	0,02201
	11		94,58	1,057	0,02421
	12		94,10	1,062	0,02641
	13		93,63	1,068	0,02861
	14		93,15	1,073	0,03081
	15		92,68	1,078	0,03301
	16		92,21	1,084	0,03521
	17		91,75	1,089	0,03741
	18		91,28	1,095	0,03961
	19		90,82	1,101	0,04181
	20		90,36	1,106	0,04401
	21		89,91	1,112	0,04621
	22		89,45	1,117	0,04841
	23		89,00	1,123	0,05061
1	00		88,55	1,129	0,05281
	01		88,10	1,135	0,05501
	02		87,66	1,140	0,05721
	03		87,21	1,146	0,05941
	04		86,77	1,152	0,06161
	05		86,33	1,158	0,06382
	06		85,90	1,164	0,06602
	07		85,46	1,170	0,06822
	08		85,03	1,176	0,07042
	09		84,60	1,181	0,07262
	10		84,17	1,188	0,07482
	11		83,75	1,194	0,07702
	12		83,33	1,200	0,07922
	13		82,91	1,206	0,08142
	14		82,49	1,212	0,08362
	15		82,07	1,218	0,08582
	16		81,65	1,224	0,08802
	17		81,24	1,230	0,09022
	18		80,83	1,237	0,09242
	19		80,42	1,243	0,09462
	20		80,02	1,249	0,09682
	21		79,61	1,256	0,09902
	22		79,21	1,262	0,10122
	23		78,81	1,268	0,10342
2	00		78,41	1,275	0,10563
	01		78,01	1,281	0,10783
	02		77,62	1,288	0,11003
	03		77,23	1,294	0,11223
	04		76,84	1,301	0,11443
	05		76,45	1,308	0,11663
	06		76,06	1,314	0,11883
	07		75,68	1,321	0,12103
	08		75,30	1,328	0,12323
	09		74,92	1,334	0,12543
	10		74,54	1,341	0,12763
	11		74,16	1,348	0,12983
	12		73,79	1,355	0,13203
	13		73,41	1,362	0,13423
	14		73,04	1,369	0,13643
	15		72,67	1,376	0,13863
	16		72,30	1,383	0,14083
	17		71,94	1,390	0,14303
	18		71,58	1,397	0,14523
	19		71,21	1,404	0,14743
	20		70,85	1,411	0,14964
	21		70,50	1,418	0,15184
	22		70,14	1,425	0,15404
	23		69,79	1,432	0,15624
3	00		69,43	1,440	0,15844
	01		69,08	1,447	0,16064
	02		68,73	1,454	0,16284
	03		68,39	1,462	0,16504
	04		68,04	1,469	0,16724
	05		67,70	1,477	0,16944
	06		67,35	1,484	0,17164
	07		67,01	1,492	0,17384
	08		66,67	1,499	0,17604
	09		66,34	1,507	0,17824
	10		66,00	1,515	0,18044
	11		65,67	1,522	0,18264
	12		65,34	1,530	0,18484
	13		65,01	1,538	0,18704
	14		64,68	1,546	0,18924
	15		64,35	1,553	0,19144
	16		64,03	1,561	0,19365
	17		63,70	1,569	0,19585
	18		63,38	1,577	0,19805
	19		63,06	1,585	0,20025
	20		62,74	1,593	0,20245
	21		62,42	1,601	0,20465
	22		62,11	1,610	0,20685
	23		61,79	1,618	0,20905
4	00		61,48	1,626	0,21125
	01		61,17	1,634	0,21345
	02		60,86	1,643	0,21565
	03		60,55	1,651	0,21785
	04		60,25	1,659	0,22005
	05		59,94	1,668	0,22225
	06		59,64	1,676	0,22445
	07		59,34	1,685	0,22665
	08		59,04	1,693	0,22885
	09		58,74	1,702	0,23105
	10		58,44	1,711	0,23325
	11		58,15	1,719	0,23546
	12		57,86	1,728	0,23766
	13		57,56	1,737	0,23986
	14		57,27	1,746	0,24206
	15		56,98	1,754	0,24426
	16		56,69	1,763	0,24646
	17		56,41	1,772	0,24866
	18		56,12	1,781	0,25086
	19		55,84	1,790	0,25306
	20		55,56	1,799	0,25526
	21		55,28	1,809	0,25746
	22		55,00	1,818	0,25966
	23		54,72	1,827	0,26186
5	00		54,44	1,836	0,26406
	06		52,81	1,893	0,27727
	12		51,23	1,951	0,29047
	18		49,70	2,012	0,30367
6	00		48,21	2,074	0,31687
	06		46,77	2,138	0,33008
	12		45,36	2,204	0,34328
	18		44,01	2,272	0,35648
7	00		42,69	2,342	0,36969
	06		41,41	2,414	0,38289
	12		40,17	2,489	0,39609
	18		38,97	2,566	0,40930
8	00		37,80	2,645	0,42250
	06		36,67	2,727	0,43570
	12		35,57	2,811	0,44890
	18		34,51	2,898	0,46211
9	00		33,47	2,987	0,47531
	06		32,47	3,079	0,48851
	12		31,50	3,174	0,50172
	18		30,55	3,272	0,51492
10	00		29,64	3,373	0,52812
	06		28,75	3,477	0,54133
	12		27,89	3,585	0,55453
	18		27,06	3,695	0,56773
11	00		26,25	3,810	0,58094
	06		25,46	3,927	0,59414
	12		24,70	4,048	0,60734
	18		23,96	4,173	0,62054
12	00		23,24	4,302	0,63375
	06		22,54	4,435	0,64695
	12		21,87	4,572	0,66015
	18		21,22	4,713	0,67336
13	00		20,58	4,859	0,68656
	06		19,96	5,009	0,69976
	12		19,37	5,163	0,71297
	18		18,79	5,323	0,72617
14	00		18,22	5,487	0,73937
	06		17,68	5,656	0,75257
	12		17,15	5,831	0,76578
	18		16,63	6,011	0,77898
15	00		16,14	6,197	0,79218
	06		15,65	6,388	0,80539
	12		15,18	6,585	0,81859
	18		14,73	6,788	0,83179
16	00		14,29	6,998	0,84499
	06		13,86	7,214	0,85820
	12		13,45	7,437	0,87140
	18		13,04	7,666	0,88460
17	00		12,65	7,903	0,89780
	06		12,27	8,147	0,91101
	12		11,91	8,398	0,92421
	18		11,55	8,657	0,93741
18	00		11,20	8,925	0,95061
	06		10,87	9,200	0,96382
	12		10,54	9,484	0,97702
	18		10,23	9,777	0,99022
19	00		9,92	10,079	1,00343
	06		9,62	10,390	1,01664
	12		9,34	10,711	1,02984
	18		9,06	11,041	1,04304
20			8,79	11,382	1,05625
21			7,78	12,854	1,10906
22			6,89	14,516	1,16187
23			6,10	16,393	1,21468
24			5,40	18,513	1,26750
25			4,78	20,907	1,32031
26			4,24	23,611	1,37312
27			3,75	26,664	1,42593
28			3,32	30,112	1,47874
29			2,94	34,006	1,53156

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
30			2,60	38,403	1,58437
31			2,31	43,369	1,63718
32			2,04	48,977	1,68999
33			1,81	55,310	1,74280
34			1,60	62,461	1,79561
35			1,42	70,538	1,84843
36			1,26	79,659	1,90124
37			1,11	89,959	1,95405
38			0,98	101,594	2,00687
39			0,87	114,730	2,05968
40			0,77	129,565	2,11249
41			0,68	146,320	2,16531
42			0,61	165,240	2,21812
43			0,54	186,605	2,27092
44			0,47	210,734	2,32374
45			0,42	237,987	2,37655
46			0,37	268,759	2,42936
47			0,33	303,508	2,48217
48			0,29	342,759	2,53499
49			0,26	387,086	2,58781
50			0,23	437,139	2,64062
51			0,20	493,656	2,69343
52			0,18	557,475	2,74623
53			0,16	629,564	2,79904
54			0,14	710,984	2,85186

Mangan 54

Halbwertzeit 300 d

0			100,00	1,000	0,00000
5			98,85	1,011	0,00502
10			97,72	1,023	0,01003
15			96,59	1,035	0,01505
20			95,48	1,047	0,02007
25			94,39	1,059	0,02509
30			93,30	1,071	0,03010
35			92,23	1,084	0,03512
40			91,17	1,096	0,04014
45			90,13	1,109	0,04515
50			89,09	1,122	0,05017
55			88,07	1,135	0,05519
60			87,06	1,148	0,06021
65			86,06	1,162	0,06522
70			85,07	1,175	0,07024
75			84,09	1,189	0,07526
80			83,12	1,203	0,08028
85			82,17	1,217	0,08529
90			81,23	1,231	0,09031
95			80,29	1,245	0,09533
100			79,37	1,259	0,10034
105			78,46	1,274	0,10536
110			77,56	1,289	0,11038
115			76,67	1,304	0,11540
120			75,79	1,319	0,12041
125			74,92	1,334	0,12543
130			74,05	1,350	0,13045
135			73,20	1,366	0,13546
140			72,36	1,381	0,14048
145			71,53	1,397	0,14550
150			70,71	1,414	0,15052
155			69,90	1,430	0,15553
160			69,10	1,447	0,16055
165			68,30	1,464	0,16557
170			67,52	1,481	0,17058
175			66,74	1,498	0,17560
180			65,98	1,515	0,18062
185			65,22	1,533	0,18564
190			64,47	1,551	0,19065
195			63,73	1,569	0,19567
200			63,00	1,587	0,20069
205			62,27	1,605	0,20570
210			61,56	1,624	0,21072
215			60,85	1,643	0,21574
220			60,15	1,662	0,22076
225			59,46	1,681	0,22577
230			58,78	1,701	0,23079
235			58,10	1,721	0,23581
240			57,43	1,741	0,24082
245			56,78	1,761	0,24584
250			56,12	1,781	0,25086
255			55,48	1,802	0,25588
260			54,84	1,823	0,26089
265			54,21	1,844	0,26591
270			53,59	1,866	0,27093
275			52,97	1,887	0,27594
280			52,36	1,909	0,28096
285			51,76	1,931	0,28598
290			51,17	1,954	0,29100
295			50,58	1,977	0,29601
300			50,00	2,000	0,30103
305			49,43	2,023	0,30605
310			48,86	2,046	0,31106
315			48,30	2,070	0,31608
320			47,74	2,094	0,32110
325			47,19	2,118	0,32612
330			46,65	2,143	0,33113
335			46,12	2,168	0,33615
340			45,59	2,193	0,34117
345			45,06	2,219	0,34619
350			44,54	2,244	0,35120
355			44,03	2,271	0,35622
360			43,53	2,297	0,36124
365			43,03	2,324	0,36625
370			42,53	2,351	0,37127
375			42,04	2,378	0,37629
380			41,56	2,406	0,38131
385			41,08	2,434	0,38632
390			40,61	2,462	0,39134
395			40,15	2,490	0,39636
400			39,69	2,519	0,40137
405			39,23	2,549	0,40639
410			38,78	2,578	0,41141
415			38,33	2,608	0,41643
420			37,89	2,639	0,42144
425			37,46	2,669	0,42646
430			37,03	2,700	0,43148
435			36,60	2,732	0,43649
440			36,18	2,763	0,44151
445			35,77	2,795	0,44653
450			35,36	2,828	0,45155
455			34,95	2,861	0,45656
460			34,55	2,894	0,46158
465			34,15	2,928	0,46660
470			33,76	2,962	0,47161
475			33,37	2,996	0,47663
480			32,99	3,031	0,48165
485			32,61	3,066	0,48667
490			32,23	3,102	0,49168
495			31,86	3,138	0,49670
500			31,50	3,174	0,50172
510			30,78	3,249	0,51175
520			30,08	3,324	0,52179
530			29,39	3,402	0,53182
540			28,72	3,482	0,54185
550			28,06	3,563	0,55189
560			27,42	3,646	0,56192
570			26,79	3,732	0,57196
580			26,18	3,819	0,58199
590			25,58	3,908	0,59203
600			25,00	3,999	0,60206
610			24,43	4,093	0,61209
620			23,87	4,189	0,62213
630			23,33	4,287	0,63216
640			22,79	4,387	0,64220
650			22,27	4,489	0,65223
660			21,76	4,594	0,66227
670			21,27	4,702	0,67230
680			20,78	4,812	0,68233
690			20,31	4,924	0,69237
700			19,84	5,039	0,70240
710			19,39	5,157	0,71244
720			18,95	5,278	0,72247
730			18,51	5,401	0,73251
740			18,09	5,527	0,74254
750			17,68	5,656	0,75257
760			17,27	5,789	0,76261
770			16,88	5,924	0,77264
780			16,49	6,062	0,78268
790			16,12	6,204	0,79271
800			15,75	6,349	0,80274
810			15,39	6,497	0,81278
820			15,04	6,649	0,82281
830			14,69	6,805	0,83285
840			14,36	6,964	0,84288
850			14,03	7,127	0,85292
860			13,71	7,293	0,86295
870			13,40	7,464	0,87298
880			13,09	7,638	0,88302
890			12,79	7,817	0,89305
900			12,50	7,999	0,90308
910			12,21	8,186	0,91312
920			11,94	8,378	0,92315
930			11,66	8,574	0,93319
940			11,40	8,774	0,94322
950			11,14	8,979	0,95325
960			10,88	9,189	0,96329
970			10,63	9,404	0,97332
980			10,39	9,623	0,98335
990			10,15	9,848	0,99339
1000			9,92	10,079	1,00343
1020			9,47	10,556	1,02350
1040			9,05	11,055	1,04357
1060			8,64	11,578	1,06364
1080			8,25	12,125	1,08371
1100			7,87	12,699	1,10378
1120			7,52	13,299	1,12385
1140			7,18	13,928	1,14391
1160			6,86	14,587	1,16398
1180			6,55	15,277	1,18405
1200			6,25	16,000	1,20412
1220			5,97	16,756	1,22419
1240			5,70	17,549	1,24426
1260			5,44	18,379	1,26433
1280			5,20	19,248	1,28439
1300			4,96	20,158	1,30446
1320			4,74	21,112	1,32453
1340			4,52	22,110	1,34460
1360			4,32	23,156	1,36467
1380			4,12	24,251	1,38474
1400			3,94	25,398	1,40481
1450			3,51	28,508	1,45498
1500			3,13	32,000	1,50515
1550			2,78	35,918	1,55532
1600			2,48	40,317	1,60549
1650			2,21	45,254	1,65567
1700			1,97	50,796	1,70584
1750			1,75	57,017	1,75601
1800			1,56	63,999	1,80618
1850			1,39	71,837	1,85635
1900			1,24	80,634	1,90652
1950			1,10	90,507	1,95669
2000			0,98	101,594	2,00687
2500			0,31	322,539	2,50858
3000			0,10	1023,96	3,01028
3500			0,03	3250,98	3,51201
4000			0,01	10319,9	4,01368

Eisen 59

Halbwertzeit 45 d

	0		100,00	1,000	0,00000
	6		99,62	1,003	0,00167
	12		99,23	1,007	0,00335
	18		98,85	1,011	0,00502
1	**00**		98,47	1,015	0,00669
	06		98,09	1,019	0,00836
	12		97,72	1,023	0,01003
	18		97,34	1,027	0,01171
2	**00**		96,97	1,031	0,01338
	06		96,59	1,035	0,01505
	12		96,22	1,039	0,01672
	18		95,85	1,043	0,01840
3	**00**		95,48	1,047	0,02007
	06		95,12	1,051	0,02174
	12		94,75	1,055	0,02341
	18		94,39	1,059	0,02509
4	**00**		94,02	1,063	0,02676
	06		93,66	1,067	0,02843
	12		93,30	1,071	0,03010
	18		92,94	1,075	0,03178
5	**00**		92,59	1,080	0,03345
	06		92,23	1,084	0,03512
	12		91,88	1,088	0,03679
	18		91,52	1,092	0,03847
6	**00**		91,17	1,096	0,04014
	06		90,82	1,101	0,04181
	12		90,47	1,105	0,04348
	18		90,13	1,109	0,04515
7	**00**		89,78	1,113	0,04683
	06		89,43	1,118	0,04850
	12		89,09	1,122	0,05017
	18		88,75	1,126	0,05184
8	**00**		88,41	1,131	0,05352
	06		88,07	1,135	0,05519
	12		87,73	1,139	0,05686
	18		87,39	1,144	0,05853
9	**00**		87,06	1,148	0,06021
	06		86,72	1,153	0,06188
	12		86,39	1,157	0,06355
	18		86,06	1,162	0,06522
10	**00**		85,72	1,166	0,06690
	06		85,39	1,171	0,06857
	12		85,07	1,175	0,07024
	18		84,74	1,180	0,07191
11	**00**		84,41	1,184	0,07359
	06		84,09	1,189	0,07526
	12		83,77	1,193	0,07693
	18		83,44	1,198	0,07860
12	**00**		83,12	1,203	0,08028
	06		82,80	1,207	0,08195
	12		82,49	1,212	0,08362
	18		82,17	1,217	0,08529
13	**00**		81,85	1,221	0,08696
	06		81,54	1,226	0,08864
	12		81,23	1,231	0,09031
	18		80,91	1,235	0,09198
14	**00**		80,60	1,240	0,09365
	06		80,29	1,245	0,09533
	12		79,98	1,250	0,09700
	18		79,68	1,255	0,09867
15	**00**		79,37	1,259	0,10034
	06		79,07	1,264	0,10202
	12		78,76	1,269	0,10369
	18		78,46	1,274	0,10536
16	**00**		78,16	1,279	0,10703
	06		77,86	1,284	0,10871
	12		77,56	1,289	0,11038
	18		77,26	1,294	0,11205
17	**00**		76,96	1,299	0,11372
	06		76,67	1,304	0,11540
	12		76,37	1,309	0,11707
	18		76,08	1,314	0,11874
18	**00**		75,79	1,319	0,12041
	06		75,49	1,324	0,12208
	12		75,20	1,329	0,12376
	18		74,92	1,334	0,12543
19	**00**		74,63	1,339	0,12710
	06		74,34	1,345	0,12877
	12		74,05	1,350	0,13045
	18		73,77	1,355	0,13212
20			73,49	1,360	0,13379
21			72,36	1,381	0,14048
22			71,26	1,403	0,14717
23			70,17	1,425	0,15386
24			69,10	1,447	0,16055
25			68,04	1,469	0,16724
26			67,00	1,492	0,17393
27			65,98	1,515	0,18062
28			64,97	1,539	0,18731
29			63,97	1,563	0,19400
30			63,00	1,587	0,20069
31			62,03	1,612	0,20738
32			61,08	1,637	0,21407
33			60,15	1,662	0,22076
34			59,23	1,688	0,22745
35			58,33	1,714	0,23413
36			57,43	1,741	0,24082
37			56,56	1,768	0,24751
38			55,69	1,795	0,25420
39			54,84	1,823	0,26089
40			54,00	1,851	0,26758
41			53,18	1,880	0,27427
42			52,36	1,909	0,28096
43			51,56	1,939	0,28765
44			50,78	1,969	0,29434
45			50,00	2,000	0,30103
46			49,24	2,031	0,30772
47			48,48	2,062	0,31441
48			47,74	2,094	0,32110
49			47,01	2,127	0,32779
50			46,29	2,160	0,33448
51			45,59	2,193	0,34117
52			44,89	2,227	0,34786
53			44,20	2,262	0,35455
54			43,53	2,297	0,36124
55			42,86	2,333	0,36793
56			42,21	2,369	0,37462
57			41,56	2,406	0,38131
58			40,93	2,443	0,38799
59			40,30	2,481	0,39468
60			39,69	2,519	0,40137
61			39,08	2,558	0,40806
62			38,48	2,598	0,41475
63			37,89	2,639	0,42144
64			37,31	2,679	0,42813
65			36,74	2,721	0,43482
66			36,18	2,763	0,44151
67			35,63	2,806	0,44820
68			35,08	2,850	0,45489
69			34,55	2,894	0,46158
70			34,02	2,939	0,46827
71			33,50	2,985	0,47496
72			32,99	3,031	0,48165
73			32,48	3,078	0,48834
74			31,99	3,126	0,49503
75			31,50	3,174	0,50172
76			31,02	3,224	0,50841
77			30,54	3,274	0,51510
78			30,08	3,324	0,52179
79			29,62	3,376	0,52848
80			29,16	3,428	0,53516
81			28,72	3,482	0,54185
82			28,28	3,536	0,54854
83			27,85	3,591	0,55523
84			27,42	3,646	0,56192
85			27,00	3,703	0,56861
86			26,59	3,760	0,57530
87			26,18	3,819	0,58199
88			25,78	3,878	0,58868
89			25,39	3,938	0,59537
90			25,00	3,999	0,60206
91			24,62	4,062	0,60875
92			24,24	4,125	0,61544
93			23,87	4,189	0,62213
94			23,51	4,254	0,62882
95			23,15	4,320	0,63551
96			22,79	4,387	0,64220
97			22,44	4,455	0,64889
98			22,10	4,524	0,65558
99			21,76	4,594	0,66227
100			21,43	4,666	0,66896
101			21,10	4,738	0,67564
102			20,78	4,812	0,68233
103			20,46	4,886	0,68902
104			20,15	4,962	0,69571

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
105			19,84	5,039	0,70240
106			19,54	5,117	0,70909
107			19,24	5,197	0,71578
108			18,95	5,278	0,72247
109			18,66	5,359	0,72916
110			18,37	5,443	0,73585
111			18,09	5,527	0,74254
112			17,81	5,613	0,74923
113			17,54	5,700	0,75592
114			17,27	5,789	0,76261
115			17,01	5,878	0,76930
116			16,75	5,970	0,77599
117			16,49	6,062	0,78268
118			16,24	6,156	0,78937
119			15,99	6,252	0,79606
120			15,75	6,349	0,80274
121			15,51	6,448	0,80943
122			15,27	6,548	0,81612
123			15,04	6,649	0,82281
124			14,81	6,753	0,82950
125			14,58	6,857	0,83619
126			14,36	6,964	0,84288
127			14,14	7,072	0,84957
128			13,92	7,182	0,85626
129			13,71	7,293	0,86295
130			13,50	7,406	0,86964
131			13,29	7,521	0,87633
132			13,09	7,638	0,88302
133			12,89	7,757	0,88971
134			12,69	7,877	0,89640
135			12,50	7,999	0,90308
136			12,31	8,124	0,90977
137			12,12	8,250	0,91646
138			11,94	8,378	0,92315
139			11,75	8,508	0,92984
140			11,57	8,640	0,93653
141			11,40	8,774	0,94322
142			11,22	8,910	0,94991
143			11,05	9,048	0,95660
144			10,88	9,189	0,96329
145			10,72	9,332	0,96998
146			10,55	9,476	0,97667
147			10,39	9,623	0,98335
148			10,23	9,773	0,99004
149			10,08	9,925	0,99673
150			9,92	10,079	1,00343
152			9,62	10,394	1,01681
154			9,33	10,719	1,03019
156			9,05	11,055	1,04357
158			8,77	11,401	1,05695
160			8,50	11,757	1,07033
162			8,25	12,125	1,08371
164			8,00	12,505	1,09709
166			7,75	12,896	1,11047
168			7,52	13,299	1,12385
170			7,29	13,715	1,13722
172			7,07	14,145	1,15060
174			6,86	14,587	1,16398
176			6,65	15,043	1,17736
178			6,45	15,514	1,19074
180			6,25	16,000	1,20412
182			6,06	16,500	1,21750
184			5,88	17,016	1,23088
186			5,70	17,549	1,24426
188			5,53	18,098	1,25764
190			5,36	18,664	1,27102
192			5,20	19,248	1,28439
194			5,04	19,850	1,29777
196			4,88	20,471	1,31115
198			4,74	21,112	1,32453
200			4,59	21,772	1,33791
205			4,25	23,515	1,37136
210			3,94	25,398	1,40481
215			3,65	27,431	1,43826
220			3,38	29,627	1,47170
225			3,13	32,000	1,50515
230			2,89	34,561	1,53860
235			2,68	37,328	1,57205
240			2,48	40,317	1,60549
245			2,30	43,545	1,63894
250			2,13	47,031	1,67239
255			1,97	50,796	1,70584
260			1,82	54,863	1,73928
265			1,69	59,255	1,77273
270			1,56	63,999	1,80618
275			1,45	69,123	1,83963
280			1,34	74,656	1,87307
285			1,24	80,634	1,90652
290			1,15	87,089	1,93996
295			1,06	94,060	1,97341
300			0,98	101,594	2,00687
320			0,72	138,247	2,14066
340			0,53	188,125	2,27445
360			0,39	255,996	2,40823
380			0,29	348,359	2,54203
400			0,21	474,045	2,67582

Zink 65
Halbwertzeit 245 d

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
0			100,00	1,000	0,00000
5			98,60	1,014	0,00614
10			97,21	1,028	0,01229
15			95,85	1,043	0,01843
20			94,50	1,058	0,02457
25			93,17	1,073	0,03072
30			91,86	1,088	0,03686
35			90,57	1,104	0,04300
40			89,30	1,119	0,04915
45			88,05	1,135	0,05529
50			86,81	1,151	0,06144
55			85,59	1,168	0,06758
60			84,39	1,185	0,07372
65			83,20	1,201	0,07987
70			82,03	1,219	0,08601
75			80,88	1,236	0,09215
80			79,75	1,253	0,09830
85			78,63	1,271	0,10444
90			77,52	1,289	0,11058
95			76,43	1,308	0,11673
100			75,36	1,326	0,12287
105			74,30	1,345	0,12901
110			73,26	1,365	0,13516
115			72,23	1,384	0,14130
120			71,21	1,404	0,14744
125			70,21	1,424	0,15359
130			69,23	1,444	0,15973
135			68,25	1,465	0,16587
140			67,30	1,485	0,17202
145			66,35	1,507	0,17816
150			65,42	1,528	0,18430
155			64,50	1,550	0,19045
160			63,59	1,572	0,19659
165			62,70	1,594	0,20273
170			61,82	1,617	0,20888
175			60,95	1,640	0,21502
180			60,09	1,664	0,22117
185			59,25	1,687	0,22731
190			58,42	1,711	0,23345
195			57,60	1,736	0,23960
200			56,79	1,760	0,24574
205			55,99	1,786	0,25188
210			55,20	1,811	0,25803
215			54,43	1,837	0,26417
220			53,66	1,863	0,27031
225			52,91	1,889	0,27646
230			52,17	1,916	0,28260
235			51,43	1,944	0,28874
240			50,71	1,971	0,29489
245			50,00	2,000	0,30103
250			49,30	2,028	0,30717
255			48,61	2,057	0,31332
260			47,92	2,086	0,31946
265			47,25	2,116	0,32560
270			46,59	2,146	0,33175
275			45,93	2,177	0,33789
280			45,29	2,208	0,34403
285			44,65	2,239	0,35018
290			44,02	2,271	0,35632
295			43,40	2,303	0,36247
300			42,79	2,336	0,36861
305			42,19	2,370	0,37475
310			41,60	2,403	0,38090
315			41,02	2,438	0,38704
320			40,44	2,472	0,39318
325			39,87	2,507	0,39933
330			39,31	2,543	0,40547
335			38,76	2,579	0,41161
340			38,22	2,616	0,41776
345			37,68	2,653	0,42390
350			37,15	2,691	0,43004
355			36,63	2,730	0,43619
360			36,11	2,769	0,44233
365			35,61	2,808	0,44847
370			35,11	2,848	0,45462
375			34,61	2,889	0,46076
380			34,13	2,930	0,46690
385			33,65	2,971	0,47305
390			33,17	3,014	0,47919
395			32,71	3,057	0,48533
400			32,25	3,100	0,49148
405			31,80	3,145	0,49762
410			31,35	3,189	0,50376
415			30,91	3,235	0,50991
420			30,48	3,281	0,51605
425			30,05	3,328	0,52220
430			29,63	3,375	0,52834
435			29,21	3,423	0,53448
440			28,80	3,472	0,54063
445			28,39	3,521	0,54677
450			28,00	3,572	0,55291
455			27,60	3,622	0,55906
460			27,21	3,674	0,56520
465			26,83	3,726	0,57134
470			26,46	3,779	0,57749

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
475			26,08	3,833	0,58363
480			25,72	3,888	0,58977
485			25,36	3,943	0,59592
490			25,00	3,999	0,60206
495			24,65	4,056	0,60820
500			24,30	4,114	0,61435
505			23,96	4,173	0,62049
510			23,62	4,232	0,62663
515			23,29	4,293	0,63278
520			22,97	4,354	0,63892
525			22,64	4,416	0,64506
530			22,33	4,479	0,65121
535			22,01	4,543	0,65735
540			21,70	4,607	0,66349
545			21,40	4,673	0,66964
550			21,10	4,740	0,67578
555			20,80	4,807	0,68192
560			20,51	4,876	0,68807
565			20,22	4,945	0,69421
570			19,94	5,015	0,70035
575			19,66	5,087	0,70650
580			19,38	5,159	0,71264
585			19,11	5,233	0,71879
590			18,84	5,307	0,72493
595			18,57	5,383	0,73107
600			18,31	5,460	0,73722
605			18,06	5,538	0,74336
610			17,80	5,616	0,74950
615			17,55	5,696	0,75565
620			17,31	5,778	0,76179
625			17,06	5,860	0,76793
630			16,82	5,943	0,77408
635			16,59	6,028	0,78022
640			16,35	6,114	0,78636
645			16,12	6,201	0,79251
650			15,90	6,289	0,79865
655			15,68	6,379	0,80479
660			15,45	6,470	0,81094
665			15,24	6,562	0,81708
670			15,02	6,656	0,82322
675			14,81	6,750	0,82937
680			14,60	6,847	0,83551
685			14,40	6,944	0,84165
690			14,20	7,043	0,84780
695			14,00	7,143	0,85394
700			13,80	7,245	0,86008
710			13,42	7,453	0,87237
720			13,04	7,667	0,88466
730			12,68	7,887	0,89694
740			12,32	8,113	0,90923
750			11,98	8,346	0,92151
760			11,65	8,586	0,93380
770			11,32	8,832	0,94609
780			11,01	9,085	0,95837
790			10,70	9,346	0,97066
800			10,40	9,614	0,98295
810			10,11	9,890	0,99523
820			9,83	10,174	1,00753
830			9,55	10,466	1,01982
840			9,29	10,767	1,03210
850			9,03	11,076	1,04439
860			8,78	11,394	1,05668
870			8,53	11,720	1,06896
880			8,29	12,057	1,08125
890			8,06	12,403	1,09354
900			7,84	12,759	1,10583
910			7,62	13,125	1,11811
920			7,41	13,502	1,13040
930			7,20	13,889	1,14269
940			7,00	14,288	1,15497
950			6,80	14,698	1,16726
960			6,61	15,119	1,17955
970			6,43	15,553	1,19183
980			6,25	16,000	1,20412
990			6,08	16,459	1,21641
1000			5,91	16,931	1,22869
1020			5,58	17,917	1,25327
1040			5,27	18,960	1,27784
1060			4,98	20,063	1,30242
1080			4,71	21,231	1,32699
1100			4,45	22,467	1,35156
1120			4,21	23,775	1,37614
1140			3,97	25,160	1,40071
1160			3,76	26,624	1,42529
1180			3,55	28,174	1,44986
1200			3,35	29,814	1,47443
1220			3,17	31,550	1,49901
1240			3,00	33,387	1,52358
1260			2,83	35,330	1,54815
1280			2,67	37,387	1,57273
1300			2,53	39,564	1,59730
1320			2,39	41,867	1,62188
1340			2,26	44,304	1,64645
1360			2,13	46,883	1,67102
1380			2,02	49,613	1,69560

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
1400			1,90	52,501	1,72017
1450			1,65	60,478	1,78160
1500			1,44	69,668	1,84304
1550			1,25	80,254	1,90447
1600			1,08	92,448	1,96590
1650			0,94	106,498	2,02734
1700			0,82	122,681	2,08878
1750			0,71	141,322	2,15021
1800			0,61	162,797	2,21165
1850			0,53	187,536	2,27309
1900			0,46	216,034	2,33452
1950			0,40	248,861	2,39596

Brom 82
Halbwertzeit 35,9 h

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
		00	100,00	1,000	0,00000
		10	99,68	1,003	0,00140
		20	99,36	1,006	0,00280
		30	99,04	1,009	0,00419
		40	98,72	1,012	0,00559
		50	98,40	1,016	0,00699
	1	**00**	98,09	1,019	0,00839
		10	97,77	1,022	0,00978
		20	97,46	1,026	0,01118
		30	97,15	1,029	0,01258
		40	96,83	1,032	0,01398
		50	96,52	1,036	0,01537
	2	**00**	96,21	1,039	0,01677
		10	95,90	1,042	0,01817
		20	95,59	1,046	0,01957
		30	95,29	1,049	0,02096
		40	94,98	1,052	0,02236
		50	94,68	1,056	0,02376
	3	**00**	94,37	1,059	0,02516
		10	94,07	1,063	0,02655
		20	93,77	1,066	0,02795
		30	93,47	1,069	0,02935
		40	93,17	1,073	0,03075
		50	92,87	1,076	0,03214
	4	**00**	92,57	1,080	0,03354
		10	92,27	1,083	0,03494
		20	91,97	1,087	0,03634
		30	91,68	1,090	0,03773
		40	91,38	1,094	0,03913
		50	91,09	1,097	0,04053
	5	**00**	90,80	1,101	0,04193
		10	90,51	1,104	0,04332
		20	90,22	1,108	0,04472
		30	89,93	1,112	0,04612
		40	89,64	1,115	0,04752
		50	89,35	1,119	0,04891
	6	**00**	89,06	1,122	0,05031
		10	88,78	1,126	0,05171
		20	88,49	1,130	0,05311
		30	88,21	1,133	0,05450
		40	87,92	1,137	0,05590
		50	87,64	1,141	0,05730
	7	**00**	87,36	1,144	0,05870
		10	87,08	1,148	0,06009
		20	86,80	1,152	0,06149
		30	86,52	1,155	0,06289
		40	86,24	1,159	0,06429
		50	85,96	1,163	0,06568
	8	**00**	85,69	1,167	0,06708
		10	85,41	1,170	0,06848
		20	85,14	1,174	0,06988
		30	84,86	1,178	0,07128
		40	84,59	1,182	0,07267
		50	84,32	1,185	0,07407
	9	**00**	84,05	1,189	0,07547
		10	83,78	1,193	0,07687
		20	83,51	1,197	0,07826
		30	83,24	1,201	0,07966
		40	82,97	1,205	0,08106
		50	82,71	1,209	0,08246
	10	**00**	82,44	1,212	0,08385
		20	81,91	1,220	0,08665
		40	81,39	1,228	0,08944
	11	**00**	80,87	1,236	0,09224
		20	80,35	1,244	0,09503
		40	79,83	1,252	0,09783
	12	**00**	79,32	1,260	0,10062
		20	78,81	1,268	0,10342
		40	78,30	1,277	0,10621
	13	**00**	77,80	1,285	0,10901
		20	77,30	1,293	0,11180
		40	76,81	1,301	0,11460
	14	**00**	76,31	1,310	0,11739
		20	75,82	1,318	0,12019
		40	75,34	1,327	0,12298
	15	00	74,86	1,335	0,12578
		20	74,37	1,344	0,12857
		40	73,90	1,353	0,13137
	16	**00**	73,42	1,361	0,13416

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
		20	72,95	1,370	0,13696
		40	72,48	1,379	0,13975
	17	00	72,02	1,388	0,14255
		20	71,56	1,397	0,14534
		40	71,10	1,406	0,14814
	18	**00**	70,64	1,415	0,15093
		20	70,19	1,424	0,15373
		40	69,74	1,433	0,15652
	19	00	69,29	1,443	0,15932
		20	68,85	1,452	0,16212
		40	68,41	1,461	0,16491
	20	**00**	67,97	1,471	0,16771
		20	67,53	1,480	0,17050
		40	67,10	1,490	0,17330
	21	00	66,67	1,499	0,17609
		20	66,24	1,509	0,17889
		40	65,81	1,519	0,18168
	22	**00**	65,39	1,529	0,18448
		20	64,97	1,539	0,18727
		40	64,56	1,549	0,19007
	23	00	64,14	1,559	0,19286
		20	63,73	1,569	0,19566
		40	63,32	1,579	0,19845
1	**00**		62,92	1,589	0,20125
	01		61,71	1,620	0,20963
	02		60,53	1,652	0,21802
	03		59,37	1,684	0,22640
	04		58,24	1,717	0,23479
	05		57,13	1,750	0,24317
	06		56,03	1,784	0,25156
	07		54,96	1,819	0,25994
	08		53,91	1,854	0,26833
	09		52,88	1,891	0,27671
	10		51,87	1,927	0,28510
	11		50,88	1,965	0,29348
	12		49,90	2,003	0,30187
	13		48,95	2,042	0,31025
	14		48,01	2,082	0,31864
	15		47,10	2,123	0,32702
	16		46,19	2,164	0,33541
	17		45,31	2,206	0,34380
	18		44,44	2,249	0,35218
	19		43,59	2,293	0,36057
	20		42,76	2,338	0,36895
	21		41,94	2,384	0,37734
	22		41,14	2,430	0,38572
	23		40,35	2,478	0,39411
2	**00**		39,58	2,526	0,40249
	01		38,83	2,575	0,41088
	02		38,08	2,625	0,41926
	03		37,36	2,676	0,42765
	04		36,64	2,729	0,43603
	05		35,94	2,782	0,44442
	06		35,25	2,836	0,45280
	07		34,58	2,891	0,46119
	08		33,92	2,948	0,46957
	09		33,27	3,005	0,47796
	10		32,63	3,064	0,48634
	11		32,01	3,124	0,49473
	12		31,40	3,185	0,50311
	13		30,80	3,247	0,51150
	14		30,21	3,310	0,51989
	15		29,63	3,374	0,52827
	16		29,06	3,440	0,53666
	17		28,51	3,507	0,54504
	18		27,96	3,576	0,55343
	19		27,43	3,645	0,56181
	20		26,90	3,717	0,57020
	21		26,39	3,789	0,57858
	22		25,88	3,863	0,58697
	23		25,39	3,938	0,59535
3	**00**		24,90	4,015	0,60374
	01		24,43	4,093	0,61212
	02		23,96	4,173	0,62051
	03		23,50	4,254	0,62889
	04		23,05	4,337	0,63728
	05		22,61	4,422	0,64566
	06		22,18	4,508	0,65405
	07		21,76	4,596	0,66243
	08		21,34	4,686	0,67082
	09		20,93	4,777	0,67920
	10		20,53	4,870	0,68759
	11		20,14	4,965	0,69597
	12		19,75	5,062	0,70436
	13		19,38	5,161	0,71274
	14		19,01	5,261	0,72113
	15		18,64	5,364	0,72951
	16		18,29	5,468	0,73790
	17		17,94	5,575	0,74629
	18		17,59	5,684	0,75467
	19		17,26	5,795	0,76306
	20		16,93	5,907	0,77144
	21		16,60	6,023	0,77983
	22		16,29	6,140	0,78821
	23		15,97	6,260	0,79660
4	**00**		15,67	6,382	0,80498
	01		15,37	6,506	0,81337
	02		15,07	6,633	0,82175
	03		14,79	6,762	0,83014
		04	14,50	6,894	0,83852
		05	14,23	7,029	0,84691
		06	13,95	7,166	0,85529
		07	13,69	7,305	0,86368
		08	13,43	7,448	0,87206
		09	13,17	7,593	0,88045
		10	12,92	7,741	0,88883
		11	12,67	7,892	0,89722
		12	12,43	8,046	0,90560
		13	12,19	8,203	0,91398
		14	11,96	8,363	0,92237
		15	11,73	8,526	0,93075
		16	11,50	8,692	0,93914
		17	11,28	8,861	0,94752
		18	11,07	9,034	0,95591
		19	10,86	9,210	0,96429
		20	10,65	9,390	0,97268
		21	10,45	9,573	0,98106
		22	10,25	9,759	0,98945
		23	10,05	9,950	0,99783
	5	**00**	9,86	10,144	1,00623
		06	8,78	11,390	1,05654
		12	7,82	12,789	1,10685
		18	6,96	14,360	1,15716
	6	**00**	6,20	16,124	1,20747
		06	5,52	18,104	1,25779
		12	4,92	20,328	1,30810
		18	4,38	22,824	1,35841
	7	**00**	3,90	25,628	1,40872
		06	3,48	28,776	1,45903
		12	3,09	32,310	1,50934
		18	2,76	36,278	1,55966
	8	**00**	2,45	40,734	1,60996
		06	2,19	45,737	1,66028
		12	1,95	51,355	1,71059
		18	1,73	57,663	1,76090
	9	**00**	1,54	64,745	1,81121
		06	1,38	72,697	1,86152
		12	1,23	81,625	1,91183
		18	1,09	91,650	1,96214
	10	**00**	0,97	102,910	2,01246
		06	0,87	115,549	2,06277
		12	0,77	129,742	2,11308
		18	0,69	145,677	2,16339
	11	**00**	0,61	163,569	2,21370
		06	0,54	183,658	2,26401
		12	0,48	206,215	2,31432
		18	0,43	231,545	2,36464
	12	**00**	0,38	259,983	2,41495
		06	0,34	291,919	2,46526
		12	0,31	327,772	2,51557
		18	0,27	368,025	2,56588
	13	**00**	0,24	413,223	2,61619
		06	0,22	463,994	2,66651
		12	0,19	520,969	2,71681
		18	0,17	584,966	2,76713

Strontium 89

Halbwertzeit 54 d

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
	0		100,00	1,000	0,00000
	6		99,68	1,003	0,00139
	12		99,36	1,006	0,00279
	18		99,04	1,009	0,00418
1			98,72	1,012	0,00558
2			97,47	1,026	0,01115
3			96,22	1,039	0,01672
4			95,00	1,052	0,02230
5			93,78	1,066	0,02787
6			92,59	1,080	0,03345
7			91,41	1,094	0,03902
8			90,24	1,108	0,04460
9			89,09	1,122	0,05017
10			87,95	1,136	0,05575
11			86,83	1,151	0,06132
12			85,72	1,166	0,06690
13			84,63	1,181	0,07247
14			83,55	1,196	0,07805
15			82,49	1,212	0,08362
16			81,43	1,227	0,08919
17			80,40	1,243	0,09477
18			79,37	1,259	0,10034
19			78,36	1,276	0,10592
20			77,36	1,292	0,11149
21			76,37	1,309	0,11707
22			75,40	1,326	0,12264
23			74,44	1,343	0,12822
24			73,49	1,360	0,13379
25			72,55	1,378	0,13937
26			71,62	1,396	0,14494
27			70,71	1,414	0,15052
28			69,81	1,432	0,15609
29			68,92	1,450	0,16166
30			68,04	1,469	0,16724
31			67,17	1,488	0,17281
32			66,32	1,507	0,17839
33			65,47	1,527	0,18396
34			64,63	1,547	0,18954
35			63,81	1,567	0,19511
36			63,00	1,587	0,20069
37			62,19	1,607	0,20626
38			61,40	1,628	0,21184
39			60,62	1,649	0,21741
40			59,84	1,671	0,22299
41			59,08	1,692	0,22856
42			58,33	1,714	0,23413
43			57,58	1,736	0,23971
44			56,85	1,759	0,24528
45			56,12	1,781	0,25086
46			55,41	1,804	0,25643
47			54,70	1,828	0,26201
48			54,00	1,851	0,26758
49			53,31	1,875	0,27316
50			52,63	1,899	0,27873
51			51,96	1,924	0,28431
52			51,30	1,949	0,28988
53			50,65	1,974	0,29546
54			50,00	2,000	0,30103
55			49,36	2,025	0,30661
56			48,73	2,052	0,31218
57			48,11	2,078	0,31775
58			47,50	2,105	0,32333
59			46,89	2,132	0,32890
60			46,29	2,160	0,33448
61			45,70	2,188	0,34005
62			45,12	2,216	0,34563
63			44,54	2,244	0,35120
64			43,98	2,273	0,35678
65			43,42	2,303	0,36235
66			42,86	2,333	0,36793
67			42,32	2,363	0,37350
68			41,78	2,393	0,37908
69			41,24	2,424	0,38465
70			40,72	2,455	0,39022
71			40,20	2,487	0,39580
72			39,69	2,519	0,40137
73			39,18	2,552	0,40695
74			38,68	2,585	0,41252
75			38,19	2,618	0,41810
76			37,70	2,652	0,42367
77			37,22	2,686	0,42925
78			36,74	2,721	0,43482
79			36,27	2,756	0,44040
80			35,81	2,792	0,44597
81			35,36	2,828	0,45155
82			34,90	2,864	0,45712
83			34,46	2,901	0,46269
84			34,02	2,939	0,46827
85			33,59	2,977	0,47384
86			33,16	3,015	0,47942
87			32,73	3,054	0,48499
88			32,32	3,094	0,49057
89			31,90	3,134	0,49614
90			31,50	3,174	0,50172
91			31,10	3,215	0,50729
92			30,70	3,257	0,51287
93			30,31	3,299	0,51844
94			29,92	3,342	0,52402
95			29,54	3,385	0,52959
96			29,16	3,428	0,53516
97			28,79	3,473	0,54074
98			28,42	3,518	0,54631
99			28,06	3,563	0,55189
100			27,70	3,609	0,55746
101			27,35	3,656	0,56304
102			27,00	3,703	0,56861
103			26,66	3,751	0,57419
104			26,32	3,799	0,57976
105			25,98	3,848	0,58534
106			25,65	3,898	0,59091
107			25,32	3,948	0,59649
108			25,00	3,999	0,60206
109			24,68	4,051	0,60763
110			24,37	4,104	0,61321
111			24,06	4,157	0,61878
112			23,75	4,210	0,62436
113			23,45	4,265	0,62993
114			23,15	4,320	0,63551
115			22,85	4,376	0,64108
116			22,56	4,432	0,64666
117			22,27	4,489	0,65223
118			21,99	4,547	0,65781
119			21,71	4,606	0,66338
120			21,43	4,666	0,66896
121			21,16	4,726	0,67453
122			20,89	4,787	0,68010
123			20,62	4,849	0,68568
124			20,36	4,911	0,69125
125			20,10	4,975	0,69683
126			19,84	5,039	0,70240
127			19,59	5,104	0,70798
128			19,34	5,170	0,71355
129			19,09	5,237	0,71913
130			18,85	5,305	0,72470
131			18,61	5,373	0,73028
132			18,37	5,443	0,73585
133			18,14	5,513	0,74142
134			17,91	5,584	0,74700
135			17,68	5,656	0,75257
136			17,45	5,729	0,75815
137			17,23	5,803	0,76372
138			17,01	5,878	0,76930
139			16,79	5,954	0,77487
140			16,58	6,031	0,78045
141			16,37	6,109	0,78602
142			16,16	6,188	0,79160
143			15,95	6,268	0,79717
144			15,75	6,349	0,80274
145			15,55	6,431	0,80832
146			15,35	6,514	0,81389
147			15,15	6,598	0,81947
148			14,96	6,684	0,82504
149			14,77	6,770	0,83062
150			14,58	6,857	0,83619
151			14,40	6,946	0,84177
152			14,21	7,036	0,84734
153			14,03	7,127	0,85292
154			13,85	7,219	0,85849
155			13,68	7,312	0,86406
156			13,50	7,406	0,86964
157			13,33	7,502	0,87521
158			13,16	7,599	0,88079
159			12,99	7,697	0,88636
160			12,83	7,797	0,89194
162			12,50	7,999	0,90308
164			12,18	8,207	0,91423
166			11,87	8,421	0,92538
168			11,57	8,640	0,93653
170			11,28	8,865	0,94768
172			10,99	9,095	0,95883
174			10,72	9,332	0,96998
176			10,44	9,574	0,98113
178			10,18	9,823	0,99227
180			9,92	10,079	1,00343
182			9,67	10,341	1,01458
184			9,42	10,610	1,02573
186			9,19	10,886	1,03688
188			8,95	11,169	1,04803
190			8,73	11,459	1,05918
192			8,50	11,757	1,07033
194			8,29	12,063	1,08148
196			8,08	12,377	1,09263
198			7,87	12,699	1,10378
200			7,67	13,029	1,11493
202			7,48	13,368	1,12608
204			7,29	13,715	1,13722
206			7,11	14,072	1,14837
208			6,93	14,438	1,15952
210			6,75	14,814	1,17067
212			6,58	15,199	1,18182
214			6,41	15,594	1,19297
216			6,25	16,000	1,20412
218			6,09	16,416	1,21527
220			5,94	16,842	1,22642
222			5,79	17,280	1,23757
224			5,64	17,730	1,24872
226			5,50	18,191	1,25987
228			5,36	18,664	1,27102
230			5,22	19,149	1,28217
232			5,09	19,647	1,29331
234			4,96	20,158	1,30446
236			4,83	20,682	1,31561
238			4,71	21,220	1,32676
240			4,59	21,772	1,33791
242			4,48	22,338	1,34906
244			4,36	22,919	1,36021
246			4,25	23,515	1,37136
248			4,14	24,127	1,38251
250			4,04	24,754	1,39366
252			3,94	25,398	1,40481
254			3,84	26,058	1,41596
256			3,74	26,736	1,42711
258			3,65	27,431	1,43826
260			3,55	28,145	1,44940
262			3,46	28,877	1,46055
264			3,38	29,627	1,47170
266			3,29	30,398	1,48285
268			3,21	31,188	1,49400
270			3,13	32,000	1,50515
280			2,75	36,382	1,56090
290			2,42	41,365	1,61664
300			2,13	47,031	1,67239
310			1,87	53,473	1,72814
320			1,64	60,796	1,78388
330			1,45	69,123	1,83963
340			1,27	78,590	1,89537
350			1,12	89,353	1,95111
360			0,98	101,594	2,00687
370			0,87	115,508	2,06261
380			0,76	131,328	2,11836
390			0,67	149,316	2,17411
400			0,59	169,767	2,22986

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
410			0,52	193,016	2,28560
420			0,46	219,452	2,34134
430			0,40	249,513	2,39709
440			0,35	283,687	2,45284
450			0,31	322,539	2,50858
460			0,27	366,716	2,56433
470			0,24	416,944	2,62008
480			0,21	474,045	2,67582
490			0,19	538,967	2,73156

Jod 131
Halbwertzeit 8,05 d

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
	0		100,00	1,000	0,00000
	1		99,64	1,003	0,00156
	2		99,29	1,007	0,00312
	3		98,93	1,010	0,00467
	4		98,58	1,014	0,00623
	5		98,22	1,018	0,00779
	6		97,87	1,021	0,00935
	7		97,52	1,025	0,01091
	8		97,17	1,029	0,01247
	9		96,82	1,032	0,01402
	10		96,48	1,036	0,01558
	11		96,13	1,040	0,01714
	12		95,79	1,043	0,01870
	13		95,44	1,047	0,02026
	14		95,10	1,051	0,02181
	15		94,76	1,055	0,02337
	16		94,42	1,059	0,02493
	17		94,08	1,062	0,02649
	18		93,75	1,066	0,02805
	19		93,41	1,070	0,02960
	20		93,08	1,074	0,03116
	21		92,74	1,078	0,03272
	22		92,41	1,082	0,03428
	23		92,08	1,086	0,03584
1	**00**		91,75	1,089	0,03740
	01		91,42	1,093	0,03895
	02		91,09	1,097	0,04051
	03		90,77	1,101	0,04207
	04		90,44	1,105	0,04363
	05		90,12	1,109	0,04519
	06		89,80	1,113	0,04674
	07		89,47	1,117	0,04830
	08		89,15	1,121	0,04986
	09		88,83	1,125	0,05142
	10		88,52	1,129	0,05298
	11		88,20	1,133	0,05453
	12		87,88	1,137	0,05609
	13		87,57	1,141	0,05765
	14		87,26	1,146	0,05921
	15		86,94	1,150	0,06077
	16		86,63	1,154	0,06233
	17		86,32	1,158	0,06388
	18		86,01	1,162	0,06544
	19		85,70	1,166	0,06700
	20		85,40	1,171	0,06856
	21		85,09	1,175	0,07012
	22		84,79	1,179	0,07167
	23		84,48	1,183	0,07323
2	**00**		84,18	1,187	0,07479
	01		83,88	1,192	0,07635
	02		83,58	1,196	0,07791
	03		83,28	1,200	0,07947
	04		82,98	1,205	0,08102
	05		82,68	1,209	0,08258
	06		82,39	1,213	0,08414
	07		82,09	1,218	0,08570
	08		81,80	1,222	0,08726
	09		81,51	1,226	0,08881
	10		81,21	1,231	0,09037
	11		80,92	1,235	0,09193
	12		80,63	1,240	0,09349
	13		80,34	1,244	0,09505
	14		80,06	1,249	0,09660
	15		79,77	1,253	0,09816
	16		79,48	1,258	0,09972
	17		79,20	1,262	0,10128
	18		78,92	1,267	0,10284
	19		78,63	1,271	0,10440
	20		78,35	1,276	0,10595
	21		78,07	1,280	0,10751
	22		77,79	1,285	0,10907
	23		77,51	1,290	0,11063
3	**00**		77,24	1,294	0,11219
	01		76,96	1,299	0,11374
	02		76,68	1,304	0,11530
	03		76,41	1,308	0,11686
	04		76,13	1,313	0,11842
	05		75,86	1,318	0,11998
	06		75,59	1,322	0,12153
	07		75,32	1,327	0,12309
	08		75,05	1,332	0,12465
	09		74,78	1,337	0,12621
	10		74,51	1,342	0,12777
	11		74,25	1,346	0,12933
	12		73,98	1,351	0,13088
	13		73,72	1,356	0,13244
	14		73,45	1,361	0,13400
	15		73,19	1,366	0,13556
	16		72,93	1,371	0,13712
	17		72,67	1,376	0,13867
	18		72,41	1,381	0,14023
	19		72,15	1,386	0,14179
	20		71,89	1,391	0,14335
	21		71,63	1,396	0,14491
	22		71,37	1,401	0,14646
	23		71,12	1,406	0,14802
4	**00**		70,86	1,411	0,14958
	01		70,61	1,416	0,15114
	02		70,36	1,421	0,15270
	03		70,10	1,426	0,15425
	04		69,85	1,431	0,15581
	05		69,60	1,436	0,15737
	06		69,35	1,441	0,15893
	07		69,11	1,447	0,16049
	08		68,86	1,452	0,16205
	09		68,61	1,457	0,16360
	10		68,37	1,462	0,16516
	11		68,12	1,467	0,16672
	12		67,88	1,473	0,16828
	13		67,63	1,478	0,16984
	14		67,39	1,483	0,17139
	15		67,15	1,489	0,17295
	16		66,91	1,494	0,17451
	17		66,67	1,499	0,17607
	18		66,43	1,505	0,17763
	19		66,19	1,510	0,17918
	20		65,96	1,516	0,18074
	21		65,72	1,521	0,18230
	22		65,48	1,527	0,18386
	23		65,25	1,532	0,18542
5	**00**		65,02	1,538	0,18698
	06		63,63	1,571	0,19632
	12		62,28	1,605	0,20567
	18		60,95	1,640	0,21502
6	**00**		59,65	1,676	0,22437
	06		58,38	1,712	0,23372
	12		57,14	1,750	0,24307
	18		55,92	1,788	0,25242
7	**00**		54,73	1,827	0,26177
	06		53,57	1,866	0,27111
	12		52,42	1,907	0,28046
	18		51,31	1,948	0,28981
8	**00**		50,22	1,991	0,29916
	06		49,15	2,034	0,30851
	12		48,10	2,079	0,31786
	18		47,08	2,124	0,32721
9	**00**		46,07	2,170	0,33656
	06		45,09	2,217	0,34590
	12		44,13	2,265	0,35525
	18		43,19	2,315	0,36460
10	**00**		42,27	2,365	0,37395
	06		41,37	2,417	0,38330
	12		40,49	2,469	0,39265
	18		39,63	2,523	0,40200
11	**00**		38,78	2,578	0,41135
	06		37,96	2,634	0,42069
	12		37,15	2,691	0,43004
	18		36,36	2,750	0,43939
12	**00**		35,58	2,810	0,44874
	06		34,83	2,871	0,45809
	12		34,08	2,933	0,46744
	18		33,36	2,997	0,47679
13	**00**		32,65	3,062	0,48614
	06		31,95	3,129	0,49548
	12		31,27	3,197	0,50483
	18		30,61	3,267	0,51418
14	**00**		29,96	3,338	0,52353
	06		29,32	3,410	0,53288
	12		28,69	3,485	0,54223
	18		28,08	3,561	0,55158
15	**00**		27,48	3,638	0,56093
	06		26,90	3,717	0,57027
	12		26,33	3,798	0,57962
	18		25,76	3,881	0,58897
16	**00**		25,22	3,965	0,59832
	06		24,68	4,051	0,60767
	12		24,15	4,140	0,61702
	18		23,64	4,230	0,62637
17	**00**		23,14	4,322	0,63572
	06		22,64	4,416	0,64506
	12		22,16	4,512	0,65441
	18		21,69	4,610	0,66376
18	**00**		21,23	4,710	0,67311
	06		20,78	4,813	0,68246
	12		20,33	4,918	0,69181
	18		19,90	5,025	0,70116
19	**00**		19,48	5,134	0,71051
	06		19,06	5,246	0,71985
	12		18,66	5,360	0,72920
	18		18,26	5,477	0,73855
20	**00**		17,87	5,596	0,74790
	06		17,49	5,718	0,75725
	12		17,12	5,842	0,76660
	18		16,75	5,969	0,77595
21	**00**		16,39	6,099	0,78529
	06		16,05	6,232	0,79464
	12		15,70	6,367	0,80399
	18		15,37	6,506	0,81334
22	**00**		15,04	6,647	0,82269
	06		14,72	6,792	0,83204
	12		14,41	6,940	0,84139
	18		14,10	7,091	0,85073
23	**00**		13,80	7,245	0,86008
	06		13,51	7,403	0,86943
	12		13,22	7,564	0,87878
	18		12,94	7,729	0,88813
24	**00**		12,66	7,897	0,89748
	06		12,39	8,069	0,90682
	12		12,13	8,244	0,91617
	18		11,87	8,424	0,92552
25	**00**		11,62	8,607	0,93487
	06		11,37	8,794	0,94422
	12		11,13	8,985	0,95357
	18		10,89	9,181	0,96291
26	**00**		10,66	9,381	0,97226
	06		10,43	9,585	0,98161
	12		10,21	9,793	0,99096
	18		9,99	10,007	1,00032
27	**00**		9,78	10,225	1,00967
	06		9,57	10,447	1,01901
	12		9,37	10,674	1,02836
	18		9,17	10,907	1,03771
28	**00**		8,97	11,144	1,04706
	06		8,78	11,387	1,05641
	12		8,59	11,634	1,06576
	18		8,41	11,887	1,07511
29	**00**		8,23	12,146	1,08446
	06		8,06	12,410	1,09381
	12		7,89	12,680	1,10315
	18		7,72	12,956	1,11250
30	**00**		7,55	13,238	1,12185
	06		7,39	13,526	1,13120
	12		7,24	13,821	1,14055
	18		7,08	14,122	1,14990
31	**00**		6,93	14,429	1,15925
	06		6,78	14,743	1,16860
	12		6,64	15,064	1,17794
	18		6,50	15,391	1,18729
32	**00**		6,36	15,726	1,19664
	06		6,22	16,069	1,20599
	12		6,09	16,418	1,21534
	18		5,96	16,775	1,22469
33	**00**		5,83	17,140	1,23404
	06		5,71	17,513	1,24338
	12		5,59	17,895	1,25273
	18		5,47	18,284	1,26208
34	**00**		5,35	18,682	1,27143
	06		5,24	19,088	1,28078
	12		5,13	19,504	1,29013
	18		5,02	19,928	1,29948
35	**00**		4,91	20,362	1,30883
	06		4,81	20,805	1,31818
	12		4,70	21,258	1,32752
	18		4,60	21,720	1,33687
36	**00**		4,51	22,193	1,34622
	06		4,41	22,676	1,35557
	12		4,32	23,169	1,36492
	18		4,22	23,673	1,37427
37	**00**		4,13	24,188	1,38362
	06		4,05	24,715	1,39296
	12		3,96	25,253	1,40231
	18		3,88	25,802	1,41166
38	**00**		3,79	26,364	1,42101
	06		3,71	26,937	1,43036
	12		3,63	27,523	1,43971
	18		3,56	28,122	1,44906
39	**00**		3,48	28,734	1,45841
	06		3,41	29,359	1,46776
	12		3,33	29,998	1,47710
	18		3,26	30,651	1,48645
40	**00**		3,19	31,318	1,49580
	06		3,13	32,000	1,50515
	12		3,06	32,696	1,51450
	18		2,99	33,407	1,52385
41	**00**		2,93	34,134	1,53320
	06		2,87	34,877	1,54255
	12		2,81	35,636	1,55189
	18		2,75	36,411	1,56124
42	**00**		2,69	37,204	1,57059
	06		2,63	38,013	1,57994
	12		2,57	38,840	1,58929
	18		2,52	39,686	1,59864
43	**00**		2,47	40,549	1,60799
	06		2,41	41,431	1,61734
	12		2,36	42,333	1,62668
	18		2,31	43,254	1,63603
44	**00**		2,26	44,195	1,64538
	06		2,21	45,157	1,65473
	12		2,17	46,140	1,66408
	18		2,12	47,144	1,67343
45	**00**		2,08	48,169	1,68278
	06		2,03	49,217	1,69212
	12		1,99	50,288	1,70147
	18		1,95	51,383	1,71082
46	**00**		1,90	52,501	1,72017
	06		1,86	53,643	1,72952
	12		1,82	54,811	1,73887
	18		1,79	56,003	1,74822
47	**00**		1,75	57,222	1,75757
	06		1,71	58,467	1,76691
	12		1,67	59,739	1,77626
	18		1,64	61,039	1,78561
48	**00**		1,60	62,367	1,79496
	06		1,57	63,724	1,80431
	12		1,54	65,111	1,81366
	18		1,50	66,528	1,82301
49	**00**		1,47	67,975	1,83236
	06		1,44	69,454	1,84170
	12		1,41	70,965	1,85105
	18		1,38	72,510	1,86040
50			1,35	74,087	1,86975
51			1,24	80,749	1,90714
52			1,14	88,010	1,94453
53			1,04	95,924	1,98193
54			0,96	104,552	2,01933
55			0,88	113,953	2,05673
56			0,81	124,200	2,09412
57			0,74	135,367	2,13151
58			0,68	147,540	2,16891
59			0,62	160,807	2,20631
60			0,57	175,266	2,24370
61			0,52	191,029	2,28110
62			0,48	208,203	2,31849
63			0,44	226,927	2,35589
64			0,40	247,334	2,39329
65			0,37	269,570	2,43067
66			0,34	293,815	2,46807
67			0,31	320,235	2,50547
68			0,29	349,027	2,54286
69			0,26	380,416	2,58026
70			0,24	414,628	2,61766
71			0,22	451,895	2,65504
72			0,20	492,538	2,69244

Jod 133
Halbwertzeit 21 h

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
	00		100,00	1,000	0,00000
	10		99,45	1,005	0,00239
	20		98,91	1,011	0,00478
	30		98,36	1,016	0,00717
	40		97,82	1,022	0,00956
	50		97,29	1,027	0,01195
1	**00**		96,75	1,033	0,01434
	10		96,22	1,039	0,01672
	20		95,69	1,044	0,01911
	30		95,17	1,050	0,02150
	40		94,65	1,056	0,02389
	50		94,13	1,062	0,02628
2	**00**		93,61	1,068	0,02867
	10		93,10	1,074	0,03106
	20		92,59	1,080	0,03345
	30		92,08	1,086	0,03584
	40		91,57	1,092	0,03823
	50		91,07	1,098	0,04062
3	**00**		90,57	1,104	0,04300
	10		90,08	1,110	0,04539
	20		89,58	1,116	0,04778
	30		89,09	1,122	0,05017
	40		88,60	1,128	0,05256
	50		88,12	1,134	0,05495
4	**00**		87,63	1,141	0,05734
	10		87,15	1,147	0,05973
	20		86,67	1,153	0,06212
	30		86,20	1,160	0,06451
	40		85,72	1,166	0,06690
	50		85,25	1,172	0,06929
5	**00**		84,79	1,179	0,07167
	10		84,32	1,185	0,07406
	20		83,86	1,192	0,07645
	30		83,40	1,199	0,07884
	40		82,94	1,205	0,08123
	50		82,49	1,212	0,08362
6	**00**		82,03	1,219	0,08601
	10		81,58	1,225	0,08840
	20		81,14	1,232	0,09079
	30		80,69	1,239	0,09318
	40		80,25	1,246	0,09557
	50		79,81	1,253	0,09795
7	**00**		79,37	1,259	0,10034
	10		78,93	1,266	0,10273
	20		78,50	1,273	0,10512
	30		78,07	1,280	0,10751
	40		77,64	1,287	0,10990
	50		77,22	1,295	0,11229
8	**00**		76,79	1,302	0,11468
	10		76,37	1,309	0,11707
	20		75,95	1,316	0,11946

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
		30	75,54	1,323	0,12185
		40	75,12	1,331	0,12424
		50	74,71	1,338	0,12662
	9	00	74,30	1,345	0,12901
		10	73,89	1,353	0,13140
		20	73,49	1,360	0,13379
		30	73,08	1,368	0,13618
		40	72,68	1,375	0,13857
		50	72,28	1,383	0,14096
	10	00	71,89	1,391	0,14335
		10	71,49	1,398	0,14574
		20	71,10	1,406	0,14813
		30	70,71	1,414	0,15052
		40	70,32	1,422	0,15290
		50	69,94	1,429	0,15529
	11	00	69,55	1,437	0,15768
		10	69,17	1,445	0,16007
		20	68,79	1,453	0,16246
		30	68,41	1,461	0,16485
		40	68,04	1,469	0,16724
		50	67,67	1,477	0,16963
	12	00	67,30	1,485	0,17202
		10	66,93	1,494	0,17441
		20	66,56	1,502	0,17680
		30	66,19	1,510	0,17918
		40	65,83	1,519	0,18157
		50	65,47	1,527	0,18396
	13	00	65,11	1,535	0,18635
		10	64,75	1,544	0,18874
		20	64,40	1,552	0,19113
		30	64,04	1,561	0,19352
		40	63,69	1,570	0,19591
		50	63,34	1,578	0,19830
	14	00	63,00	1,587	0,20069
		10	62,65	1,596	0,20308
		20	62,31	1,604	0,20547
		30	61,96	1,613	0,20785
		40	61,62	1,622	0,21024
		50	61,29	1,631	0,21263
	15	00	60,95	1,640	0,21502
		10	60,62	1,649	0,21741
		20	60,28	1,658	0,21980
		30	59,95	1,667	0,22219
		40	59,62	1,677	0,22458
		50	59,30	1,686	0,22697
	16	00	58,97	1,695	0,22936
		10	58,65	1,705	0,23175
		20	58,33	1,714	0,23413
		30	58,01	1,723	0,23652
		40	57,69	1,733	0,23891
		50	57,37	1,743	0,24130
	17	00	57,06	1,752	0,24369
		10	56,74	1,762	0,24608
		20	56,43	1,772	0,24847
		30	56,12	1,781	0,25086
		40	55,82	1,791	0,25325
		50	55,51	1,801	0,25564
	18	00	55,20	1,811	0,25803
		10	54,90	1,821	0,26042
		20	54,60	1,831	0,26280
		30	54,30	1,841	0,26519
		40	54,00	1,851	0,26758
		50	53,71	1,861	0,26997
	19	00	53,41	1,872	0,27236
		10	53,12	1,882	0,27475
		20	52,83	1,892	0,27714
		30	52,54	1,903	0,27953
		40	52,25	1,913	0,28192
		50	51,96	1,924	0,28431
	20	00	51,68	1,935	0,28670
		10	51,39	1,945	0,28908
		20	51,11	1,956	0,29147
		30	50,83	1,967	0,29386
		40	50,55	1,978	0,29625
		50	50,28	1,989	0,29864
	21	00	50,00	2,000	0,30103
		10	49,73	2,011	0,30342
		20	49,45	2,022	0,30581
		30	49,18	2,033	0,30820
		40	48,91	2,044	0,31059
		50	48,64	2,055	0,31298
	22	00	48,38	2,067	0,31537
		10	48,11	2,078	0,31775
		20	47,85	2,089	0,32014
		30	47,58	2,101	0,32253
		40	47,32	2,113	0,32492
		50	47,06	2,124	0,32731
	23	00	46,81	2,136	0,32970
		10	46,55	2,148	0,33209
		20	46,29	2,160	0,33448
		30	46,04	2,172	0,33687
		40	45,79	2,184	0,33926
		50	45,54	2,196	0,34165
1	00		45,29	2,208	0,34403
	01		43,82	2,282	0,35837
	02		42,39	2,358	0,37270
	03		41,02	2,438	0,38704
	04		39,69	2,519	0,40137
	05		38,40	2,604	0,41571
	06		37,15	2,691	0,43004
	07		35,94	2,782	0,44438
	08		34,78	2,875	0,45871
	09		33,65	2,971	0,47305
	10		32,56	3,071	0,48738
	11		31,50	3,174	0,50172
	12		30,48	3,281	0,51605
	13		29,49	3,391	0,53039
	14		28,53	3,505	0,54472
	15		27,60	3,622	0,55906
	16		26,71	3,744	0,57339
	17		25,84	3,870	0,58773
	18		25,00	3,999	0,60206
	19		24,19	4,134	0,61640
	20		23,40	4,272	0,63073
	21		22,64	4,416	0,64506
	22		21,91	4,564	0,65940
	23		21,20	4,717	0,67373
2	00		20,51	4,876	0,68807
	01		19,84	5,039	0,70240
	02		19,20	5,208	0,71674
	03		18,57	5,383	0,73107
	04		17,97	5,564	0,74541
	05		17,39	5,750	0,75974
	06		16,82	5,943	0,77408
	07		16,28	6,143	0,78841
	08		15,75	6,349	0,80274
	09		15,24	6,562	0,81708
	10		14,74	6,782	0,83141
	11		14,26	7,010	0,84575
	12		13,80	7,245	0,86008
	13		13,35	7,488	0,87442
	14		12,92	7,740	0,88875
	15		12,50	7,999	0,90308
	16		12,09	8,268	0,91742
	17		11,70	8,545	0,93175
	18		11,32	8,832	0,94609
	19		10,95	9,128	0,96042
	20		10,60	9,435	0,97475
	21		10,25	9,751	0,98909
	22		9,92	10,079	1,00343
	23		9,60	10,417	1,01777
3	00		9,29	10,767	1,03210
	01		8,99	11,128	1,04644
	02		8,69	11,501	1,06077
	03		8,41	11,887	1,07511
	04		8,14	12,286	1,08944
	05		7,87	12,699	1,10378
	06		7,62	13,125	1,11811
	07		7,37	13,565	1,13245
	08		7,13	14,021	1,14678
	09		6,90	14,491	1,16112
	10		6,68	14,977	1,17545
	11		6,46	15,480	1,18979
	12		6,25	16,000	1,20412
	13		6,05	16,536	1,21846
	14		5,85	17,091	1,23279
	15		5,66	17,665	1,24712
	16		5,48	18,258	1,26146
	17		5,30	18,870	1,27579
	18		5,13	19,504	1,29013
	19		4,96	20,158	1,30446
	20		4,80	20,835	1,31880
	21		4,64	21,534	1,33313
	22		4,49	22,257	1,34747
	23		4,35	23,003	1,36180
4	00		4,21	23,775	1,37614
	01		4,07	24,573	1,39047
	02		3,94	25,398	1,40481
	03		3,81	26,250	1,41914
	04		3,69	27,131	1,43348
	05		3,57	28,042	1,44781
	06		3,45	28,983	1,46215
	07		3,34	29,955	1,47648
	08		3,23	30,960	1,49082
	09		3,13	32,000	1,50515
	10		3,02	33,073	1,51948
	11		2,93	34,183	1,53382
	12		2,83	35,330	1,54815
	13		2,74	36,516	1,56249
	14		2,65	37,741	1,57682
	15		2,56	39,008	1,59116
	16		2,48	40,317	1,60549
	17		2,40	41,670	1,61983
	18		2,32	43,068	1,63416
	19		2,25	44,514	1,64850
	20		2,17	46,007	1,66283
	21		2,10	47,551	1,67717
	22		2,03	49,147	1,69150
	23		1,97	50,796	1,70584
5	00		1,90	52,501	1,72017
	06		1,56	63,999	1,80618
	12		1,28	78,015	1,89218
	18		1,05	95,101	1,97819
6	00		0,86	115,932	2,06421
	06		0,71	141,322	2,15021
	12		0,58	172,274	2,23622
	18		0,48	210,004	2,32223
7	00		0,39	255,996	2,40823
	06		0,32	312,070	2,49425
	12		0,26	380,416	2,58026
	18		0,22	463,735	2,66627
8	00		0,18	565,291	2,75227
	06		0,15	689,084	2,83827
	12		0,12	839,983	2,92427
	18		0,10	1023,960	3,01028

Gold 198
Halbwertzeit 2,70 d

t d	t h	t min	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
	0		100,00	1,000	0,00000
	1		98,94	1,010	0,00465
	2		97,88	1,021	0,00929
	3		96,84	1,032	0,01394
	4		95,81	1,043	0,01858
	5		94,79	1,054	0,02323
	6		93,78	1,066	0,02787
	7		92,79	1,077	0,03252
	8		91,80	1,089	0,03716
	9		90,82	1,101	0,04181
	10		89,86	1,112	0,04646
	11		88,90	1,124	0,05110
	12		87,95	1,136	0,05575
	13		87,02	1,149	0,06039
	14		86,09	1,161	0,06504
	15		85,18	1,174	0,06968
	16		84,27	1,186	0,07433
	17		83,37	1,199	0,07897
	18		82,49	1,212	0,08362
	19		81,61	1,225	0,08827
	20		80,74	1,238	0,09291
	21		79,88	1,251	0,09756
	22		79,03	1,265	0,10220
	23		78,19	1,278	0,10685
1	00		77,36	1,292	0,11149
	01		76,54	1,306	0,11614
	02		75,72	1,320	0,12078
	03		74,92	1,334	0,12543
	04		74,12	1,349	0,13008
	05		73,33	1,363	0,13472
	06		72,55	1,378	0,13937
	07		71,78	1,393	0,14401
	08		71,01	1,408	0,14866
	09		70,26	1,423	0,15330
	10		69,51	1,438	0,15795
	11		68,77	1,454	0,16259
	12		68,04	1,469	0,16724
	13		67,32	1,485	0,17188
	14		66,60	1,501	0,17653
	15		65,89	1,517	0,18118
	16		65,19	1,533	0,18582
	17		64,50	1,550	0,19047
	18		63,81	1,567	0,19511
	19		63,13	1,584	0,19976
	20		62,46	1,601	0,20440
	21		61,79	1,618	0,20905
	22		61,14	1,635	0,21369
	23		60,49	1,653	0,21834
2	00		59,84	1,671	0,22299
	01		59,21	1,689	0,22763
	02		58,58	1,707	0,23228
	03		57,95	1,725	0,23692
	04		57,34	1,744	0,24157
	05		56,73	1,762	0,24621
	06		56,12	1,781	0,25086
	07		55,53	1,800	0,25550
	08		54,94	1,820	0,26015
	09		54,35	1,839	0,26480
	10		53,77	1,859	0,26944
	11		53,20	1,879	0,27409
	12		52,63	1,899	0,27873
	13		52,07	1,920	0,28338
	14		51,52	1,940	0,28802
	15		50,97	1,961	0,29267
	16		50,43	1,982	0,29731
	17		49,89	2,004	0,30196
	18		49,36	2,025	0,30661
	19		48,84	2,047	0,31125
	20		48,32	2,069	0,31590
	21		47,80	2,091	0,32054
	22		47,29	2,114	0,32519
	23		46,79	2,137	0,32983
3	00		46,29	2,160	0,33448
	01		45,80	2,183	0,33912
	02		45,31	2,206	0,34377
	03		44,83	2,230	0,34841
	04		44,35	2,254	0,35306
	05		43,88	2,278	0,35771
	06		43,42	2,303	0,36235
	07		42,95	2,328	0,36700
	08		42,50	2,353	0,37164
	09		42,04	2,378	0,37629
	10		41,60	2,403	0,38093
	11		41,15	2,429	0,38558
	12		40,72	2,455	0,39022
	13		40,28	2,482	0,39487
	14		39,86	2,509	0,39952
	15		39,43	2,536	0,40416
	16		39,01	2,563	0,40881
	17		38,60	2,590	0,41345
	18		38,19	2,618	0,41810
	19		37,78	2,646	0,42274
	20		37,38	2,675	0,42739
	21		36,98	2,704	0,43203
	22		36,59	2,733	0,43668
	23		36,20	2,762	0,44133
4	00		35,81	2,792	0,44597
	01		35,43	2,822	0,45062
	02		35,05	2,852	0,45526
	03		34,68	2,883	0,45991
	04		34,31	2,914	0,46455
	05		33,95	2,945	0,46920
	06		33,59	2,977	0,47384
	07		33,23	3,009	0,47849
	08		32,87	3,041	0,48313
	09		32,53	3,074	0,48778
	10		32,18	3,107	0,49243
	11		31,84	3,141	0,49707
	12		31,50	3,174	0,50172
	13		31,16	3,208	0,50636
	14		30,83	3,243	0,51101
	15		30,50	3,278	0,51565
	16		30,18	3,313	0,52030
	17		29,86	3,349	0,52494
	18		29,54	3,385	0,52959
	19		29,23	3,421	0,53424
	20		28,91	3,458	0,53888
	21		28,61	3,495	0,54353
	22		28,30	3,533	0,54817
	23		28,00	3,571	0,55282
5	00		27,70	3,609	0,55746
	06		25,98	3,848	0,58534
	12		24,37	4,104	0,61321
	18		22,85	4,376	0,64108
6	00		21,43	4,666	0,66896
	06		20,10	4,975	0,69683
	12		18,85	5,305	0,72470
	18		17,68	5,656	0,75257
7	00		16,58	6,031	0,78045
	06		15,55	6,431	0,80832
	12		14,58	6,857	0,83619
	18		13,68	7,312	0,86406
8	00		12,83	7,797	0,89194
	06		12,03	8,313	0,91981
	12		11,28	8,865	0,94768
	18		10,58	9,452	0,97555
9	00		9,92	10,079	1,00343
	06		9,30	10,747	1,03131
	12		8,73	11,459	1,05918
	18		8,18	12,219	1,08705
10	00		7,67	13,029	1,11493
	06		7,20	13,893	1,14280
	12		6,75	14,814	1,17067
	18		6,33	15,795	1,19855
11	00		5,94	16,842	1,22642
	06		5,57	17,959	1,25429
	12		5,22	19,149	1,28217
	18		4,90	20,419	1,31004
12	00		4,59	21,772	1,33791
	06		4,31	23,215	1,36578
	12		4,04	24,754	1,39366
	18		3,79	26,395	1,42153
13	00		3,55	28,145	1,44940
	06		3,33	30,010	1,47728
	12		3,13	32,000	1,50515
	18		2,93	34,121	1,53302
14	00		2,75	36,382	1,56090
	06		2,58	38,794	1,58877
	12		2,42	41,365	1,61664
	18		2,27	44,107	1,64452
15	00		2,13	47,031	1,67239
	06		1,99	50,148	1,70026
	12		1,87	53,473	1,72814
	18		1,75	57,017	1,75601
16	00		1,64	60,796	1,78388
	06		1,54	64,826	1,81175
	12		1,45	69,123	1,83963
	18		1,36	73,705	1,86750
17	00		1,27	78,590	1,89537
	06		1,19	83,799	1,92324
	12		1,12	89,353	1,95111
	18		1,05	95,276	1,97899
18	00		0,98	101,594	2,00687
	06		0,92	108,328	2,03474
	12		0,87	115,508	2,06261
	18		0,81	123,164	2,09049
19	00		0,76	131,328	2,11836
	06		0,71	140,034	2,14624
	12		0,67	149,316	2,17411
	18		0,63	159,212	2,20198
20			0,59	169,767	2,22986
25			0,16	612,782	2,78731
30			0,05	2211,900	3,34477
35			0,01	7987,220	3,90240

Halbwertzeit 5,2 a

d → ↓	0			10			20			30			40		
	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
0	100,00	1,000	0,00000	99,64	1,003	0,00159	99,27	1,007	0,00317	98,91	1,011	0,00476	98,55	1,014	0,00634
100	96,42	1,037	0,01585	96,06	1,040	0,01744	95,72	1,044	0,01902	95,37	1,048	0,02061	95,02	1,052	0,02219
200	92,96	1,075	0,03170	92,62	1,079	0,03329	92,28	1,083	0,03487	91,95	1,087	0,03646	91,61	1,091	0,03804
300	89,63	1,115	0,04755	89,30	1,119	0,04914	88,98	1,123	0,05072	88,65	1,127	0,05231	88,33	1,132	0,05389
400	86,42	1,157	0,06340	86,10	1,161	0,06499	85,79	1,165	0,06657	85,48	1,169	0,06816	85,16	1,174	0,06974
500	83,32	1,200	0,07925	83,02	1,204	0,08084	82,71	1,208	0,08242	82,41	1,213	0,08401	82,11	1,217	0,08559
600	80,33	1,244	0,09510	80,04	1,249	0,09669	79,75	1,253	0,09827	79,46	1,258	0,09986	79,17	1,263	0,10144
700	77,46	1,291	0,11095	77,17	1,295	0,11254	76,89	1,300	0,11412	76,61	1,305	0,11571	76,33	1,310	0,11729
800	74,68	1,339	0,12680	74,41	1,343	0,12839	74,14	1,348	0,12997	73,87	1,353	0,13155	73,60	1,358	0,13314
900	72,00	1,388	0,14265	71,74	1,393	0,14423	71,48	1,399	0,14582	71,22	1,404	0,14740	70,96	1,409	0,14899
1000	69,42	1,440	0,15850	69,17	1,445	0,16008	68,92	1,451	0,16167	68,67	1,456	0,16325	68,42	1,461	0,16484
1100	66,93	1,493	0,17435	66,69	1,499	0,17593	66,45	1,504	0,17752	66,21	1,510	0,17910	65,96	1,515	0,18069
1200	64,54	1,549	0,19020	64,30	1,555	0,19178	64,07	1,560	0,19337	63,83	1,566	0,19495	63,60	1,572	0,19654
1300	62,22	1,607	0,20605	62,00	1,612	0,20763	61,77	1,618	0,20922	61,55	1,624	0,21080	61,32	1,630	0,21239
1400	59,99	1,666	0,22190	59,77	1,672	0,22348	59,56	1,679	0,22507	59,34	1,685	0,22665	59,12	1,691	0,22824
1500	57,84	1,728	0,23775	57,63	1,735	0,23933	57,42	1,741	0,24092	57,21	1,747	0,24250	57,00	1,754	0,24409
1600	55,77	1,793	0,25360	55,57	1,799	0,25518	55,36	1,806	0,25677	55,16	1,812	0,25835	54,96	1,819	0,25994
1700	53,77	1,859	0,26945	53,58	1,866	0,27103	53,38	1,873	0,27262	53,19	1,880	0,27420	52,99	1,887	0,27579
1800	51,84	1,928	0,28530	51,66	1,935	0,28688	51,47	1,942	0,28847	51,28	1,950	0,29005	51,09	1,957	0,29164
1900	49,99	2,000	0,30115	49,80	2,007	0,30273	49,62	2,015	0,30432	49,44	2,022	0,30590	49,26	2,029	0,30749
2000	48,19	2,074	0,31700	48,02	2,082	0,31858	47,84	2,090	0,32017	47,67	2,097	0,32175	47,50	2,105	0,32334
2100	46,47	2,152	0,33285	46,30	2,159	0,33443	46,13	2,167	0,33602	45,96	2,175	0,33760	45,79	2,183	0,33919
2200	44,80	2,232	0,34870	44,64	2,240	0,35028	44,48	2,248	0,35187	44,31	2,256	0,35345	44,15	2,264	0,35504
2300	43,20	2,314	0,36455	43,04	2,323	0,36613	42,88	2,331	0,36772	42,73	2,340	0,36930	42,57	2,349	0,37089
2400	41,65	2,401	0,38040	41,50	2,409	0,38198	41,35	2,418	0,38357	41,20	2,427	0,38515	41,05	2,436	0,38674
2500	40,16	2,490	0,39625	40,01	2,499	0,39783	39,86	2,508	0,39942	39,72	2,517	0,40100	39,57	2,526	0,40259
2600	38,72	2,582	0,41210	38,58	2,592	0,41368	38,44	2,601	0,41527	38,30	2,611	0,41685	38,16	2,620	0,41844
2700	37,33	2,678	0,42795	37,19	2,688	0,42953	37,06	2,698	0,43112	36,92	2,708	0,43270	36,79	2,718	0,43429
2800	35,99	2,778	0,44380	35,86	2,788	0,44538	35,73	2,798	0,44697	35,60	2,809	0,44855	35,47	2,819	0,45014
2900	34,70	2,881	0,45965	34,58	2,892	0,46123	34,45	2,902	0,46282	34,32	2,913	0,46440	34,20	2,924	0,46599
3000	33,46	2,988	0,47550	33,34	2,999	0,47708	33,21	3,010	0,47867	33,09	3,021	0,48025	32,97	3,032	0,48184
3100	32,26	3,099	0,49135	32,14	3,111	0,49293	32,02	3,122	0,49452	31,91	3,134	0,49610	31,79	3,145	0,49769
3200	31,10	3,215	0,50720	30,99	3,226	0,50878	30,88	3,238	0,51037	30,76	3,250	0,51195	30,65	3,262	0,51354
3300	29,99	3,334	0,52305	29,88	3,346	0,52463	29,77	3,359	0,52622	29,66	3,371	0,52780	29,55	3,383	0,52939
3400	28,91	3,458	0,53890	28,81	3,471	0,54048	28,70	3,483	0,54207	28,60	3,496	0,54365	28,49	3,509	0,54524
3500	27,88	3,587	0,55475	27,78	3,600	0,55633	27,67	3,613	0,55792	27,57	3,626	0,55950	27,47	3,639	0,56109
3600	26,88	3,720	0,57060	26,78	3,734	0,57218	26,68	3,747	0,57377	26,59	3,761	0,57535	26,49	3,775	0,57694
3700	25,92	3,858	0,58645	25,82	3,872	0,58803	25,73	3,887	0,58962	25,63	3,901	0,59120	25,54	3,915	0,59279
3800	24,99	4,002	0,60230	24,90	4,016	0,60388	24,80	4,031	0,60547	24,71	4,046	0,60705	24,62	4,061	0,60864
3900	24,09	4,150	0,61815	24,00	4,166	0,61973	23,92	4,181	0,62132	23,83	4,196	0,62290	23,74	4,211	0,62449
4000	23,23	4,305	0,63400	23,14	4,320	0,63558	23,06	4,336	0,63717	22,97	4,352	0,63875	22,89	4,368	0,64034
4100	22,40	4,465	0,64985	22,31	4,481	0,65143	22,23	4,497	0,65302	22,15	4,514	0,65460	22,07	4,530	0,65619
4200	21,59	4,631	0,66570	21,51	4,648	0,66728	21,44	4,665	0,66887	21,36	4,682	0,67045	21,28	4,699	0,67204
4300	20,82	4,803	0,68155	20,74	4,820	0,68313	20,67	4,838	0,68472	20,59	4,856	0,68630	20,52	4,874	0,68789
4400	20,07	4,981	0,69740	20,00	5,000	0,69898	19,93	5,018	0,70057	19,85	5,036	0,70215	19,78	5,055	0,70374
4500	19,35	5,167	0,71325	19,28	5,185	0,71483	19,21	5,204	0,71642	19,14	5,223	0,71800	19,07	5,243	0,71959
4600	18,66	5,359	0,72910	18,59	5,378	0,73068	18,52	5,398	0,73227	18,46	5,418	0,73385	18,39	5,437	0,73544
4700	17,99	5,558	0,74495	17,93	5,578	0,74653	17,86	5,599	0,74812	17,80	5,619	0,74970	17,73	5,640	0,75129
4800	17,35	5,764	0,76080	17,28	5,786	0,76238	17,22	5,807	0,76397	17,16	5,828	0,76555	17,09	5,849	0,76714
4900	16,72	5,979	0,77665	16,66	6,001	0,77823	16,60	6,023	0,77982	16,54	6,045	0,78140	16,48	6,067	0,78299
5000	16,13	6,201	0,79250	16,07	6,224	0,79408	16,01	6,246	0,79567	15,95	6,269	0,79725	15,89	6,292	0,79884
5100	15,55	6,431	0,80835	15,49	6,455	0,80993	15,43	6,479	0,81152	15,38	6,502	0,81310	15,32	6,526	0,81468
5200	14,99	6,671	0,82419	14,94	6,695	0,82578	14,88	6,719	0,82736	14,83	6,744	0,82895	14,77	6,769	0,83053
5300	14,45	6,919	0,84004	14,40	6,944	0,84163	14,35	6,969	0,84321	14,30	6,995	0,84480	14,24	7,020	0,84638
5400	13,94	7,176	0,85589	13,88	7,202	0,85748	13,83	7,228	0,85906	13,78	7,255	0,86065	13,73	7,281	0,86223
5500	13,44	7,442	0,87174	13,39	7,470	0,87333	13,34	7,497	0,87491	13,29	7,524	0,87650	13,24	7,552	0,87808
5600	12,95	7,719	0,88759	12,91	7,747	0,88918	12,86	7,776	0,89076	12,81	7,804	0,89235	12,77	7,833	0,89393
5700	12,49	8,006	0,90344	12,44	8,035	0,90503	12,40	8,065	0,90661	12,35	8,094	0,90820	12,31	8,124	0,90978
5800	12,04	8,304	0,91929	12,00	8,334	0,92088	11,95	8,364	0,92246	11,91	8,395	0,92405	11,87	8,426	0,92563
5900	11,61	8,612	0,93514	11,57	8,644	0,93672	11,53	8,675	0,93831	11,48	8,707	0,93989	11,44	8,739	0,94148
6000	11,19	8,932	0,95099	11,15	8,965	0,95257	11,11	8,998	0,95416	11,07	9,031	0,95574	11,03	9,064	0,95733
6100	10,79	9,264	0,96684	10,75	9,298	0,96842	10,72	9,332	0,97001	10,68	9,366	0,97159	10,64	9,401	0,97318
6200	10,41	9,609	0,98269	10,37	9,644	0,98427	10,33	9,679	0,98586	10,29	9,714	0,98744	10,26	9,750	0,98903
6300	10,03	9,966	0,99853	10,00	10,003	1,00013	9,96	10,039	1,00172	9,92	10,076	1,00330	9,89	10,113	1,00489
6400	9,67	10,337	1,01440	9,64	10,374	1,01598	9,60	10,412	1,01757	9,57	10,450	1,01915	9,53	10,489	1,02074
6500	9,33	10,721	1,03025	9,29	10,760	1,03183	9,26	10,799	1,03342	9,23	10,839	1,03500	9,19	10,878	1,03659
6600	8,99	11,119	1,04610	8,96	11,160	1,04768	8,93	11,201	1,04927	8,90	11,242	1,05085	8,86	11,283	1,05244
6700	8,67	11,533	1,06195	8,64	11,575	1,06353	8,61	11,617	1,06512	8,58	11,660	1,06670	8,55	11,702	1,06829
6800	8,36	11,961	1,07780	8,33	12,005	1,07938	8,30	12,049	1,08097	8,27	12,093	1,08255	8,24	12,137	1,08414
6900	8,06	12,406	1,09365	8,03	12,451	1,09523	8,00	12,497	1,09682	7,97	12,542	1,09840	7,94	12,588	1,09999
7000	7,77	12,867	1,10950	7,74	12,914	1,11108	7,71	12,961	1,11267	7,69	13,009	1,11425	7,66	13,056	1,11584
7100	7,49	13,345	1,12535	7,47	13,394	1,12693	7,44	13,443	1,12852	7,41	13,492	1,13010	7,38	13,542	1,13169
7200	7,22	13,841	1,14120	7,20	13,892	1,14278	7,17	13,943	1,14437	7,15	13,994	1,14595	7,12	14,045	1,14754
7300	6,97	14,356	1,15705	6,94	14,408	1,15863	6,91	14,461	1,16022	6,89	14,514	1,16180	6,86	14,567	1,16339
7400	6,72	14,890	1,17290	6,69	14,944	1,17448	6,67	14,999	1,17607	6,64	15,053	1,17765	6,62	15,109	1,17924
7500	6,48	15,443	1,18875	6,45	15,499	1,19033	6,43	15,556	1,19192	6,40	15,613	1,19350	6,38	15,670	1,19509
7600	6,24	16,017	1,20460	6,22	16,076	1,20618	6,20	16,134	1,20777	6,18	16,193	1,20935	6,15	16,253	1,21094
7700	6,02	16,612	1,22045	6,00	16,673	1,22203	5,98	16,734	1,22362	5,95	16,795	1,22520	5,93	16,857	1,22679
7800	5,80	17,230	1,23630	5,78	17,293	1,23788	5,76	17,356	1,23947	5,74	17,420	1,24105	5,72	17,483	1,24264
7900	5,60	17,870	1,25215	5,58	17,936	1,25373	5,56	18,001	1,25532	5,53	18,067	1,25690	5,51	18,133	1,25849
8000	5,40	18,535	1,26800	5,38	18,602	1,26958	5,36	18,670	1,27117	5,34	18,739	1,27275	5,32	18,807	1,27434
8100	5,20	19,224	1,28385	5,18	19,294	1,28543	5,16	19,364	1,28702	5,15	19,435	1,28860	5,13	19,506	1,29019
8200	5,02	19,938	1,29970	5,00	20,011	1,30128	4,98	20,084	1,30287	4,96	20,158	1,30445	4,94	20,231	1,30604
8300	4,84	20,679	1,31555	4,82	20,755	1,31713	4,80	20,831	1,31872	4,78	20,907	1,32030	4,77	20,983	1,32189
8400	4,66	21,448	1,33140	4,65	21,526	1,33298	4,63	21,605	1,33457	4,61	21,684	1,33615	4,59	21,763	1,33774
8500	4,50	22,245	1,34725	4,48	22,326	1,34883	4,46	22,408	1,35042	4,45	22,490	1,35200	4,43	22,572	1,35359
8600	4,33	23,072	1,36310	4,32	23,156	1,36468	4,30	23,241	1,36627	4,29	23,326	1,36785	4,27	23,411	1,36944
8700	4,18	23,930	1,37895	4,16	24,017	1,38053	4,15	24,105	1,38212	4,13	24,193	1,38370	4,12	24,282	1,38529
8800	4,03	24,819	1,39480	4,01	24,910	1,39638	4,00	25,001	1,39797	3,99	25,092	1,39955	3,97	25,184	1,40114
8900	3,88	25,742	1,41065	3,87	25,836	1,41223	3,86	25,930	1,41381	3,84	26,025	1,41540	3,83	26,120	1,41699
9000	3,75	26,698	1,42650	3,73	26,796	1,42808	3,72	26,894	1,42967	3,70	26,992	1,43125	3,69	27,091	1,43284
9100	3,61	27,691	1,44235	3,60	27,792	1,44393	3,58	27,894	1,44551	3,57	27,996	1,44710	3,56	28,098	1,44868
9200	3,48	28,720	1,45820	3,47	28,825	1,45978	3,46	28,931	1,46137	3,44	29,036	1,46295	3,43	29,143	1,46454
9300	3,36	29,788	1,47405	3,34	29,897	1,47563	3,33	30,006	1,47721	3,32	30,116	1,47880	3,31	30,226	1,48039
9400	3,24	30,895	1,48990	3,22	31,008	1,49148	3,21	31,121	1,49307	3,20	31,235	1,49465	3,19	31,349	1,49623
9500	3,12	32,043	1,50574	3,11	32,160	1,50733	3,10	32,278	1,50891	3,09	32,396	1,51050	3,08	32,515	1,51208
9600	3,01	33,234	1,52159	3,00	33,356	1,52318	2,99	33,478	1,52477	2,98	33,600	1,52635	2,97	33,723	1,52793
9700	2,90	34,470	1,53745	2,89	34,596	1,53903	2,88	34,722	1,54061	2,87	34,849	1,54220	2,86	34,977	1,54378
9800	2,80	35,751	1,55329	2,79	35,882	1,55488	2,78	36,013	1,55646	2,77	36,145	1,55805	2,76	36,277	1,55963
9900	2,70	37,080	1,56914	2,69	37,215	1,57073	2,68	37,352	1,57231	2,67	37,488	1,57390	2,66	37,625	1,57548
10000	2,60	38,458	1,58499												

Halbwertzeit 5,2 a

d → / ↓	50			60			70			80			90		
	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
0	98,19	1,018	0,00793	97,83	1,022	0,00951	97,48	1,025	0,01110	97,12	1,029	0,01268	96,77	1,033	0,01427
100	94,67	1,056	0,02378	94,33	1,060	0,02536	93,98	1,064	0,02695	93,64	1,067	0,02853	93,30	1,071	0,03012
200	91,28	1,095	0,03963	90,95	1,099	0,04121	90,62	1,103	0,04280	90,29	1,107	0,04438	89,96	1,111	0,04597
300	88,01	1,136	0,05548	87,69	1,140	0,05706	87,37	1,144	0,05865	87,05	1,148	0,06023	86,73	1,152	0,06182
400	84,85	1,178	0,07133	84,55	1,182	0,07291	84,24	1,187	0,07450	83,93	1,191	0,07608	83,62	1,195	0,07767
500	81,81	1,222	0,08718	81,52	1,226	0,08876	81,22	1,231	0,09035	80,92	1,235	0,09193	80,63	1,240	0,09352
600	78,88	1,267	0,10303	78,59	1,272	0,10461	78,31	1,277	0,10620	78,02	1,281	0,10778	77,74	1,286	0,10937
700	76,05	1,314	0,11888	75,78	1,319	0,12046	75,50	1,324	0,12205	75,23	1,329	0,12363	74,95	1,334	0,12522
800	73,33	1,363	0,13472	73,06	1,368	0,13631	72,80	1,373	0,13789	72,53	1,378	0,13948	72,27	1,383	0,14106
900	70,70	1,414	0,15057	70,44	1,419	0,15216	70,19	1,424	0,15374	69,93	1,429	0,15533	69,68	1,435	0,15691
1000	68,17	1,466	0,16642	67,92	1,472	0,16801	67,67	1,477	0,16959	67,42	1,483	0,17118	67,18	1,488	0,17276
1100	65,72	1,521	0,18227	65,48	1,527	0,18386	65,25	1,532	0,18544	65,01	1,538	0,18703	64,77	1,543	0,18861
1200	63,37	1,578	0,19812	63,14	1,583	0,19971	62,91	1,589	0,20129	62,68	1,595	0,20288	62,45	1,601	0,20446
1300	61,10	1,636	0,21397	60,88	1,642	0,21556	60,65	1,648	0,21714	60,43	1,654	0,21873	60,21	1,660	0,22031
1400	58,91	1,697	0,22982	58,69	1,703	0,23141	58,48	1,709	0,23299	58,27	1,716	0,23458	58,05	1,722	0,23616
1500	56,80	1,760	0,24567	56,59	1,767	0,24726	56,38	1,773	0,24884	56,18	1,780	0,25043	55,97	1,786	0,25201
1600	54,76	1,826	0,26152	54,56	1,832	0,26311	54,36	1,839	0,26469	54,17	1,846	0,26628	53,97	1,852	0,26786
1700	52,80	1,893	0,27737	52,61	1,900	0,27896	52,42	1,907	0,28054	52,22	1,914	0,28213	52,03	1,921	0,28371
1800	50,91	1,964	0,29322	50,72	1,971	0,29481	50,54	1,978	0,29639	50,35	1,985	0,29798	50,17	1,993	0,29956
1900	49,08	2,037	0,30907	48,90	2,044	0,31066	48,73	2,052	0,31224	48,55	2,059	0,31383	48,37	2,067	0,31541
2000	47,32	2,113	0,32492	47,15	2,120	0,32651	46,98	2,128	0,32809	46,81	2,136	0,32968	46,64	2,144	0,33126
2100	45,63	2,191	0,34077	45,46	2,199	0,34236	45,30	2,207	0,34394	45,13	2,215	0,34553	44,97	2,223	0,34711
2200	43,99	2,273	0,35662	43,83	2,281	0,35821	43,67	2,289	0,35979	43,51	2,298	0,36138	43,35	2,306	0,36296
2300	42,42	2,357	0,37247	42,26	2,366	0,37406	42,11	2,374	0,37564	41,95	2,383	0,37723	41,80	2,392	0,37881
2400	40,90	2,445	0,38832	40,75	2,454	0,38991	40,60	2,463	0,39149	40,45	2,472	0,39308	40,30	2,481	0,39466
2500	39,43	2,536	0,40417	39,29	2,545	0,40576	39,14	2,554	0,40734	39,00	2,564	0,40893	38,86	2,573	0,41051
2600	38,02	2,630	0,42002	37,88	2,640	0,42161	37,74	2,649	0,42319	37,60	2,659	0,42478	37,47	2,669	0,42636
2700	36,65	2,728	0,43587	36,52	2,738	0,43746	36,39	2,748	0,43904	36,26	2,758	0,44063	36,12	2,768	0,44221
2800	35,34	2,829	0,45172	35,21	2,839	0,45331	35,08	2,850	0,45489	34,96	2,860	0,45648	34,83	2,871	0,45806
2900	34,07	2,934	0,46757	33,95	2,945	0,46916	33,83	2,956	0,47074	33,70	2,967	0,47233	33,58	2,977	0,47391
3000	32,85	3,043	0,48342	32,73	3,054	0,48501	32,61	3,066	0,48659	32,50	3,077	0,48818	32,38	3,088	0,48976
3100	31,68	3,156	0,49927	31,56	3,168	0,50086	31,45	3,180	0,50244	31,33	3,191	0,50403	31,22	3,203	0,50561
3200	30,54	3,274	0,51512	30,43	3,286	0,51671	30,32	3,298	0,51829	30,21	3,310	0,51988	30,10	3,322	0,52146
3300	29,45	3,396	0,53097	29,34	3,408	0,53256	29,23	3,420	0,53414	29,13	3,433	0,53573	29,02	3,445	0,53731
3400	28,39	3,522	0,54682	28,29	3,535	0,54841	28,18	3,548	0,54999	28,08	3,561	0,55158	27,98	3,574	0,55316
3500	27,37	3,653	0,56267	27,27	3,666	0,56426	27,17	3,679	0,56584	27,08	3,693	0,56743	26,98	3,706	0,56901
3600	26,39	3,788	0,57852	26,30	3,802	0,58011	26,20	3,816	0,58169	26,10	3,830	0,58328	26,01	3,844	0,58486
3700	25,45	3,929	0,59437	25,35	3,944	0,59596	25,26	3,958	0,59754	25,17	3,973	0,59913	25,08	3,987	0,60071
3800	24,53	4,075	0,61022	24,45	4,090	0,61181	24,36	4,105	0,61339	24,27	4,120	0,61498	24,18	4,135	0,61656
3900	23,66	4,227	0,62607	23,57	4,242	0,62766	23,48	4,258	0,62924	23,40	4,273	0,63083	23,31	4,289	0,63241
4000	22,81	4,384	0,64192	22,72	4,400	0,64351	22,64	4,416	0,64509	22,56	4,432	0,64668	22,48	4,448	0,64826
4100	21,99	4,547	0,65777	21,91	4,564	0,65936	21,83	4,580	0,66094	21,75	4,597	0,66253	21,67	4,614	0,66411
4200	21,20	4,716	0,67362	21,12	4,733	0,67521	21,05	4,751	0,67679	20,97	4,768	0,67838	20,89	4,785	0,67996
4300	20,44	4,891	0,68947	20,37	4,909	0,69106	20,29	4,927	0,69264	20,22	4,945	0,69423	20,15	4,963	0,69581
4400	19,71	5,073	0,70532	19,64	5,092	0,70691	19,57	5,110	0,70849	19,50	5,129	0,71008	19,42	5,148	0,71166
4500	19,00	5,262	0,72117	18,93	5,281	0,72276	18,87	5,300	0,72434	18,80	5,320	0,72593	18,73	5,339	0,72751
4600	18,32	5,457	0,73702	18,26	5,477	0,73861	18,19	5,497	0,74019	18,12	5,517	0,74178	18,06	5,538	0,74336
4700	17,67	5,660	0,75287	17,60	5,681	0,75446	17,54	5,702	0,75604	17,47	5,723	0,75763	17,41	5,743	0,75921
4800	17,03	5,871	0,76872	16,97	5,892	0,77031	16,91	5,914	0,77189	16,85	5,935	0,77348	16,79	5,957	0,77506
4900	16,42	6,089	0,78457	16,36	6,111	0,78616	16,30	6,133	0,78774	16,24	6,156	0,78933	16,18	6,178	0,79091
5000	15,83	6,315	0,80042	15,78	6,338	0,80201	15,72	6,361	0,80359	15,66	6,385	0,80518	15,60	6,408	0,80676
5100	15,27	6,550	0,81627	15,21	6,574	0,81785	15,16	6,598	0,81944	15,10	6,622	0,82102	15,04	6,646	0,82261
5200	14,72	6,793	0,83212	14,67	6,818	0,83370	14,61	6,843	0,83529	14,56	6,868	0,83687	14,51	6,893	0,83846
5300	14,19	7,046	0,84797	14,14	7,072	0,84955	14,09	7,098	0,85114	14,04	7,123	0,85272	13,99	7,150	0,85431
5400	13,68	7,308	0,86382	13,63	7,335	0,86540	13,58	7,361	0,86699	13,53	7,388	0,86857	13,48	7,415	0,87016
5500	13,19	7,579	0,87967	13,14	7,607	0,88125	13,10	7,635	0,88284	13,05	7,663	0,88442	13,00	7,691	0,88601
5600	12,72	7,861	0,89552	12,67	7,890	0,89710	12,63	7,919	0,89869	12,58	7,948	0,90027	12,54	7,977	0,90186
5700	12,26	8,153	0,91137	12,22	8,183	0,91295	12,17	8,213	0,91454	12,13	8,243	0,91612	12,09	8,273	0,91771
5800	11,82	8,456	0,92722	11,78	8,487	0,92880	11,74	8,518	0,93038	11,70	8,550	0,93197	11,65	8,581	0,93355
5900	11,40	8,771	0,94306	11,36	8,803	0,94465	11,32	8,835	0,94623	11,28	8,867	0,94782	11,24	8,900	0,94940
6000	10,99	9,097	0,95891	10,95	9,130	0,96050	10,91	9,163	0,96208	10,87	9,197	0,96367	10,83	9,231	0,96525
6100	10,60	9,435	0,97476	10,56	9,469	0,97635	10,52	9,504	0,97793	10,48	9,539	0,97952	10,44	9,574	0,98110
6200	10,22	9,786	0,99061	10,18	9,821	0,99220	10,14	9,857	0,99378	10,11	9,893	0,99537	10,07	9,930	0,99695
6300	9,85	10,150	1,00647	9,82	10,187	1,00806	9,78	10,224	1,00964	9,74	10,261	1,01123	9,71	10,299	1,01281
6400	9,50	10,527	1,02232	9,46	10,565	1,02391	9,43	10,604	1,02549	9,40	10,643	1,02708	9,36	10,682	1,02866
6500	9,16	10,918	1,03817	9,13	10,958	1,03976	9,09	10,998	1,04134	9,06	11,038	1,04293	9,03	11,079	1,04451
6600	8,83	11,324	1,05402	8,80	11,365	1,05561	8,77	11,407	1,05719	8,73	11,449	1,05878	8,70	11,491	1,06036
6700	8,51	11,745	1,06987	8,48	11,788	1,07146	8,45	11,831	1,07304	8,42	11,874	1,07463	8,39	11,918	1,07621
6800	8,21	12,182	1,08572	8,18	12,226	1,08731	8,15	12,271	1,08889	8,12	12,316	1,09048	8,09	12,361	1,09206
6900	7,91	12,634	1,10157	7,89	12,681	1,10316	7,86	12,727	1,10474	7,83	12,773	1,10633	7,80	12,820	1,10791
7000	7,63	13,104	1,11742	7,60	13,152	1,11901	7,58	13,200	1,12059	7,55	13,248	1,12218	7,52	13,297	1,12376
7100	7,36	13,591	1,13327	7,33	13,641	1,13486	7,30	13,691	1,13644	7,28	13,741	1,13803	7,25	13,791	1,13961
7200	7,09	14,096	1,14912	7,07	14,148	1,15071	7,04	14,200	1,15229	7,02	14,251	1,15388	6,99	14,304	1,15546
7300	6,84	14,620	1,16497	6,81	14,674	1,16656	6,79	14,727	1,16814	6,77	14,781	1,16973	6,74	14,835	1,17131
7400	6,59	15,164	1,18082	6,57	15,219	1,18241	6,55	15,275	1,18399	6,52	15,331	1,18558	6,50	15,387	1,18716
7500	6,36	15,727	1,19667	6,33	15,785	1,19826	6,31	15,843	1,19984	6,29	15,901	1,20143	6,27	15,959	1,20301
7600	6,13	16,312	1,21252	6,11	16,372	1,21411	6,09	16,431	1,21569	6,06	16,492	1,21728	6,04	16,552	1,21886
7700	5,91	16,918	1,22837	5,89	16,980	1,22996	5,87	17,042	1,23154	5,85	17,105	1,23313	5,82	17,167	1,23471
7800	5,70	17,547	1,24422	5,68	17,611	1,24581	5,66	17,676	1,24739	5,64	17,740	1,24898	5,62	17,805	1,25056
7900	5,49	18,199	1,26007	5,47	18,266	1,26166	5,45	18,333	1,26324	5,43	18,400	1,26483	5,41	18,467	1,26641
8000	5,30	18,876	1,27592	5,28	18,945	1,27751	5,26	19,014	1,27909	5,24	19,084	1,28068	5,22	19,154	1,28226
8100	5,11	19,578	1,29177	5,09	19,649	1,29336	5,07	19,721	1,29494	5,05	19,793	1,29653	5,03	19,865	1,29811
8200	4,92	20,305	1,30762	4,91	20,380	1,30921	4,89	20,454	1,31079	4,87	20,529	1,31238	4,85	20,604	1,31396
8300	4,75	21,060	1,32347	4,73	21,137	1,32506	4,71	21,214	1,32664	4,70	21,292	1,32823	4,68	21,370	1,32981
8400	4,58	21,843	1,33932	4,56	21,923	1,34091	4,54	22,003	1,34249	4,53	22,083	1,34408	4,51	22,164	1,34566
8500	4,41	22,655	1,35517	4,40	22,738	1,35676	4,38	22,821	1,35834	4,37	22,904	1,35993	4,35	22,988	1,36151
8600	4,26	23,497	1,37102	4,24	23,583	1,37260	4,22	23,669	1,37419	4,21	23,756	1,37578	4,19	23,842	1,37736
8700	4,10	24,370	1,38687	4,09	24,459	1,38846	4,07	24,549	1,39004	4,06	24,639	1,39163	4,04	24,729	1,39321
8800	3,96	25,276	1,40272	3,94	25,369	1,40430	3,93	25,461	1,40589	3,91	25,554	1,40748	3,90	25,648	1,40906
8900	3,81	26,216	1,41857	3,80	26,312	1,42016	3,79	26,408	1,42174	3,77	26,504	1,42333	3,76	26,601	1,42491
9000	3,68	27,190	1,43442	3,66	27,290	1,43600	3,65	27,389	1,43759	3,64	27,489	1,43917	3,62	27,590	1,44076
9100	3,55	28,201	1,45027	3,53	28,304	1,45185	3,52	28,407	1,45344	3,51	28,511	1,45502	3,49	28,616	1,45661
9200	3,42	29,249	1,46612	3,41	29,356	1,46770	3,39	29,463	1,46929	3,38	29,571	1,47087	3,37	29,679	1,47246
9300	3,30	30,336	1,48197	3,28	30,447	1,48355	3,27	30,558	1,48514	3,26	30,670	1,48672	3,25	30,782	1,48831
9400	3,18	31,464	1,49782	3,17	31,579	1,49940	3,16	31,694	1,50099	3,14	31,810	1,50257	3,13	31,927	1,50416
9500	3,06	32,633	1,51367	3,05	32,753	1,51526	3,04	32,873	1,51684	3,03	32,993	1,51842	3,02	33,113	1,52001
9600	2,95	33,846	1,52952	2,94	33,970	1,53110	2,93	34,094	1,53269	2,92	34,219	1,53427	2,91	34,344	1,53586
9700	2,85	35,104	1,54537	2,84	35,233	1,54695	2,83	35,362	1,54854	2,82	35,491	1,55012	2,81	35,621	1,55171
9800	2,75	36,409	1,56122	2,74	36,543	1,56281	2,73	36,676	1,56439	2,72	36,810	1,56597	2,71	36,945	1,56756
9900	2,65	37,763	1,57707	2,64	37,901	1,57866	2,63	38,039	1,58024	2,62	38,178	1,58182	2,61	38,318	1,58341

Halbwertzeit 30 a

d → ↓	0			100			200			300			400		
	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
0	100,00	1,000	0,00000	99,37	1,006	0,00275	98,74	1,012	0,00550	98,12	1,019	0,00824	97,50	1,025	0,01099
1000	93,87	1,065	0,02747	93,28	1,072	0,03022	92,69	1,078	0,03297	92,11	1,085	0,03572	91,52	1,092	0,03846
2000	88,12	1,134	0,05495	87,56	1,142	0,05769	87,01	1,149	0,06044	86,46	1,156	0,06319	85,91	1,163	0,06594
3000	82,71	1,208	0,08242	82,19	1,216	0,08517	81,67	1,224	0,08792	81,16	1,232	0,09066	80,65	1,239	0,09341
4000	77,64	1,287	0,10989	77,15	1,296	0,11264	76,67	1,304	0,11539	76,18	1,312	0,11814	75,70	1,320	0,12088
5000	72,88	1,372	0,13737	72,42	1,380	0,14011	71,97	1,389	0,14286	71,51	1,398	0,14561	71,06	1,407	0,14836
6000	68,42	1,461	0,16484	67,99	1,470	0,16759	67,56	1,480	0,17033	67,13	1,489	0,17308	66,71	1,499	0,17583
7000	64,22	1,557	0,19231	63,82	1,566	0,19506	63,42	1,576	0,19781	63,02	1,586	0,20056	62,62	1,596	0,20330
8000	60,29	1,658	0,21979	59,91	1,669	0,22253	59,53	1,679	0,22528	59,15	1,690	0,22803	58,78	1,701	0,23078
9000	56,59	1,767	0,24726	56,23	1,778	0,25001	55,88	1,789	0,25275	55,53	1,800	0,25550	55,18	1,812	0,25825
10000	53,12	1,882	0,27473	52,79	1,894	0,27748	52,45	1,906	0,28023	52,12	1,918	0,28298	51,79	1,930	0,28572
11000	49,86	2,005	0,30221	49,55	2,018	0,30495	49,24	2,030	0,30770	48,93	2,043	0,31045	48,62	2,056	0,31320
12000	46,81	2,136	0,32968	46,51	2,149	0,33243	46,22	2,163	0,33517	45,93	2,177	0,33792	45,64	2,191	0,34067
13000	43,94	2,275	0,35715	43,66	2,290	0,35990	43,39	2,304	0,36265	43,11	2,319	0,36539	42,84	2,334	0,36814
14000	41,25	2,424	0,38463	40,99	2,439	0,38737	40,73	2,455	0,39012	40,47	2,470	0,39287	40,21	2,486	0,39562
15000	38,72	2,582	0,41210	38,47	2,599	0,41485	38,23	2,615	0,41759	37,99	2,632	0,42034	37,75	2,649	0,42309
16000	36,34	2,751	0,43957	36,11	2,768	0,44232	35,89	2,786	0,44507	35,66	2,804	0,44781	35,44	2,822	0,45056
17000	34,12	2,931	0,46705	33,90	2,949	0,46979	33,69	2,968	0,47254	33,47	2,987	0,47529	33,26	3,006	0,47804
18000	32,02	3,122	0,49452	31,82	3,142	0,49727	31,62	3,162	0,50001	31,42	3,182	0,50276	31,22	3,202	0,50551
19000	30,06	3,326	0,52199	29,87	3,347	0,52474	29,68	3,368	0,52749	29,50	3,390	0,53023	29,31	3,411	0,53298
20000	28,22	3,543	0,54947	28,04	3,566	0,55221	27,86	3,588	0,55496	27,69	3,611	0,55771	27,51	3,634	0,56045
21000	26,49	3,775	0,57694	26,32	3,799	0,57969	26,16	3,823	0,58243	25,99	3,847	0,58518	25,83	3,871	0,58793
22000	24,87	4,021	0,60441	24,71	4,047	0,60716	24,55	4,072	0,60991	24,40	4,098	0,61265	24,24	4,124	0,61540
23000	23,34	4,284	0,63189	23,19	4,311	0,63463	23,05	4,338	0,63738	22,90	4,366	0,64013	22,76	4,394	0,64287
24000	21,91	4,564	0,65936	21,77	4,593	0,66211	21,63	4,622	0,66485	21,50	4,651	0,66760	21,36	4,681	0,67035
25000	20,57	4,862	0,68683	20,44	4,893	0,68958	20,31	4,924	0,69233	20,18	4,955	0,69507	20,05	4,986	0,69782
26000	19,31	5,179	0,71430	19,18	5,212	0,71705	19,06	5,245	0,71980	18,94	5,278	0,72255	18,82	5,312	0,72529
27000	18,12	5,517	0,74178	18,01	5,552	0,74452	17,89	5,588	0,74727	17,78	5,623	0,75002	17,67	5,659	0,75277
28000	17,01	5,878	0,76925	16,90	5,915	0,77200	16,80	5,953	0,77474	16,69	5,990	0,77749	16,59	6,028	0,78024
29000	15,97	6,262	0,79672	15,87	6,301	0,79947	15,77	6,341	0,80222	15,67	6,382	0,80496	15,57	6,422	0,80771
30000	14,99	6,671	0,82420	14,90	6,713	0,82694	14,80	6,755	0,82969	14,71	6,798	0,83244	14,62	6,842	0,83518
31000	14,07	7,106	0,85167	13,98	7,151	0,85442	13,89	7,197	0,85716	13,81	7,242	0,85991	13,72	7,288	0,86266
32000	13,21	7,570	0,87914	13,13	7,618	0,88189	13,04	7,667	0,88463	12,96	7,715	0,88738	12,88	7,764	0,89013
33000	12,40	8,065	0,90661	12,32	8,116	0,90936	12,24	8,167	0,91211	12,17	8,219	0,91485	12,09	8,271	0,91760
34000	11,64	8,591	0,93408	11,57	8,646	0,93683	11,49	8,701	0,93958	11,42	8,756	0,94233	11,35	8,811	0,94507
35000	10,93	9,152	0,96156	10,86	9,210	0,96430	10,79	9,269	0,96705	10,72	9,328	0,96980	10,65	9,387	0,97254
36000	10,26	9,750	0,98903	10,19	9,812	0,99177	10,13	9,874	0,99452	10,06	9,937	0,99727	10,00	10,000	1,00003
37000	9,63	10,387	1,01651	9,57	10,453	1,01926	9,51	10,519	1,02201	9,45	10,586	1,02475	9,39	10,653	1,02750
38000	9,04	11,065	1,04398	8,98	11,136	1,04673	8,92	11,206	1,04948	8,87	11,277	1,05223	8,81	11,349	1,05497
39000	8,48	11,788	1,07146	8,43	11,863	1,07420	8,38	11,938	1,07695	8,32	12,014	1,07970	8,27	12,090	1,08245
40000	7,96	12,558	1,09893	7,91	12,637	1,10168	7,86	12,718	1,10443	7,81	12,798	1,10717	7,76	12,880	1,10992
41000	7,47	13,378	1,12640	7,43	13,463	1,12915	7,38	13,548	1,13190	7,33	13,634	1,13465	7,29	13,721	1,13739
42000	7,02	14,252	1,15388	6,97	14,342	1,15662	6,93	14,433	1,15937	6,88	14,525	1,16212	6,84	14,617	1,16487
43000	6,59	15,182	1,18135	6,54	15,279	1,18410	6,50	15,376	1,18685	6,46	15,473	1,18959	6,42	15,571	1,19234
44000	6,18	16,174	1,20882	6,14	16,276	1,21157	6,10	16,380	1,21432	6,07	16,484	1,21707	6,03	16,588	1,21981
45000	5,80	17,230	1,23630	5,77	17,339	1,23904	5,73	17,449	1,24179	5,69	17,560	1,24454	5,66	17,671	1,24729
46000	5,45	18,355	1,26377	5,41	18,472	1,26652	5,38	18,589	1,26927	5,35	18,707	1,27201	5,31	18,826	1,27476
47000	5,11	19,554	1,29124	5,08	19,678	1,29399	5,05	19,803	1,29674	5,02	19,928	1,29949	4,99	20,055	1,30223
48000	4,80	20,831	1,31872	4,77	20,963	1,32146	4,74	21,096	1,32421	4,71	21,230	1,32696	4,68	21,365	1,32971
49000	4,51	22,191	1,34619	4,48	22,332	1,34894	4,45	22,474	1,35168	4,42	22,616	1,35443	4,39	22,760	1,35718
50000	4,23	23,640	1,37366	4,20	23,790	1,37641	4,18	23,941	1,37916	4,15	24,093	1,38191	4,12	24,246	1,38465
51000	3,97	25,184	1,40114	3,95	25,344	1,40388	3,92	25,505	1,40663	3,90	25,667	1,40938	3,87	25,830	1,41213
52000	3,73	26,829	1,42861	3,70	26,999	1,43136	3,68	27,170	1,43410	3,66	27,343	1,43685	3,63	27,516	1,43960
53000	3,50	28,581	1,45608	3,48	28,762	1,45883	3,45	28,945	1,46158	3,43	29,128	1,46433	3,41	29,313	1,46707
54000	3,28	30,447	1,48356	3,26	30,641	1,48630	3,24	30,835	1,48905	3,22	31,031	1,49180	3,20	31,228	1,49455
55000	3,08	32,436	1,51103	3,06	32,641	1,51378	3,04	32,849	1,51652	3,03	33,057	1,51927	3,01	33,267	1,52202
56000	2,89	34,554	1,53850	2,88	34,773	1,54125	2,86	34,994	1,54400	2,84	35,216	1,54674	2,82	35,439	1,54949
57000	2,72	36,810	1,56598	2,70	37,044	1,56872	2,68	37,279	1,57147	2,67	37,516	1,57422	2,65	37,754	1,57697
58000	2,55	39,214	1,59345	2,53	39,463	1,59620	2,52	39,713	1,59894	2,50	39,965	1,60169	2,49	40,219	1,60444
59000	2,39	41,775	1,62092	2,38	42,040	1,62367	2,36	42,307	1,62642	2,35	42,575	1,62916	2,33	42,846	1,63191
60000	2,25	44,503	1,64840	2,23	44,786	1,65114	2,22	45,070	1,65389	2,20	45,356	1,65664	2,19	45,643	1,65938
61000	2,11	47,409	1,67587	2,10	47,710	1,67862	2,08	48,013	1,68136	2,07	48,318	1,68411	2,06	48,624	1,68686
62000	1,98	50,505	1,70334	1,97	50,826	1,70609	1,96	51,148	1,70884	1,94	51,473	1,71158	1,93	51,800	1,71433
63000	1,86	53,803	1,73081	1,85	54,145	1,73356	1,84	54,489	1,73631	1,82	54,834	1,73906	1,81	55,182	1,74180
64000	1,74	57,317	1,75829	1,73	57,681	1,76103	1,72	58,047	1,76378	1,71	58,415	1,76653	1,70	58,786	1,76928
65000	1,64	61,060	1,78576	1,63	61,448	1,78851	1,62	61,837	1,79126	1,61	62,230	1,79400	1,60	62,625	1,79675
66000	1,54	65,047	1,81323	1,53	65,460	1,81598	1,52	65,876	1,81873	1,51	66,294	1,82148	1,50	66,714	1,82422
67000	1,44	69,295	1,84071	1,43	69,735	1,84345	1,42	70,177	1,84620	1,42	70,622	1,84895	1,41	71,071	1,85169
68000	1,35	73,820	1,86818	1,35	74,289	1,87093	1,34	74,760	1,87367	1,33	75,234	1,87642	1,32	75,712	1,87917
69000	1,27	78,641	1,89565	1,26	79,140	1,89840	1,26	79,642	1,90115	1,25	80,147	1,90389	1,24	80,656	1,90664
70000	1,19	83,776	1,92312	1,19	84,307	1,92587	1,18	84,842	1,92862	1,17	85,381	1,93136	1,16	85,923	1,93411
71000	1,12	89,246	1,95059	1,11	89,813	1,95334	1,11	90,383	1,95609	1,10	90,957	1,95884	1,09	91,534	1,96158
72000	1,05	95,074	1,97806	1,05	95,678	1,98081	1,04	96,285	1,98356	1,03	96,896	1,98631	1,03	97,510	1,98905
73000	0,99	101,285	2,00555	0,98	101,928	2,00830	0,97	102,575	2,01104	0,97	103,225	2,01379	0,96	103,880	2,01654
74000	0,93	107,900	2,03302	0,92	108,584	2,03577	0,92	109,274	2,03852	0,91	109,967	2,04126	0,90	110,664	2,04401
75000	0,87	114,946	2,06050	0,86	115,675	2,06324	0,86	116,409	2,06599	0,85	117,148	2,06874	0,85	117,891	2,07148
76000	0,82	122,452	2,08797	0,81	123,230	2,09072	0,81	124,011	2,09346	0,80	124,798	2,09621	0,80	125,590	2,09896
77000	0,77	130,449	2,11544	0,76	131,276	2,11819	0,76	132,109	2,12093	0,75	132,948	2,12368	0,75	133,791	2,12643
78000	0,72	138,968	2,14292	0,72	139,850	2,14566	0,71	140,738	2,14841	0,71	141,631	2,15116	0,70	142,529	2,15390
79000	0,68	148,042	2,17039	0,67	148,982	2,17314	0,67	149,927	2,17588	0,66	150,879	2,17863	0,66	151,837	2,18138
80000	0,63	157,711	2,19786	0,63	158,712	2,20061	0,63	159,718	2,20336	0,62	160,732	2,20611	0,62	161,752	2,20885
81000	0,60	168,010	2,22534	0,59	169,075	2,22808	0,59	170,149	2,23083	0,58	171,227	2,23357	0,58	172,315	2,23633
82000	0,56	178,980	2,25281	0,56	180,118	2,25556	0,55	181,261	2,25831	0,55	182,411	2,26105	0,54	183,567	2,26380
83000	0,52	190,668	2,28028	0,52	191,879	2,28303	0,52	193,098	2,28578	0,51	194,321	2,28852	0,51	195,556	2,29127
84000	0,49	203,119	2,30775	0,49	204,411	2,31051	0,49	205,706	2,31325	0,48	207,013	2,31600	0,48	208,324	2,31874
85000	0,46	216,384	2,33523	0,46	217,755	2,33797	0,46	219,139	2,34072	0,45	220,531	2,34347	0,45	221,931	2,34622
86000	0,43	230,515	2,36270	0,43	231,980	2,36545	0,43	233,448	2,36819	0,43	234,929	2,37094	0,42	236,423	2,37369
87000	0,41	245,567	2,39017	0,40	247,127	2,39292	0,40	248,694	2,39567	0,40	250,275	2,39842	0,40	251,863	2,40117
88000	0,38	261,602	2,41764	0,38	263,268	2,42040	0,38	264,935	2,42314	0,38	266,616	2,42589	0,37	268,312	2,42864
89000	0,36	278,691	2,44512	0,36	280,457	2,44787	0,35	282,238	2,45062	0,35	284,026	2,45336	0,35	285,828	2,45611
90000	0,34	296,885	2,47259	0,33	298,775	2,47534	0,33	300,670	2,47809	0,33	302,581	2,48084	0,33	304,497	2,48358
91000	0,32	316,275	2,50007	0,31	318,278	2,50281	0,31	320,307	2,50557	0,31	322,331	2,50830	0,31	324,380	2,51106
92000	0,30	336,927	2,52754	0,29	339,063	2,53028	0,29	341,215	2,53303	0,29	343,383	2,53578	0,29	345,566	2,53853
93000	0,28	358,937	2,55502	0,28	361,206	2,55776	0,28	363,504	2,56051	0,27	365,804	2,56325	0,27	368,134	2,56601
94000	0,26	382,365	2,58248	0,26	384,792	2,58523	0,26	387,236	2,58798	0,26	389,696	2,59073	0,25	392,172	2,59348
95000	0,25	407,348	2,60997	0,24	409,920	2,61270	0,24	412,524	2,61545	0,24	415,144	2,61820	0,24	417,780	2,62095
96000	0,23	433,933	2,63742	0,23	436,700	2,64018	0,23	439,463	2,64292	0,23	442,262	2,64568	0,22	445,057	2,64842
97000	0,22	462,278	2,66490	0,21	465,224	2,66766	0,21	468,164	2,67040	0,21	471,142	2,67315	0,21	474,135	2,67590
98000	0,20	492,465	2,69238	0,20	495,589	2,69512	0,20	498,728	2,69786	0,20	501,907	2,70062	0,20	505,101	2,70338
99000	0,19	524,631	2,71985	0,19	527,955	2,72260	0,19	531,321	2,72536	0,19	534,673	2,72809	0,19	538,068	2,73084
100000	0,18	558,877	2,74732												

Halbwertzeit 30 a

d → ↓	500			600			700			800			900		
	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$	N_t	N_0/N_t	$\log_{10} N_0/N_t$
0	96,89	1,032	0,01374	96,28	1,038	0,01648	95,67	1,045	0,01923	95,07	1,051	0,02198	94,47	1,058	0,02473
1000	90,95	1,099	0,04121	90,37	1,106	0,04396	89,80	1,113	0,04670	89,24	1,120	0,04945	88,67	1,127	0,05220
2000	85,37	1,171	0,06868	84,83	1,178	0,07143	84,30	1,186	0,07418	83,77	1,193	0,07693	83,24	1,201	0,07967
3000	80,14	1,247	0,09616	79,63	1,255	0,09890	79,13	1,263	0,10165	78,63	1,271	0,10440	78,14	1,279	0,10715
4000	75,23	1,329	0,12363	74,75	1,337	0,12638	74,28	1,346	0,12912	73,81	1,354	0,13187	73,35	1,363	0,13462
5000	70,62	1,416	0,15110	70,17	1,425	0,15385	69,73	1,434	0,15660	69,29	1,443	0,15935	68,85	1,452	0,16209
6000	66,29	1,508	0,17858	65,87	1,518	0,18132	65,45	1,527	0,18407	65,04	1,537	0,18682	64,63	1,547	0,18957
7000	62,22	1,607	0,20605	61,83	1,617	0,20880	61,44	1,627	0,21154	61,05	1,637	0,21429	60,67	1,648	0,21704
8000	58,41	1,712	0,23352	58,04	1,722	0,23627	57,67	1,733	0,23902	57,31	1,744	0,24177	56,95	1,755	0,24451
9000	54,83	1,823	0,26100	54,48	1,835	0,26374	54,14	1,847	0,26649	53,80	1,858	0,26924	53,46	1,870	0,27199
10000	51,47	1,942	0,28847	51,14	1,955	0,29122	50,82	1,967	0,29396	50,50	1,980	0,29671	50,18	1,992	0,29946
11000	48,31	2,069	0,31594	48,01	2,083	0,31869	47,70	2,096	0,32144	47,40	2,109	0,32419	47,11	2,122	0,32693
12000	45,35	2,205	0,34342	45,06	2,219	0,34616	44,78	2,233	0,34891	44,50	2,247	0,35166	44,22	2,261	0,35441
13000	42,57	2,349	0,37089	42,30	2,363	0,37364	42,04	2,378	0,37638	41,77	2,394	0,37913	41,51	2,409	0,38188
14000	39,96	2,502	0,39836	39,71	2,518	0,40111	39,46	2,534	0,40386	39,21	2,550	0,40660	38,96	2,566	0,40935
15000	37,51	2,665	0,42584	37,27	2,682	0,42858	37,04	2,699	0,43133	36,81	2,716	0,43408	36,57	2,734	0,43683
16000	35,21	2,839	0,45331	34,99	2,857	0,45606	34,77	2,876	0,45880	34,55	2,894	0,46155	34,33	2,912	0,46430
17000	33,05	3,025	0,48078	32,85	3,044	0,48353	32,64	3,063	0,48628	32,43	3,083	0,48902	32,23	3,102	0,49177
18000	31,03	3,222	0,50826	30,83	3,243	0,51100	30,64	3,263	0,51375	30,44	3,284	0,51650	30,25	3,305	0,51925
19000	29,13	3,433	0,53573	28,94	3,455	0,53848	28,76	3,477	0,54122	28,58	3,499	0,54397	28,40	3,521	0,54672
20000	27,34	3,657	0,56320	27,17	3,680	0,56595	27,00	3,704	0,56870	26,83	3,727	0,57144	26,66	3,751	0,57419
21000	25,66	3,896	0,59068	25,50	3,921	0,59342	25,34	3,946	0,59617	25,18	3,971	0,59892	25,02	3,996	0,60166
22000	24,09	4,150	0,61815	23,94	4,177	0,62090	23,79	4,203	0,62364	23,64	4,230	0,62639	23,49	4,257	0,62914
23000	22,61	4,422	0,64562	22,47	4,450	0,64837	22,33	4,478	0,65112	22,19	4,506	0,65386	22,05	4,535	0,65661
24000	21,23	4,710	0,67309	21,09	4,740	0,67584	20,96	4,770	0,67859	20,83	4,801	0,68134	20,70	4,831	0,68408
25000	19,93	5,018	0,70057	19,80	5,050	0,70332	19,68	5,082	0,70606	19,55	5,114	0,70881	19,43	5,147	0,71156
26000	18,71	5,346	0,72804	18,59	5,380	0,73079	18,47	5,414	0,73354	18,35	5,448	0,73628	18,24	5,483	0,73903
27000	17,56	5,695	0,75551	17,45	5,731	0,75826	17,34	5,767	0,76101	17,23	5,804	0,76376	17,12	5,841	0,76650
28000	16,48	6,067	0,78299	16,38	6,105	0,78573	16,27	6,144	0,78848	16,17	6,183	0,79123	16,07	6,222	0,79398
29000	15,47	6,463	0,81046	15,37	6,504	0,81321	15,28	6,545	0,81595	15,18	6,587	0,81870	15,09	6,628	0,82145
30000	14,52	6,885	0,83793	14,43	6,929	0,84068	14,34	6,973	0,84343	14,25	7,017	0,84617	14,16	7,061	0,84892
31000	13,63	7,335	0,86540	13,55	7,381	0,86815	13,46	7,428	0,87090	13,38	7,475	0,87365	13,29	7,523	0,87639
32000	12,80	7,814	0,89288	12,72	7,863	0,89562	12,64	7,913	0,89837	12,56	7,963	0,90112	12,48	8,014	0,90387
33000	12,01	8,324	0,92035	11,94	8,377	0,92310	11,86	8,430	0,92584	11,79	8,483	0,92859	11,71	8,537	0,93134
34000	11,28	8,867	0,94782	11,21	8,924	0,95057	11,13	8,980	0,95331	11,06	9,037	0,95606	10,99	9,095	0,95881
35000	10,59	9,446	0,97529	10,52	9,506	0,97804	10,45	9,567	0,98079	10,39	9,627	0,98353	10,32	9,689	0,98628
36000	9,94	10,064	1,00277	9,87	10,127	1,00552	9,81	10,192	1,00827	9,75	10,256	1,01102	9,69	10,321	1,01376
37000	9,33	10,721	1,03025	9,27	10,789	1,03300	9,21	10,857	1,03574	9,15	10,926	1,03849	9,09	10,996	1,04124
38000	8,76	11,421	1,05772	8,70	11,493	1,06047	8,65	11,566	1,06322	8,59	11,640	1,06596	8,54	11,714	1,06871
39000	8,22	12,167	1,08519	8,17	12,244	1,08794	8,12	12,322	1,09069	8,06	12,400	1,09344	8,01	12,479	1,09618
40000	7,71	12,961	1,11267	7,67	13,044	1,11541	7,62	13,126	1,11816	7,57	13,210	1,12091	7,52	13,294	1,12366
41000	7,24	13,808	1,14014	7,20	13,895	1,14289	7,15	13,984	1,14564	7,11	14,072	1,14838	7,06	14,162	1,15113
42000	6,80	14,710	1,16761	6,76	14,803	1,17036	6,71	14,897	1,17311	6,67	14,991	1,17586	6,63	15,087	1,17860
43000	6,38	15,670	1,19509	6,34	15,770	1,19783	6,30	15,870	1,20058	6,26	15,970	1,20333	6,22	16,072	1,20608
44000	5,99	16,693	1,22256	5,95	16,799	1,22531	5,91	16,906	1,22806	5,88	17,013	1,23080	5,84	17,121	1,23355
45000	5,62	17,784	1,25003	5,59	17,897	1,25278	5,55	18,010	1,25553	5,52	18,124	1,25828	5,48	18,239	1,26102
46000	5,28	18,945	1,27751	5,25	19,065	1,28025	5,21	19,186	1,28300	5,18	19,308	1,28575	5,15	19,431	1,28850
47000	4,95	20,182	1,30498	4,92	20,310	1,30773	4,89	20,439	1,31048	4,86	20,569	1,31322	4,83	20,699	1,31597
48000	4,65	21,500	1,33245	4,62	21,637	1,33520	4,59	21,774	1,33795	4,56	21,912	1,34070	4,53	22,051	1,34344
49000	4,37	22,904	1,35993	4,34	23,050	1,36267	4,31	23,196	1,36542	4,28	23,343	1,36817	4,26	23,491	1,37092
50000	4,10	24,400	1,38740	4,07	24,555	1,39015	4,05	24,711	1,39290	4,02	24,868	1,39564	4,00	25,025	1,39839
51000	3,85	25,994	1,41487	3,82	26,158	1,41762	3,80	26,324	1,42037	3,77	26,492	1,42312	3,75	26,660	1,42586
52000	3,61	27,691	1,44235	3,59	27,867	1,44509	3,57	28,044	1,44784	3,54	28,222	1,45059	3,52	28,401	1,45334
53000	3,39	29,499	1,46982	3,37	29,686	1,47257	3,35	29,875	1,47531	3,33	30,064	1,47806	3,31	30,255	1,48081
54000	3,18	31,426	1,49729	3,16	31,625	1,50004	3,14	31,826	1,50279	3,12	32,028	1,50554	3,10	32,231	1,50828
55000	2,99	33,478	1,52477	2,97	33,690	1,52751	2,95	33,904	1,53026	2,93	34,119	1,53301	2,91	34,336	1,53576
56000	2,80	35,664	1,55224	2,79	35,891	1,55499	2,77	36,118	1,55773	2,75	36,348	1,56048	2,73	36,578	1,56323
57000	2,63	37,993	1,57971	2,62	38,234	1,58246	2,60	38,477	1,58521	2,58	38,721	1,58796	2,57	38,967	1,59070
58000	2,47	40,474	1,60719	2,46	40,731	1,60993	2,44	40,990	1,61268	2,42	41,250	1,61543	2,41	41,512	1,61817
59000	2,32	43,117	1,63466	2,30	43,391	1,63741	2,29	43,666	1,64015	2,28	43,944	1,64290	2,26	44,222	1,64565
60000	2,18	45,933	1,66213	2,16	46,225	1,66488	2,15	46,518	1,66763	2,14	46,813	1,67037	2,12	47,110	1,67312
61000	2,04	48,933	1,68960	2,03	49,243	1,69235	2,02	49,556	1,69510	2,01	49,870	1,69785	1,99	50,187	1,70059
62000	1,92	52,128	1,71708	1,91	52,459	1,71983	1,89	52,792	1,72257	1,88	53,127	1,72532	1,87	53,464	1,72807
63000	1,80	55,533	1,74455	1,79	55,885	1,74730	1,78	56,240	1,75005	1,77	56,596	1,75279	1,76	56,956	1,75554
64000	1,69	59,159	1,77202	1,68	59,534	1,77477	1,67	59,912	1,77752	1,66	60,292	1,78027	1,65	60,675	1,78301
65000	1,59	63,022	1,79950	1,58	63,422	1,80224	1,57	63,825	1,80499	1,56	64,230	1,80774	1,55	64,637	1,81049
66000	1,49	67,137	1,82697	1,48	67,563	1,82972	1,47	67,992	1,83246	1,46	68,424	1,83521	1,45	68,858	1,83796
67000	1,40	71,522	1,85444	1,39	71,976	1,85719	1,38	72,432	1,85994	1,37	72,892	1,86268	1,36	73,355	1,86543
68000	1,31	76,192	1,88191	1,30	76,675	1,88466	1,30	77,162	1,88741	1,29	77,652	1,89016	1,28	78,145	1,89290
69000	1,23	81,168	1,90939	1,22	81,683	1,91213	1,22	82,201	1,91488	1,21	82,723	1,91763	1,20	83,248	1,92037
70000	1,16	86,468	1,93686	1,15	87,017	1,93960	1,14	87,569	1,94235	1,13	88,125	1,94510	1,13	88,683	1,94785
71000	1,09	92,114	1,96433	1,08	92,699	1,96708	1,07	93,287	1,96982	1,07	93,879	1,97257	1,06	94,475	1,97532
72000	1,02	98,129	1,99180	1,01	98,752	1,99455	1,01	99,378	1,99729	1,00	100,012	2,00005	0,99	100,647	2,00280
73000	0,96	104,540	2,01928	0,95	105,203	2,02203	0,94	105,871	2,02478	0,94	106,543	2,02753	0,93	107,219	2,03027
74000	0,90	111,367	2,04676	0,89	112,073	2,04950	0,89	112,785	2,05225	0,88	113,500	2,05500	0,88	114,221	2,05775
75000	0,84	118,639	2,07423	0,84	119,393	2,07698	0,83	120,150	2,07973	0,83	120,913	2,08247	0,82	121,679	2,08522
76000	0,79	126,387	2,10170	0,79	127,189	2,10445	0,78	127,996	2,10720	0,78	128,809	2,10995	0,77	129,626	2,11269
77000	0,74	134,640	2,12918	0,74	135,495	2,13193	0,73	136,354	2,13467	0,73	137,221	2,13742	0,72	138,091	2,14017
78000	0,70	143,432	2,15665	0,69	144,343	2,15940	0,69	145,260	2,16215	0,68	146,181	2,16489	0,68	147,108	2,16764
79000	0,65	152,800	2,18412	0,65	153,770	2,18687	0,65	154,746	2,18962	0,64	155,726	2,19236	0,64	156,715	2,19511
80000	0,61	162,778	2,21160	0,61	163,810	2,21434	0,61	164,850	2,21709	0,60	165,898	2,21984	0,60	166,950	2,22259
81000	0,58	173,409	2,23907	0,57	174,507	2,24182	0,57	175,617	2,24457	0,57	176,731	2,24731	0,56	177,853	2,25006
82000	0,54	184,733	2,26655	0,54	185,904	2,26929	0,53	187,083	2,27204	0,53	188,270	2,27478	0,53	189,465	2,27753
83000	0,51	196,796	2,29402	0,50	198,043	2,29676	0,50	199,302	2,29951	0,50	200,565	2,30226	0,50	201,840	2,30501
84000	0,48	209,648	2,32149	0,47	210,979	2,32424	0,47	212,318	2,32699	0,47	213,666	2,32974	0,47	215,021	2,33248
85000	0,45	223,338	2,34896	0,44	224,754	2,35171	0,44	226,182	2,35446	0,44	227,619	2,35721	0,44	229,063	2,35996
86000	0,42	237,925	2,37644	0,42	239,434	2,37919	0,42	240,952	2,38193	0,41	242,483	2,38468	0,41	244,021	2,38743
87000	0,39	253,459	2,40391	0,39	255,069	2,40666	0,39	256,686	2,40940	0,39	258,317	2,41215	0,38	259,956	2,41490
88000	0,37	270,014	2,43139	0,37	271,724	2,43413	0,37	273,448	2,43688	0,36	275,186	2,43963	0,36	276,931	2,44237
89000	0,35	287,645	2,45886	0,35	289,469	2,46160	0,34	291,307	2,46435	0,34	293,151	2,46709	0,34	295,020	2,46985
90000	0,33	306,428	2,48633	0,32	308,375	2,48908	0,32	310,327	2,49182	0,32	312,295	2,49457	0,32	314,277	2,49731
91000	0,31	326,434	2,51380	0,30	328,515	2,51656	0,30	330,600	2,51930	0,30	332,690	2,52204	0,30	334,806	2,52479
92000	0,29	347,753	2,54127	0,29	349,968	2,54403	0,28	352,187	2,54677	0,28	354,421	2,54952	0,28	356,671	2,55227
93000	0,27	370,466	2,56875	0,27	372,814	2,57149	0,27	375,178	2,57424	0,26	377,557	2,57698	0,26	379,953	2,57973
94000	0,25	394,664	2,59623	0,25	397,156	2,59896	0,25	399,680	2,60171	0,25	402,220	2,60446	0,25	404,776	2,60722
95000	0,24	420,433	2,62370	0,24	423,101	2,62644	0,23	425,785	2,62919	0,23	428,485	2,63194	0,23	431,201	2,63468
96000	0,22	447,888	2,65117	0,22	450,734	2,65392	0,22	453,597	2,65667	0,22	456,475	2,65942	0,22	459,368	2,66216
97000	0,21	477,144	2,67865	0,21	480,169	2,68139	0,21	483,208	2,68413	0,21	486,286	2,68689	0,20	489,356	2,68963
98000	0,20	508,285	2,70611	0,20	511,508	2,70885	0,19	514,774	2,71162	0,19	518,027	2,71435	0,19	521,322	2,71711
99000	0,18	541,477	2,73358	0,18	544,929	2,73634	0,18	548,395	2,73909	0,18	551,876	2,74184	0,18	555,370	2,74458

Die OACI-Standardwerte der Erdatmosphäre beruhen auf folgenden Festlegungen:

1. Das *Höhenmaß* ist der Geopotentialmeter m′. In MKS-Einheiten entspricht er 9,80665 $m^2 s^{-2}$. Eine Erhöhung um 1 Meter an einem Ort mit der Normfallbeschleunigung von 9,80665 $m s^{-2}$ entspricht 1 Geopotentialmeter. Da die Fallbeschleunigung sich im Höhenbereich der Tafel nur um wenige Hundertstel ändert, kann in der Praxis der Geopotentialmeter einem Meter gleichgesetzt werden. Nullpunkt der Höhenskala ist die Höhe des Meeres des internationalen Erdgeoids.

2. *Zusammensetzung der Erdatmosphäre.* Sie wird als trocken vorausgesetzt.

Gas		Mol.-Gew.*	Vol.%
Stickstoff	(N_2)	28,016	78,09
Sauerstoff	(O_2)	32,000	20,95
Argon	(Ar)	39,944	0,93
Kohlendioxyd	(CO_2)	44,010	0,03
Neon	(Ne)	20,183	$1{,}8 \times 10^{-3}$
Helium	(He)	4,003	$5{,}24 \times 10^{-4}$
Krypton	(Kr)	83,7	$1{,}0 \times 10^{-4}$
Wasserstoff	(H_2)	2,016	$5{,}0 \times 10^{-5}$
Xenon	(Xe)	131,3	$8{,}0 \times 10^{-6}$
Ozon	(O_3)	48,000	$1{,}0 \times 10^{-6}$
Radon	(Rn)	222	$6{,}0 \times 10^{-18}$

Daraus resultiert ein Molekulargewicht $M = 28{,}966$.

3. *Nullwerte in Meereshöhe*
Luftdruck $p_0 = 1{,}013250 \times 10^5$ N m^{-2} (= 760 Torr)
Temperatur $T_0 = 288{,}16°$ K (= $t_0 = 15°$ C)
Schallgeschwindigkeit $c_0 = 331{,}45$ m s^{-1}

4. *Konstanten*
Univers. Gaskonstante $R = 8{,}31436 \times 10^3$ J $kmol^{-1}$ $grad^{-1}$
Dynam. Viskosität bei 23° C $\mu = 1{,}8325 \times 10^{-5}$ m^{-1} kg s^{-1}
SUTHERLAND-Konstante $S = 120°$ K

5. *Abgeleitete Nullwerte in Meereshöhe*
Dichte $\rho_0 = \frac{p_0 M}{R T_0} = 1{,}2250$ m^{-3} kg (M in kg $kmol^{-1}$)
Dyn. Visk. $\mu_0 = \mu \left(\frac{T_0}{T_\mu}\right)^{3/2} \left(\frac{T_\mu + S}{T_0 + S}\right) = 1{,}7932 \times 10^{-5}$ m^{-1} kg s^{-1}
($T_\mu = [23 + 273{,}16]°$ K)

6. Berechnung der Höhengradienten vgl. Originalquelle.

Höhe	Temperatur	Luftdruck p (p_0 = Luftdruck in Meereshöhe)			Siedepunkt H_2O**	Dichte	Dyn. Viskosität	Schallgeschwindigkeit	Höhe
m′	°C	mb	Torr	p/p_0	°C	m^{-3} kg	m^{-1} kg s^{-1} ($\times 10^6$)	m s^{-1}	m′
−1000	21,500	1139,29	854,54	1,12439	103,32	1,3470	18,252	344,247	**−1000**
950	21,175	1132,70	849,60	1,11789	103,15	1,3407	18,236	344,057	950
900	20,850	1126,14	844,68	1,11142	102,99	1,3344	18,220	343,867	900
850	20,525	1119,62	839,78	1,10498	102,82	1,3282	18,204	343,677	850
800	20,200	1113,12	834,91	1,09856	102,65	1,3219	18,188	343,487	800
750	19,875	1106,65	830,06	1,09218	102,49	1,3157	18,172	343,297	750
700	19,550	1100,22	825,23	1,08583	102,32	1,3095	18,156	343,106	700
650	19,225	1093,81	820,43	1,07951	102,16	1,3033	18,140	342,915	650
600	18,900	1087,44	815,64	1,07322	101,99	1,2972	18,124	342,725	600
550	18,575	1081,09	810,89	1,06695	101,83	1,2910	18,108	342,534	550
500	18,250	1074,78	806,15	1,06072	101,66	1,2849	18,092	342,343	**500**
450	17,925	1068,49	801,43	1,05452	101,49	1,2788	18,076	342,152	450
400	17,600	1062,23	796,74	1,04834	101,33	1,2728	18,060	341,961	400
350	17,275	1056,01	792,07	1,04220	101,16	1,2667	18,044	341,770	350
300	16,950	1049,81	787,42	1,03608	101,00	1,2607	18,028	341,579	300
250	16,625	1043,65	782,80	1,03000	100,83	1,2547	18,012	341,387	250
200	16,300	1037,51	778,20	1,02394	100,67	1,2487	17,996	341,196	200
150	15,975	1031,40	773,61	1,01791	100,50	1,2428	17,980	341,004	150
100	15,650	1025,32	769,05	1,01191	100,33	1,2368	17,964	340,812	100
50	15,325	1019,27	764,52	1,00594	100,17	1,2309	17,948	340,621	50
0	15,000	1013,25	760,00	1,00000	100,00	1,2250	17,932	340,429	**0**
+ 50	14,675	1007,26	755,51	0,994086	99,84	1,2191	17,916	340,237	+ 50
100	14,350	1001,29	751,03	0,988201	99,67	1,2133	17,900	340,045	100
150	14,025	995,36	746,58	0,982343	99,50	1,2075	17,884	339,852	150
200	13,700	989,45	742,15	0,976514	99,34	1,2017	17,868	339,660	200
250	13,375	983,58	737,74	0,970713	99,17	1,1959	17,852	339,468	250
300	13,050	977,73	733,35	0,964940	99,01	1,1901	17,836	339,275	300
350	12,725	971,90	728,99	0,959195	98,84	1,1844	17,820	339,082	350
400	12,400	966,11	724,64	0,953477	98,67	1,1787	17,804	338,890	400
450	12,075	960,35	720,32	0,947787	98,51	1,1730	17,787	338,697	450
500	11,750	954,61	716,01	0,942125	98,34	1,1673	17,771	338,504	**500**
550	11,425	948,90	711,73	0,936490	98,17	1,1616	17,755	338,310	550
600	11,100	943,22	707,47	0,930882	98,01	1,1560	17,739	338,117	600
650	10,775	937,56	703,23	0,925302	97,84	1,1504	17,723	337,924	650
700	10,450	931,94	699,01	0,919748	97,67	1,1448	17,707	337,730	700
750	10,125	926,34	694,81	0,914222	97,51	1,1392	17,690	337,537	750
800	9,800	920,76	690,63	0,908723	97,34	1,1337	17,674	337,343	800
850	9,475	915,22	686,47	0,903250	97,18	1,1281	17,658	337,149	850
900	9,150	909,70	682,33	0,897804	97,01	1,1226	17,642	336,956	900
950	8,825	904,21	678,21	0,892385	96,84	1,1171	17,626	336,761	950
1000	8,500	898,74	674,11	0,886992	96,68	1,1117	17,609	336,567	**1000**
1050	8,175	893,31	670,04	0,881626	96,51	1,1062	17,593	336,373	1050
1100	7,850	887,90	665,98	0,876286	96,34	1,1008	17,577	336,179	1100
1150	7,525	882,51	661,94	0,870972	96,18	1,0954	17,561	335,984	1150
1200	7,200	877,15	657,92	0,865685	96,01	1,0900	17,544	335,790	1200
1250	6,875	871,82	653,92	0,860423	95,84	1,0846	17,528	335,595	1250
1300	6,550	866,52	649,94	0,855187	95,68	1,0793	17,512	335,400	1300
1350	6,225	861,24	645,98	0,849977	95,51	1,0739	17,496	335,205	1350
1400	5,900	855,99	642,04	0,844793	95,34	1,0686	17,479	335,010	1400
1450	5,575	850,76	638,12	0,839635	95,18	1,0633	17,463	334,815	1450
1500	5,250	845,56	634,22	0,834502	95,01	1,0581	17,447	334,620	**1500**
1550	4,925	840,38	630,34	0,829394	94,85	1,0528	17,430	334,425	1550
1600	4,600	835,23	626,48	0,824312	94,68	1,0476	17,414	334,229	1600
1650	4,275	830,11	622,63	0,819255	94,51	1,0424	17,398	334,034	1650
1700	3,950	825,01	618,81	0,814223	94,34	1,0372	17,381	333,838	1700
1750	3,625	819,94	615,00	0,809217	94,18	1,0320	17,365	333,642	1750
1800	3,300	814,89	611,22	0,804235	94,01	1,0269	17,349	333,446	1800
1850	2,975	809,87	607,45	0,799278	93,85	1,0218	17,332	333,250	1850
1900	2,650	804,87	603,70	0,794346	93,68	1,0167	17,316	333,054	1900
1950	2,325	799,90	599,97	0,789438	93,51	1,0116	17,299	332,858	1950
2000	2,000	794,95	596,26	0,784555	93,34	1,0065	17,283	332,661	**2000**
2050	1,675	790,03	592,57	0,779697	93,18	1,0015	17,267	332,465	2050
2100	1,350	785,13	588,90	0,774863	93,01	0,99642	17,250	332,268	2100
2150	1,025	780,26	585,24	0,770053	92,84	0,99141	17,234	332,071	2150
2200	0,700	775,41	581,60	0,765268	92,68	0,98642	17,217	331,874	2200
2250	0,375	770,58	577,98	0,760506	92,51	0,98145	17,201	331,677	2250
2300	0,050	765,78	574,38	0,755769	92,34	0,97649	17,184	331,480	2300
2350	− 0,275	761,01	570,80	0,751056	92,18	0,97156	17,168	331,283	2350
2400	− 0,600	756,26	567,24	0,746366	92,01	0,96664	17,151	331,086	2400
2450	− 0,925	751,53	563,69	0,741700	91,84	0,96175	17,135	330,888	2450
2500	− 1,250	746,82	560,16	0,737058	91,68	0,95687	17,119	330,691	**2500**
2550	− 1,575	742,14	556,65	0,732439	91,51	0,95201	17,102	330,493	2550
2600	− 1,900	737,49	553,16	0,727844	91,34	0,94717	17,086	330,295	2600
2650	− 2,225	732,86	549,69	0,723272	91,17	0,94235	17,069	330,097	2650
2700	− 2,550	728,25	546,23	0,718723	91,01	0,93755	17,052	329,899	2700
2750	− 2,875	723,66	542,79	0,714198	90,84	0,93277	17,036	329,701	2750
2800	− 3,200	719,10	539,37	0,709696	90,67	0,92800	17,019	329,503	2800
2850	− 3,525	714,56	535,96	0,705216	90,50	0,92326	17,003	329,304	2850
2900	− 3,850	710,05	532,58	0,700760	90,34	0,91853	16,986	329,106	2900
2950	− 4,175	705,55	529,21	0,696327	90,17	0,91382	16,970	328,907	2950

1) Nach dem *Manuel de l'atmosphère type OACI*, Montreal (1954). Wiedergabe mit freundlicher Erlaubnis der Organisation de l'Aviation civile internationale, Montreal, Kanada. * Internationale Atomgewichte 1947. ** Durch den Herausgeber aus der Tafel auf S. 260 interpoliert.

Höhe	Temperatur	Luftdruck p (p_0 = Luftdruck in Meereshöhe)			Siedepunkt H_2O	Dichte	Dyn. Viskosität	Schall-geschwindigkeit	Höhe
m′	°C	mb	Torr	p/p_0	°C	m^{-3} kg	m^{-1} kg s^{-1} ($\times 10^6$)	m s^{-1}	m′
3000	- 4,500	701,08	525,86	0,691916	90,00	0,90913	16,953	328,709	**3000**
3050	- 4,825	696,64	522,52	0,687528	89,84	0,90446	16,937	328,510	3050
3100	- 5,150	692,21	519,20	0,683162	89,67	0,89981	16,920	328,311	3100
3150	- 5,475	687,81	515,90	0,678819	89,50	0,89517	16,903	328,112	3150
3200	- 5,800	683,44	512,62	0,674498	89,33	0,89055	16,887	327,912	3200
3250	- 6,125	679,08	509,35	0,670200	89,17	0,88596	16,870	327,713	3250
3300	- 6,450	674,75	506,10	0,665924	89,00	0,88138	16,853	327,513	3300
3350	- 6,775	670,44	502,87	0,661670	88,83	0,87681	16,837	327,314	3350
3400	- 7,100	666,15	499,65	0,657438	88,66	0,87227	16,820	327,114	3400
3450	- 7,425	661,88	496,45	0,653227	88,50	0,86774	16,803	326,914	3450
3500	- 7,750	657,64	493,27	0,649039	88,33	0,86324	16,787	326,714	**3500**
3550	- 8,075	653,42	490,10	0,644873	88,16	0,85875	16,770	326,514	3550
3600	- 8,400	649,22	486,95	0,640728	87,99	0,85427	16,753	326,314	3600
3650	- 8,725	645,04	483,82	0,636605	87,83	0,84982	16,737	326,114	3650
3700	- 9,050	640,88	480,70	0,632503	87,66	0,84538	16,720	325,913	3700
3750	- 9,375	636,75	477,60	0,628423	87,49	0,84097	16,703	325,713	3750
3800	- 9,700	632,64	474,52	0,624364	87,32	0,83656	16,687	325,512	3800
3850	- 10,025	628,55	471,45	0,620326	87,15	0,83218	16,670	325,311	3850
3900	- 10,350	624,48	468,40	0,616310	86,99	0,82782	16,653	325,110	3900
3950	- 10,675	620,43	465,36	0,612314	86,82	0,82347	16,636	324,909	3950
4000	- 11,000	616,40	462,34	0,608340	86,65	0,81914	16,620	324,708	**4000**
4050	- 11,325	612,39	459,33	0,604386	86,48	0,81482	16,603	324,506	4050
4100	- 11,650	608,41	456,34	0,600454	86,31	0,81053	16,586	324,305	4100
4150	- 11,975	604,45	453,37	0,596542	86,15	0,80625	16,569	324,103	4150
4200	- 12,300	600,50	450,41	0,592651	85,98	0,80199	16,552	323,902	4200
4250	- 12,625	596,58	447,47	0,588780	85,81	0,79774	16,536	323,700	4250
4300	- 12,950	592,68	444,55	0,584930	85,64	0,79352	16,519	323,498	4300
4350	- 13,275	588,80	441,64	0,581100	85,48	0,78931	16,502	323,296	4350
4400	- 13,600	584,94	438,74	0,577291	85,31	0,78511	16,485	323,094	4400
4450	- 13,925	581,10	435,86	0,573501	85,14	0,78094	16,468	322,891	4450
4500	- 14,250	577,28	433,00	0,569732	84,97	0,77678	16,451	322,689	**4500**
4550	- 14,575	573,48	430,15	0,565983	84,80	0,77264	16,434	322,486	4550
4600	- 14,900	569,70	427,31	0,562254	84,63	0,76851	16,418	322,283	4600
4650	- 15,225	565,95	424,49	0,558545	84,47	0,76441	16,401	322,081	4650
4700	- 15,550	562,21	421,69	0,554856	84,30	0,76032	16,384	321,878	4700
4750	- 15,875	558,49	418,90	0,551187	84,13	0,75624	16,367	321,675	4750
4800	- 16,200	554,79	416,13	0,547537	83,96	0,75218	16,350	321,471	4800
4850	- 16,525	551,11	413,37	0,543907	83,79	0,74814	16,333	321,268	4850
4900	- 16,850	547,46	410,63	0,540296	83,63	0,74412	16,316	321,064	4900
4950	- 17,175	543,82	407,90	0,536705	83,46	0,74011	16,299	320,861	4950
5000	- 17,500	540,20	405,18	0,533133	83,29	0,73612	16,282	320,657	**5000**
5050	- 17,825	536,60	402,48	0,529581	83,12	0,73215	16,265	320,453	5050
5100	- 18,150	533,02	399,80	0,526047	82,95	0,72819	16,248	320,249	5100
5150	- 18,475	529,46	397,13	0,522533	82,78	0,72425	16,231	320,045	5150
5200	- 18,800	525,91	394,47	0,519038	82,61	0,72032	16,214	319,841	5200
5250	- 19,125	522,39	391,83	0,515561	82,45	0,71641	16,197	319,636	5250
5300	- 19,450	518,89	389,20	0,512104	82,28	0,71252	16,180	319,432	5300
5350	- 19,775	515,41	386,59	0,508665	82,11	0,70864	16,163	319,227	5350
5400	- 20,100	511,94	383,99	0,505245	81,94	0,70478	16,146	319,022	5400
5450	- 20,425	508,49	381,40	0,501844	81,77	0,70094	16,129	318,817	5450
5500	- 20,750	505,07	378,83	0,498461	81,60	0,69711	16,112	318,612	**5500**
5550	- 21,075	501,66	376,27	0,495097	81,43	0,69330	16,095	318,407	5550
5600	- 21,400	498,27	373,73	0,491751	81,26	0,68950	16,078	318,202	5600
5650	- 21,725	494,90	371,20	0,488424	81,09	0,68572	16,061	317,996	5650
5700	- 22,050	491,54	368,69	0,485115	80,93	0,68196	16,044	317,791	5700
5750	- 22,375	488,21	366,19	0,481824	80,76	0,67821	16,027	317,585	5750
5800	- 22,700	484,89	363,70	0,478551	80,59	0,67448	16,010	317,379	5800
5850	- 23,025	481,59	361,22	0,475296	80,42	0,67076	15,992	317,173	5850
5900	- 23,350	478,31	358,76	0,472059	80,25	0,66706	15,975	316,967	5900
5950	- 23,675	475,05	356,32	0,468840	80,08	0,66337	15,958	316,761	5950
6000	- 24,000	471,81	353,89	0,465639	79,91	0,65970	15,941	316,555	**6000**
6050	- 24,325	468,58	351,47	0,462455	79,74	0,65605	15,924	316,348	6050
6100	- 24,650	465,37	349,06	0,459289	79,57	0,65241	15,907	316,141	6100
6150	- 24,975	462,18	346,67	0,456141	79,41	0,64878	15,890	315,935	6150
6200	- 25,300	459,01	344,29	0,453010	79,23	0,64517	15,872	315,728	6200
6250	- 25,625	455,86	341,92	0,449897	79,07	0,64158	15,855	315,521	6250
6300	- 25,950	452,72	339,57	0,446801	78,90	0,63800	15,838	315,313	6300
6350	- 26,275	449,60	337,23	0,443722	78,73	0,63444	15,821	315,106	6350
6400	- 26,600	446,50	334,90	0,440660	78,56	0,63090	15,804	314,899	6400
6450	- 26,925	443,41	332,59	0,437616	78,39	0,62736	15,786	314,691	6450
6500	- 27,250	440,35	330,29	0,434588	78,22	0,62385	15,769	314,483	**6500**
6550	- 27,575	437,30	328,00	0,431578	78,05	0,62035	15,752	314,275	6550
6600	- 27,900	434,26	325,72	0,428584	77,88	0,61686	15,734	314,067	6600
6650	- 28,225	431,25	323,46	0,425608	77,71	0,61339	15,717	313,859	6650
6700	- 28,550	428,25	321,21	0,422648	77,54	0,60993	15,700	313,651	6700
6750	- 28,875	425,27	318,98	0,419705	77,37	0,60649	15,683	313,442	6750
6800	- 29,200	422,30	316,75	0,416778	77,20	0,60306	15,665	313,234	6800
6850	- 29,525	419,35	314,54	0,413868	77,03	0,59965	15,648	313,025	6850
6900	- 29,850	416,42	312,34	0,410974	76,86	0,59625	15,631	312,816	6900
6950	- 30,175	413,50	310,15	0,408097	76,69	0,59287	15,613	312,607	6950
7000	- 30,500	410,61	307,98	0,405236	76,52	0,58950	15,596	312,398	**7000**
7050	- 30,825	407,72	305,82	0,402392	76,35	0,58615	15,579	312,189	7050
7100	- 31,150	404,86	303,67	0,399563	76,18	0,58281	15,561	311,980	7100
7150	- 31,475	402,01	301,53	0,396751	76,01	0,57949	15,544	311,770	7150
7200	- 31,800	399,17	299,41	0,393955	75,84	0,57618	15,526	311,560	7200
7250	- 32,125	396,36	297,29	0,391175	75,67	0,57288	15,509	311,350	7250
7300	- 32,450	393,56	295,19	0,388410	75,50	0,56960	15,492	311,140	7300
7350	- 32,775	390,77	293,10	0,385662	75,33	0,56634	15,474	310,930	7350
7400	- 33,100	388,00	291,03	0,382929	75,16	0,56309	15,457	310,720	7400
7450	- 33,425	385,25	288,96	0,380212	74,99	0,55985	15,439	310,510	7450
7500	- 33,750	382,51	286,91	0,377511	74,82	0,55663	15,422	310,299	**7500**
7550	- 34,075	379,79	284,87	0,374825	74,65	0,55342	15,404	310,088	7550
7600	- 34,400	377,09	282,84	0,372154	74,48	0,55022	15,387	309,878	7600
7650	- 34,725	374,40	280,82	0,369499	74,31	0,54704	15,369	309,667	7650
7700	- 35,050	371,72	278,81	0,366860	74,14	0,54387	15,352	309,456	7700
7750	- 35,375	369,06	276,82	0,364236	73,97	0,54072	15,334	309,244	7750
7800	- 35,700	366,42	274,84	0,361627	73,80	0,53758	15,317	309,033	7800
7850	- 36,025	363,79	272,86	0,359033	73,63	0,53446	15,299	308,821	7850
7900	- 36,350	361,18	270,90	0,356454	73,46	0,53135	15,282	308,610	7900
7950	- 36,675	358,58	268,96	0,353890	73,29	0,52825	15,264	308,398	7950

Höhe	Temperatur	Luftdruck p (p_0 = Luftdruck in Meereshöhe)			Siedepunkt H_2O	Dichte	Dyn. Viskosität	Schall-geschwindigkeit	Höhe
m′	°C	mb	Torr	p/p_0	°C	m^{-3} kg	m^{-1} kg s^{-1} ($\times 10^6$)	m s^{-1}	m′
8000	− 37,000	356,00	267,02	0,351341	73,12	0,52517	15,247	308,186	**8000**
8050	− 37,325	353,43	265,09	0,348807	72,95	0,52210	15,229	307,974	8050
8100	− 37,650	350,88	263,18	0,346288	72,78	0,51904	15,212	307,761	8100
8150	− 37,975	348,34	261,28	0,343784	72,61	0,51600	15,194	307,549	8150
8200	− 38,300	345,82	259,38	0,341294	72,43	0,51297	15,176	307,336	8200
8250	− 38,625	343,31	257,50	0,338819	72,26	0,50996	15,159	307,124	8250
8300	− 38,950	340,82	255,63	0,336359	72,09	0,50696	15,141	306,911	8300
8350	− 39,275	338,34	253,77	0,333913	71,92	0,50397	15,124	306,698	8350
8400	− 39,600	335,87	251,93	0,331481	71,75	0,50100	15,106	306,485	8400
8450	− 39,925	333,42	250,09	0,329064	71,58	0,49804	15,088	306,271	8450
8500	− 40,250	330,99	248,26	0,326661	71,41	0,49509	15,071	306,058	**8500**
8550	− 40,575	328,57	246,45	0,324272	71,24	0,49216	15,053	305,844	8550
8600	− 40,900	326,16	244,64	0,321897	71,07	0,48924	15,035	305,630	8600
8650	− 41,225	323,77	242,85	0,319537	70,90	0,48633	15,018	305,417	8650
8700	− 41,550	321,39	241,06	0,317191	70,72	0,48344	15,000	305,203	8700
8750	− 41,875	319,03	239,29	0,314858	70,55	0,48056	14,982	304,988	8750
8800	− 42,200	316,68	237,53	0,312540	70,38	0,47769	14,965	304,774	8800
8850	− 42,525	314,35	235,78	0,310235	70,21	0,47483	14,947	304,559	8850
8900	− 42,850	312,02	234,04	0,307944	70,04	0,47199	14,929	304,345	8900
8950	− 43,175	309,72	232,31	0,305667	69,87	0,46916	14,911	304,130	8950
9000	− 43,500	307,42	230,59	0,303403	69,69	0,46635	14,893	303,915	**9000**
9050	− 43,825	305,14	228,88	0,301153	69,52	0,46355	14,876	303,700	9050
9100	− 44,150	302,88	227,18	0,298917	69,35	0,46076	14,858	303,485	9100
9150	− 44,475	300,62	225,49	0,296694	69,18	0,45798	14,840	303,269	9150
9200	− 44,800	298,39	223,81	0,294484	69,01	0,45522	14,822	303,054	9200
9250	− 45,125	296,16	222,14	0,292288	68,84	0,45247	14,805	302,838	9250
9300	− 45,450	293,95	220,48	0,290105	68,66	0,44973	14,787	302,622	9300
9350	− 45,775	291,75	218,83	0,287935	68,49	0,44700	14,769	302,406	9350
9400	− 46,100	289,57	217,19	0,285779	68,32	0,44429	14,751	302,190	9400
9450	− 46,425	287,39	215,56	0,283635	68,15	0,44159	14,733	301,973	9450
9500	− 46,750	285,23	213,94	0,281505	67,98	0,43890	14,715	301,757	**9500**
9550	− 47,075	283,09	212,33	0,279388	67,80	0,43623	14,697	301,540	9550
9600	− 47,400	280,96	210,74	0,277283	67,63	0,43356	14,679	301,323	9600
9650	− 47,725	278,84	209,15	0,275191	67,46	0,43091	14,662	301,106	9650
9700	− 48,050	276,73	207,57	0,273113	67,29	0,42828	14,644	300,889	9700
9750	− 48,375	274,64	206,00	0,271046	67,12	0,42565	14,626	300,672	9750
9800	− 48,700	272,56	204,43	0,268993	66,94	0,42304	14,608	300,455	9800
9850	− 49,025	270,49	202,88	0,266952	66,77	0,42044	14,590	300,237	9850
9900	− 49,350	268,43	201,34	0,264924	66,60	0,41785	14,572	300,019	9900
9950	− 49,675	266,39	199,81	0,262908	66,43	0,41527	14,554	299,801	9950
10000	− 50,000	264,36	198,29	0,260905	66,25	0,41271	14,536	299,583	**10000**
10050	− 50,325	262,34	196,77	0,258914	66,08	0,41015	14,518	299,365	10050
10100	− 50,650	260,34	195,27	0,256934	65,91	0,40761	14,500	299,147	10100
10150	− 50,975	258,35	193,78	0,254969	65,74	0,40509	14,482	298,928	10150
10200	− 51,300	256,37	192,29	0,253014	65,56	0,40257	14,464	298,709	10200
10250	− 51,625	254,40	190,81	0,251072	65,39	0,40007	14,446	298,491	10250
10300	− 51,950	252,44	189,35	0,249142	65,22	0,39757	14,428	298,272	10300
10350	− 52,275	250,50	187,89	0,247224	65,04	0,39509	14,410	298,052	10350
10400	− 52,600	248,57	186,44	0,245318	64,87	0,39263	14,392	297,833	10400
10450	− 52,925	246,65	185,00	0,243424	64,70	0,39017	14,374	297,614	10450
10500	− 53,250	244,74	183,57	0,241542	64,53	0,38773	14,355	297,394	**10500**
10550	− 53,575	242,85	182,15	0,239672	64,35	0,38529	14,337	297,174	10550
10600	− 53,900	240,96	180,74	0,237813	64,18	0,38287	14,319	296,954	10600
10650	− 54,225	239,09	179,33	0,235966	64,01	0,38046	14,301	296,734	10650
10700	− 54,550	237,23	177,94	0,234131	63,83	0,37806	14,283	296,513	10700
10750	− 54,875	235,39	176,55	0,232307	63,66	0,37568	14,265	296,293	10750
10800	− 55,200	233,55	175,18	0,230495	63,49	0,37330	14,247	296,072	10800
10850	− 55,525	231,72	173,81	0,228694	63,31	0,37094	14,229	295,852	10850
10900	− 55,850	229,91	172,45	0,226905	63,14	0,36859	14,210	295,631	10900
10950	− 56,175	228,11	171,10	0,225127	62,97	0,36625	14,192	295,409	10950
11000	− 56,500	226,32	169,75	0,223360	62,79	0,36392	14,174	295,188	**11000**
11100	− 56,500	222,78	167,10	0,219866	62,45	0,35822	14,174	295,188	11100
11200	− 56,500	219,29	164,48	0,216426	62,10	0,35262	14,174	295,188	11200
11300	− 56,500	215,86	161,91	0,213040	61,75	0,34710	14,174	295,188	11300
11400	− 56,500	212,49	159,38	0,209707	61,41	0,34167	14,174	295,188	11400
11500	− 56,500	209,16	156,88	0,206426	61,07	0,33633	14,174	295,188	11500
11600	− 56,500	205,89	154,43	0,203196	60,72	0,33107	14,174	295,188	11600
11700	− 56,500	202,67	152,01	0,200017	60,38	0,32589	14,174	295,188	11700
11800	− 56,500	199,50	149,63	0,196888	60,04	0,32079	14,174	295,188	11800
11900	− 56,500	196,38	147,29	0,193808	59,70	0,31577	14,174	295,188	11900
12000	− 56,500	193,30	144,99	0,190776	59,36	0,31083	14,174	295,188	**12000**
12100	− 56,500	190,28	142,72	0,187791	59,02	0,30597	14,174	295,188	12100
12200	− 56,500	187,30	140,49	0,184853	58,68	0,30118	14,174	295,188	12200
12300	− 56,500	184,37	138,29	0,181961	58,35	0,29647	14,174	295,188	12300
12400	− 56,500	181,49	136,13	0,179114	58,01	0,29183	14,174	295,188	12400
12500	− 56,500	178,65	134,00	0,176312	57,68	0,28726	14,174	295,188	12500
12600	− 56,500	175,85	131,90	0,173553	57,34	0,28277	14,174	295,188	12600
12700	− 56,500	173,10	129,84	0,170838	57,01	0,27834	14,174	295,188	12700
12800	− 56,500	170,39	127,81	0,168165	56,67	0,27399	14,174	295,188	12800
12900	− 56,500	167,73	125,81	0,165534	56,34	0,26970	14,174	295,188	12900
13000	− 56,500	165,10	123,84	0,162944	56,01	0,26548	14,174	295,188	**13000**
13100	− 56,500	162,52	121,90	0,160395	55,68	0,26133	14,174	295,188	13100
13200	− 56,500	159,98	119,99	0,157886	55,35	0,25724	14,174	295,188	13200
13300	− 56,500	157,47	118,12	0,155416	55,02	0,25322	14,174	295,188	13300
13400	− 56,500	155,01	116,27	0,152984	54,69	0,24925	14,174	295,188	13400
13500	− 56,500	152,59	114,45	0,150591	54,36	0,24536	14,174	295,188	13500
13600	− 56,500	150,20	112,66	0,148235	54,03	0,24152	14,174	295,188	13600
13700	− 56,500	147,85	110,90	0,145915	53,71	0,23774	14,174	295,188	13700
13800	− 56,500	145,54	109,16	0,143633	53,38	0,23402	14,174	295,188	13800
13900	− 56,500	143,26	107,45	0,141385	53,06	0,23036	14,174	295,188	13900
14000	− 56,500	141,02	105,77	0,139173	52,73	0,22675	14,174	295,188	**14000**
14500	− 56,500	130,33	97,753	0,128622	51,12	0,20956	14,174	295,188	14500
15000	− 56,500	120,45	90,341	0,118870	49,53	0,19367	14,174	295,188	15000
15500	− 56,500	111,31	83,492	0,109858	47,96	0,17899	14,174	295,188	15500
16000	− 56,500	102,87	77,162	0,101529	46,40	0,16542	14,174	295,188	16000
16500	− 56,500	95,075	71,312	0,093832	44,86	0,15288	14,174	295,188	16500
17000	− 56,500	87,867	65,905	0,086718	43,34	0,14129	14,174	295,188	17000
18000	− 56,500	75,048	56,291	0,074067	40,34	0,12068	14,174	295,188	18000
19000	− 56,500	64,100	48,079	0,063262	37,40	0,10307	14,174	295,188	19000
20000	− 56,500	54,749	41,065	0,054033	34,53	0,08804	14,174	295,188	20000

Quecksilberbarometer-Korrektur*: 1—40° C, 600—790 Torr

Man subtrahiert vom abgelesenen Barometerstand den der aktuellen Temperatur t entsprechenden Betrag $\Delta\beta_t$ ab *oder* multipliziert den abgelesenen Barometerstand mit dem Korrekturfaktor f_t. Die Wasserdampfdruck-Korrektur für 100% Luftfeuchtigkeit ist in den Gasumrechnungstafeln S. 263–272 schon berücksichtigt und muß nicht mehr vorgenommen werden.

Der Korrekturfaktor f_t wurde errechnet nach der Formel $f_t = 1 - \frac{(\beta-\alpha)\,t}{1+\beta\,t}$

wobei

$\beta = 1{,}818 \times 10^{-3}\ °C^{-1} \approx$ kubischer Ausdehnungskoeffizient von Quecksilber,
$\alpha = 1{,}84 \times 10^{-5}\ °C^{-1} \approx$ linearer Ausdehnungskoeffizient von Messing bzw.
$\alpha = 8{,}5 \times 10^{-6}\ °C^{-1} \approx$ linearer Ausdehnungskoeffizient von Glas.

Messingskala

Barometer-temperatur t = °C	Abgelesener Barometerstand B_t in Torr (Millimeter) 600	610	620	630	640	650	660	670	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	780	790	Korrektur-faktor f_t
	Abzuziehender Betrag $\Delta\beta_t$ in Torr (Millimeter)																				
1	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,13	0,13	0,13	0,999 837
2	0,20	0,20	0,20	0,21	0,21	0,21	0,22	0,22	0,22	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25	0,26	0,26	999 673
3	0,29	0,29	0,30	0,30	0,31	0,31	0,32	0,32	0,33	0,33	0,34	0,34	0,35	0,35	0,36	0,36	0,36	0,37	0,37	0,38	999 520
4	0,39	0,40	0,41	0,41	0,42	0,43	0,43	0,44	0,44	0,45	0,46	0,46	0,47	0,48	0,48	0,49	0,50	0,50	0,51	0,52	999 346
5	0,49	0,50	0,51	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,60	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,64	0,999 184
6	0,59	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66	0,67	0,68	0,69	0,70	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,77	999 021
7	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,77	0,78	0,79	0,80	0,81	0,82	0,83	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89	0,90	998 858
8	0,78	0,80	0,81	0,82	0,84	0,85	0,86	0,87	0,89	0,90	0,91	0,93	0,94	0,95	0,97	0,98	0,99	1,00	1,02	1,03	998 695
9	0,88	0,90	0,91	0,92	0,94	0,95	0,97	0,98	1,00	1,01	1,03	1,04	1,06	1,07	1,09	1,10	1,12	1,13	1,15	1,16	998 532
10	0,98	0,99	1,01	1,03	1,04	1,06	1,08	1,09	1,11	1,13	1,14	1,16	1,17	1,19	1,21	1,22	1,24	1,26	1,27	1,29	0,998 369
11	1,08	1,09	1,11	1,13	1,15	1,17	1,18	1,20	1,22	1,24	1,26	1,27	1,29	1,31	1,33	1,35	1,36	1,38	1,40	1,42	998 206
12	1,17	1,19	1,21	1,23	1,25	1,27	1,29	1,31	1,33	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,47	1,49	1,51	1,53	1,55	998 044
13	1,27	1,29	1,31	1,33	1,36	1,38	1,40	1,42	1,44	1,46	1,48	1,50	1,53	1,55	1,57	1,59	1,61	1,63	1,65	1,67	997 881
14	1,37	1,39	1,41	1,44	1,46	1,48	1,51	1,53	1,55	1,57	1,60	1,62	1,64	1,67	1,69	1,71	1,73	1,76	1,78	1,80	997 718
15	1,47	1,49	1,52	1,54	1,56	1,59	1,61	1,64	1,66	1,69	1,71	1,74	1,76	1,78	1,81	1,83	1,86	1,88	1,91	1,93	0,997 556
16	1,56	1,59	1,62	1,64	1,67	1,69	1,72	1,75	1,77	1,80	1,82	1,85	1,88	1,90	1,93	1,96	1,98	2,01	2,03	2,06	997 393
17	1,66	1,69	1,72	1,74	1,77	1,80	1,83	1,86	1,88	1,91	1,94	1,97	1,99	2,02	2,05	2,08	2,10	2,13	2,16	2,19	997 231
18	1,76	1,79	1,82	1,85	1,88	1,91	1,94	1,96	1,99	2,02	2,05	2,08	2,11	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29	2,32	997 068
19	1,86	1,89	1,92	1,95	1,98	2,01	2,04	2,07	2,10	2,13	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29	2,32	2,35	2,38	2,41	2,44	996 906
20	1,95	1,99	2,02	2,05	2,08	2,12	2,15	2,18	2,21	2,25	2,28	2,31	2,34	2,38	2,41	2,44	2,47	2,51	2,54	2,57	0,996 744
21	2,05	2,08	2,12	2,15	2,19	2,22	2,26	2,29	2,32	2,36	2,39	2,43	2,46	2,50	2,53	2,56	2,60	2,63	2,67	2,70	996 582
22	2,15	2,18	2,22	2,26	2,29	2,33	2,36	2,40	2,43	2,47	2,51	2,54	2,58	2,61	2,65	2,69	2,72	2,76	2,79	2,83	996 420
23	2,25	2,28	2,32	2,36	2,39	2,43	2,47	2,51	2,54	2,58	2,62	2,66	2,69	2,73	2,77	2,81	2,84	2,88	2,92	2,96	996 258
24	2,34	2,38	2,42	2,46	2,50	2,54	2,58	2,62	2,66	2,69	2,73	2,77	2,81	2,85	2,89	2,93	2,97	3,01	3,05	3,08	996 095
25	2,44	2,48	2,52	2,56	2,60	2,64	2,68	2,72	2,76	2,81	2,85	2,89	2,93	2,97	3,01	3,05	3,09	3,13	3,17	3,21	0,995 934
26	2,54	2,58	2,62	2,66	2,71	2,75	2,79	2,83	2,88	2,92	2,96	3,00	3,04	3,09	3,13	3,17	3,21	3,26	3,30	3,34	995 772
27	2,63	2,68	2,72	2,77	2,81	2,85	2,90	2,94	2,99	3,03	3,07	3,12	3,16	3,20	3,25	3,29	3,34	3,38	3,42	3,47	995 610
28	2,73	2,78	2,82	2,87	2,91	2,96	3,00	3,05	3,10	3,14	3,19	3,23	3,28	3,32	3,37	3,41	3,46	3,51	3,55	3,60	995 448
29	2,83	2,88	2,92	2,97	3,02	3,06	3,11	3,16	3,21	3,25	3,30	3,35	3,39	3,44	3,49	3,54	3,58	3,63	3,68	3,72	995 286
30	2,93	2,97	3,02	3,07	3,12	3,17	3,22	3,27	3,32	3,36	3,41	3,46	3,51	3,56	3,61	3,66	3,71	3,75	3,80	3,85	0,995 125
31	3,02	3,07	3,12	3,17	3,22	3,27	3,32	3,37	3,43	3,48	3,53	3,58	3,63	3,68	3,73	3,78	3,83	3,88	3,93	3,98	994 963
32	3,12	3,17	3,22	3,28	3,33	3,38	3,43	3,48	3,54	3,59	3,64	3,69	3,74	3,80	3,85	3,90	3,95	4,00	4,06	4,11	994 801
33	3,22	3,27	3,32	3,38	3,43	3,48	3,54	3,59	3,64	3,70	3,75	3,81	3,86	3,91	3,97	4,02	4,07	4,13	4,18	4,23	994 640
34	3,31	3,37	3,42	3,48	3,53	3,59	3,64	3,70	3,75	3,81	3,86	3,92	3,98	4,03	4,09	4,14	4,20	4,25	4,31	4,36	994 479
35	3,41	3,47	3,52	3,58	3,64	3,69	3,75	3,81	3,86	3,92	3,98	4,03	4,09	4,15	4,21	4,26	4,32	4,38	4,43	4,49	0,994 317
36	3,51	3,56	3,62	3,68	3,74	3,80	3,86	3,92	3,97	4,03	4,09	4,15	4,21	4,27	4,32	4,38	4,44	4,50	4,56	4,62	994 156
37	3,60	3,66	3,72	3,78	3,84	3,90	3,96	4,02	4,08	4,14	4,20	4,26	4,32	4,38	4,44	4,50	4,56	4,62	4,68	4,74	993 995
38	3,70	3,76	3,82	3,89	3,95	4,01	4,07	4,13	4,19	4,26	4,32	4,38	4,44	4,50	4,56	4,63	4,69	4,75	4,81	4,87	993 833
39	3,80	3,86	3,92	3,99	4,05	4,11	4,18	4,24	4,30	4,37	4,43	4,49	4,56	4,62	4,68	4,75	4,81	4,87	4,94	5,00	993 672
40	3,89	3,96	4,02	4,09	4,15	4,22	4,28	4,35	4,41	4,48	4,54	4,61	4,67	4,74	4,80	4,87	4,93	5,00	5,06	5,13	0,993 511

Glasskala

1	0,10	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,14	0,999 827
2	0,21	0,21	0,21	0,22	0,22	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25	0,26	0,26	0,26	0,27	0,27	0,27	0,27	999 654
3	0,31	0,32	0,32	0,33	0,33	0,34	0,34	0,35	0,35	0,36	0,36	0,37	0,37	0,38	0,38	0,39	0,40	0,40	0,41	0,41	999 480
4	0,42	0,42	0,43	0,44	0,44	0,45	0,46	0,46	0,47	0,48	0,49	0,49	0,50	0,51	0,51	0,52	0,53	0,53	0,54	0,55	999 307
5	0,52	0,53	0,54	0,55	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,60	0,61	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66	0,67	0,68	0,68	0,999 134
6	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,77	0,78	0,79	0,80	0,81	0,82	998 961
7	0,73	0,74	0,75	0,76	0,78	0,79	0,80	0,81	0,82	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,90	0,91	0,92	0,93	0,95	0,96	998 788
8	0,83	0,84	0,86	0,87	0,89	0,90	0,91	0,93	0,94	0,95	0,97	0,98	1,00	1,01	1,02	1,04	1,05	1,07	1,08	1,09	998 616
9	0,93	0,95	0,97	0,98	1,00	1,01	1,03	1,04	1,06	1,07	1,09	1,11	1,12	1,14	1,15	1,17	1,18	1,20	1,21	1,23	998 443
10	1,04	1,06	1,07	1,09	1,11	1,12	1,14	1,16	1,18	1,19	1,21	1,23	1,25	1,26	1,28	1,30	1,31	1,33	1,35	1,37	0,998 270
11	1,14	1,16	1,18	1,20	1,22	1,24	1,26	1,27	1,29	1,31	1,33	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,46	1,48	1,50	998 098
12	1,25	1,27	1,29	1,31	1,33	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,47	1,49	1,51	1,54	1,56	1,58	1,60	1,62	1,64	997 925
13	1,35	1,37	1,39	1,42	1,44	1,46	1,48	1,51	1,53	1,55	1,57	1,60	1,62	1,64	1,66	1,69	1,71	1,73	1,75	1,78	997 752
14	1,45	1,48	1,50	1,52	1,55	1,57	1,60	1,62	1,65	1,67	1,69	1,72	1,74	1,77	1,79	1,82	1,84	1,86	1,89	1,91	997 580
15	1,56	1,58	1,61	1,63	1,66	1,68	1,71	1,74	1,76	1,79	1,81	1,84	1,87	1,89	1,92	1,94	1,97	2,00	2,02	2,05	0,997 408
16	1,66	1,69	1,71	1,74	1,77	1,80	1,82	1,85	1,88	1,91	1,94	1,96	1,99	2,02	2,05	2,07	2,10	2,13	2,16	2,18	997 235
17	1,76	1,79	1,82	1,85	1,88	1,91	1,94	1,97	2,00	2,03	2,06	2,09	2,11	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29	2,32	997 063
18	1,87	1,90	1,93	1,96	1,99	2,02	2,05	2,08	2,11	2,15	2,18	2,21	2,24	2,27	2,30	2,33	2,36	2,39	2,43	2,46	996 891
19	1,97	2,00	2,03	2,07	2,10	2,13	2,17	2,20	2,23	2,26	2,30	2,33	2,36	2,40	2,43	2,46	2,49	2,53	2,56	2,59	996 719
20	2,07	2,11	2,14	2,18	2,21	2,24	2,28	2,31	2,35	2,38	2,42	2,45	2,49	2,52	2,56	2,59	2,62	2,66	2,69	2,73	0,996 547
21	2,18	2,21	2,25	2,28	2,32	2,36	2,39	2,43	2,47	2,50	2,54	2,57	2,61	2,65	2,68	2,72	2,76	2,79	2,83	2,86	996 375
22	2,28	2,32	2,35	2,39	2,43	2,47	2,51	2,54	2,58	2,62	2,66	2,70	2,73	2,77	2,81	2,85	2,89	2,92	2,96	3,00	996 203
23	2,38	2,42	2,46	2,50	2,54	2,58	2,62	2,66	2,70	2,74	2,78	2,82	2,86	2,90	2,94	2,98	3,02	3,06	3,10	3,14	996 031
24	2,48	2,53	2,57	2,61	2,65	2,69	2,73	2,77	2,82	2,86	2,90	2,94	2,98	3,02	3,06	3,11	3,15	3,19	3,23	3,27	995 859
25	2,59	2,63	2,67	2,72	2,76	2,80	2,85	2,89	2,93	2,98	3,02	3,06	3,11	3,15	3,19	3,23	3,28	3,32	3,36	3,41	0,995 687
26	2,69	2,74	2,78	2,83	2,87	2,92	2,96	3,00	3,05	3,09	3,14	3,18	3,23	3,27	3,32	3,36	3,41	3,45	3,50	3,54	995 515
27	2,79	2,84	2,89	2,93	2,98	3,03	3,07	3,12	3,17	3,21	3,26	3,31	3,35	3,40	3,45	3,49	3,54	3,59	3,63	3,68	995 344
28	2,90	2,95	2,99	3,04	3,09	3,14	3,19	3,24	3,28	3,33	3,38	3,43	3,48	3,53	3,57	3,62	3,67	3,72	3,77	3,82	995 170
29	3,00	3,05	3,10	3,15	3,20	3,25	3,30	3,35	3,40	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70	3,75	3,80	3,85	3,90	3,95	995 001
30	3,10	3,15	3,21	3,26	3,31	3,36	3,41	3,46	3,52	3,57	3,62	3,67	3,72	3,77	3,83	3,88	3,93	3,98	4,03	4,09	0,994 829
31	3,21	3,26	3,31	3,37	3,42	3,47	3,53	3,58	3,63	3,69	3,74	3,79	3,85	3,90	3,95	4,01	4,06	4,11	4,17	4,22	994 658
32	3,31	3,36	3,42	3,47	3,53	3,58	3,64	3,69	3,75	3,80	3,86	3,91	3,97	4,02	4,08	4,13	4,19	4,25	4,30	4,36	994 487
33	3,41	3,47	3,52	3,58	3,64	3,70	3,75	3,81	3,87	3,92	3,98	4,04	4,09	4,15	4,21	4,26	4,32	4,38	4,43	4,49	994 315
34	3,51	3,57	3,63	3,69	3,75	3,81	3,86	3,92	3,98	4,04	4,10	4,16	4,22	4,27	4,33	4,39	4,45	4,51	4,57	4,63	994 144
35	3,62	3,68	3,74	3,80	3,86	3,92	3,98	4,04	4,10	4,16	4,22	4,28	4,34	4,40	4,46	4,52	4,58	4,64	4,70	4,76	0,993 974
36	3,72	3,78	3,84	3,90	3,97	4,03	4,09	4,15	4,21	4,28	4,34	4,40	4,46	4,52	4,59	4,65	4,71	4,77	4,83	4,90	993 802
37	3,82	3,89	3,95	4,01	4,08	4,14	4,20	4,27	4,33	4,39	4,46	4,52	4,59	4,65	4,71	4,78	4,84	4,90	4,97	5,03	993 631
38	3,92	3,99	4,05	4,12	4,19	4,25	4,32	4,38	4,45	4,51	4,58	4,64	4,71	4,77	4,84	4,91	4,97	5,04	5,10	5,17	993 460
39	4,03	4,09	4,16	4,23	4,30	4,36	4,43	4,50	4,56	4,63	4,70	4,76	4,83	4,90	4,97	5,03	5,10	5,17	5,23	5,30	993 289
40	4,13	4,20	4,27	4,34	4,40	4,47	4,54	4,61	4,68	4,75	4,82	4,89	4,96	5,02	5,09	5,16	5,23	5,30	5,37	5,44	0,993 118

* Nachdruck nur mit Erlaubnis des Herausgebers.

Sättigungsdruck des Wasserdampfes unter 0° Celsius über Eis

°C	in Mikrobar (μb)*										°C	in 0,001 Torr (0,001 mm Hg)[1]									
	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9		0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9
−90	0,09$_3$	0,07$_7$	0,06$_8$	0,05$_8$	0,04$_4$	0,03$_6$	0,02$_9$	0,02$_4$	0,02$_0$	0,01$_6$	−90	0,07$_0$	0,05$_8$	0,04$_8$	0,04$_0$	0,03$_3$	0,02$_7$	0,02$_2$	0,01$_8$	0,01$_5$	0,01$_2$
−80	0,53	0,45	0,39$_4$	0,32	0,27	0,23	0,19	0,16	0,13	0,11$_2$	−80	0,40	0,34	0,29	0,24	0,20	0,17	0,14	0,12	0,10	0,08$_4$
−70	2,59	2,23	1,91	1,64	1,40	1,20	1,03	0,88	0,75	0,63	−70	1,94	1,67	1,43	1,23	1,05	0,90	0,77	0,66	0,56	0,47
−60	10,7$_7$	9,3$_7$	8,1$_9$	7,1$_2$	6,1$_9$	5,3$_7$	4,6$_5$	4,0$_2$	3,4$_8$	3,0$_0$	−60	8,0$_8$	7,0$_3$	6,1$_4$	5,3$_4$	4,6$_4$	4,0$_2$	3,4$_6$	3,0$_2$	2,6$_1$	2,2$_5$
−50	39,4$_6$	34,8	30,7	27,1	23,7	20,9	18,4	16,1	14,1	12,3$_8$	−50	29,5$_5$	26,1	23,0	20,3	17,8	15,7	13,8	12,1	10,6	9,2$_5$
−40	128,8	114,9	102,4	91,2	81,2	72,1	64,1	56,8	50,4	44,5	−40	96,6	86,2	76,8	68,4	60,9	54,1	48,1	42,6	37,8	33,4
−30	381,2	343,3	309,0	277,8	249,7	224,1	200,9	180,1	161,2	144,1	−30	285,9	257,5	231,8	208,4	187,3	168,1	150,7	135,1	120,9	108,1

°C	in Millibar (mb)*										°C	in Torr (mm Hg)[1]									
	0	−0,1	−0,2	−0,3	−0,4	−0,5	−0,6	−0,7	−0,8	−0,9		0	−0,1	−0,2	−0,3	−0,4	−0,5	−0,6	−0,7	−0,8	−0,9
−29	0,423	0,419	0,415	0,409	0,405	0,401	0,397	0,393	0,389	0,385	−29	0,317	0,314	0,311	0,307	0,304	0,301	0,298	0,295	0,292	0,289
−28	0,468	0,464	0,459	0,455	0,449	0,445	0,440	0,436	0,432	0,427	−28	0,351	0,348	0,344	0,341	0,337	0,334	0,330	0,327	0,324	0,320
−27	0,519	0,513	0,508	0,503	0,499	0,493	0,488	0,483	0,479	0,473	−27	0,389	0,385	0,381	0,377	0,374	0,370	0,366	0,362	0,359	0,355
−26	0,573	0,568	0,563	0,557	0,552	0,545	0,540	0,535	0,529	0,524	−26	0,430	0,426	0,422	0,418	0,414	0,409	0,405	0,401	0,397	0,393
−25	0,635	0,628	0,623	0,616	0,609	0,604	0,597	0,592	0,585	0,580	−25	0,476	0,471	0,467	0,462	0,457	0,453	0,448	0,444	0,439	0,435
−24	0,701	0,693	0,687	0,680	0,673	0,667	0,660	0,653	0,648	0,641	−24	0,526	0,520	0,515	0,510	0,505	0,500	0,495	0,490	0,486	0,481
−23	0,773	0,765	0,759	0,751	0,744	0,736	0,729	0,721	0,715	0,708	−23	0,580	0,574	0,569	0,563	0,558	0,552	0,547	0,541	0,536	0,531
−22	0,853	0,844	0,836	0,828	0,820	0,812	0,804	0,796	0,789	0,781	−22	0,640	0,633	0,627	0,621	0,615	0,609	0,603	0,597	0,592	0,586
−21	0,940	0,931	0,921	0,913	0,904	0,896	0,887	0,879	0,869	0,861	−21	0,705	0,698	0,691	0,685	0,678	0,672	0,665	0,659	0,652	0,646
−20	1,035	1,025	1,015	1,005	0,996	0,987	0,977	0,968	0,959	0,949	−20	0,776	0,769	0,761	0,754	0,747	0,740	0,733	0,726	0,719	0,712
−19	1,139	1,128	1,117	1,107	1,096	1,085	1,075	1,065	1,055	1,044	−19	0,854	0,846	0,838	0,830	0,822	0,814	0,806	0,799	0,791	0,783
−18	1,252	1,240	1,228	1,216	1,205	1,193	1,183	1,172	1,160	1,149	−18	0,939	0,930	0,921	0,912	0,904	0,895	0,887	0,879	0,870	0,862
−17	1,375	1,361	1,349	1,336	1,324	1,312	1,300	1,288	1,275	1,263	−17	1,031	1,021	1,012	1,002	0,993	0,984	0,975	0,966	0,956	0,947
−16	1,509	1,495	1,481	1,468	1,455	1,440	1,427	1,413	1,401	1,388	−16	1,132	1,121	1,111	1,101	1,091	1,080	1,070	1,060	1,051	1,041
−15	1,655	1,640	1,625	1,611	1,595	1,581	1,567	1,552	1,537	1,523	−15	1,241	1,230	1,219	1,208	1,196	1,186	1,175	1,164	1,153	1,142
−14	1,815	1,797	1,781	1,765	1,749	1,733	1,717	1,701	1,685	1,671	−14	1,361	1,348	1,336	1,324	1,312	1,300	1,288	1,276	1,264	1,253
−13	1,986	1,969	1,952	1,933	1,916	1,899	1,881	1,865	1,848	1,831	−13	1,490	1,477	1,464	1,450	1,437	1,424	1,411	1,399	1,386	1,373
−12	2,176	2,156	2,136	2,117	2,098	2,078	2,061	2,042	2,024	2,005	−12	1,632	1,617	1,602	1,588	1,574	1,559	1,546	1,532	1,518	1,504
−11	2,380	2,358	2,337	2,316	2,296	2,276	2,254	2,234	2,214	2,194	−11	1,785	1,769	1,753	1,737	1,722	1,707	1,691	1,676	1,661	1,646
−10	2,600	2,578	2,554	2,532	2,510	2,488	2,465	2,444	2,422	2,400	−10	1,950	1,934	1,916	1,899	1,883	1,866	1,849	1,833	1,817	1,800
− 9	2,841	2,816	2,790	2,766	2,742	2,718	2,694	2,670	2,646	2,624	− 9	2,131	2,112	2,093	2,075	2,057	2,039	2,021	2,003	1,985	1,968
− 8	3,101	3,074	3,046	3,021	2,994	2,968	2,942	2,916	2,890	2,865	− 8	2,326	2,306	2,285	2,266	2,246	2,226	2,207	2,187	2,168	2,149
− 7	3,382	3,353	3,324	3,296	3,266	3,238	3,210	3,182	3,156	3,128	− 7	2,537	2,515	2,493	2,472	2,450	2,429	2,408	2,387	2,367	2,346
− 6	3,686	3,656	3,624	3,593	3,562	3,532	3,501	3,470	3,441	3,412	− 6	2,765	2,742	2,718	2,695	2,672	2,649	2,626	2,603	2,581	2,559
− 5	4,017	3,982	3,949	3,916	3,882	3,849	3,816	3,784	3,750	3,720	− 5	3,013	2,987	2,962	2,937	2,912	2,887	2,862	2,838	2,813	2,790
− 4	4,373	4,336	4,300	4,264	4,228	4,192	4,156	4,121	4,086	4,052	− 4	3,280	3,252	3,225	3,198	3,171	3,144	3,117	3,091	3,065	3,039
− 3	4,757	4,718	4,678	4,640	4,601	4,562	4,524	4,485	4,448	4,410	− 3	3,568	3,539	3,509	3,480	3,451	3,422	3,393	3,364	3,336	3,308
− 2	5,173	5,130	5,088	5,046	5,004	4,962	4,921	4,880	4,840	4,798	− 2	3,880	3,848	3,816	3,785	3,753	3,722	3,691	3,660	3,630	3,599
− 1	5,622	5,576	5,529	5,484	5,438	5,393	5,349	5,305	5,261	5,217	− 1	4,217	4,182	4,147	4,113	4,079	4,045	4,012	3,979	3,946	3,913
0	6,105	6,055	6,005	5,955	5,907	5,860	5,812	5,764	5,716	5,669	0	4,579	4,542	4,504	4,467	4,431	4,395	4,359	4,323	4,287	4,252

Sättigungsdruck des Wasserdampfes unter 0° Celsius über Wasser

°C	in Millibar (mb)*										°C	in Torr (mm Hg)[1]									
	0	−0,1	−0,2	−0,3	−0,4	−0,5	−0,6	−0,7	−0,8	−0,9		0	−0,1	−0,2	−0,3	−0,4	−0,5	−0,6	−0,7	−0,8	−0,9
−14	2,080	2,062	2,045	2,029	2,014	1,996	1,980	1,962	1,947	1,932	−14	1,560	1,547	1,534	1,522	1,511	1,497	1,485	1,472	1,460	1,449
−13	2,254	2,237	2,220	2,201	2,182	2,165	2,148	2,132	2,113	2,096	−13	1,691	1,678	1,665	1,651	1,637	1,624	1,611	1,599	1,585	1,572
−12	2,445	2,425	2,405	2,386	2,368	2,348	2,330	2,312	2,293	2,273	−12	1,834	1,819	1,804	1,790	1,776	1,761	1,748	1,734	1,720	1,705
−11	2,649	2,628	2,606	2,585	2,565	2,545	2,524	2,504	2,484	2,464	−11	1,987	1,971	1,955	1,939	1,924	1,909	1,893	1,878	1,863	1,848
−10	2,865	2,845	2,821	2,798	2,778	2,756	2,733	2,712	2,690	2,668	−10	2,149	2,134	2,116	2,099	2,084	2,067	2,050	2,034	2,018	2,001
− 9	3,101	3,076	3,052	3,028	3,005	2,981	2,958	2,934	2,912	2,889	− 9	2,326	2,307	2,289	2,271	2,254	2,236	2,219	2,201	2,184	2,167
− 8	3,352	3,326	3,300	3,274	3,249	3,224	3,198	3,173	3,149	3,124	− 8	2,514	2,495	2,475	2,456	2,437	2,418	2,399	2,380	2,362	2,343
− 7	3,620	3,593	3,565	3,538	3,510	3,484	3,457	3,429	3,404	3,377	− 7	2,715	2,695	2,674	2,654	2,633	2,613	2,593	2,572	2,553	2,533
− 6	3,908	3,878	3,849	3,821	3,790	3,762	3,733	3,704	3,676	3,648	− 6	2,931	2,909	2,887	2,866	2,843	2,822	2,800	2,778	2,757	2,736
− 5	4,217	4,185	4,153	4,122	4,092	4,061	4,029	4,000	3,968	3,940	− 5	3,163	3,139	3,115	3,092	3,069	3,046	3,022	3,000	2,976	2,955
− 4	4,546	4,512	4,478	4,445	4,412	4,378	4,345	4,313	4,281	4,249	− 4	3,410	3,384	3,359	3,334	3,309	3,284	3,259	3,235	3,211	3,187
− 3	4,897	4,862	4,826	4,790	4,756	4,720	4,685	4,649	4,614	4,581	− 3	3,673	3,647	3,620	3,593	3,567	3,540	3,514	3,487	3,461	3,436
− 2	5,274	5,236	5,197	5,161	5,121	5,084	5,046	5,009	4,973	4,936	− 2	3,956	3,927	3,898	3,871	3,841	3,813	3,785	3,757	3,730	3,702
− 1	5,677	5,636	5,594	5,553	5,513	5,473	5,433	5,393	5,354	5,314	− 1	4,258	4,227	4,196	4,165	4,135	4,105	4,075	4,045	4,016	3,986
0	6,105	6,061	6,017	5,973	5,930	5,887	5,846	5,804	5,760	5,718	0	4,579	4,546	4,513	4,480	4,448	4,416	4,385	4,353	4,320	4,289

Sättigungsdruck des Wasserdampfes über 100° Celsius

°C	in Bar (b)*										°C	in Atmosphären (atm)[2]									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	1,0133	1,0499	1,0877	1,1267	1,1667	1,2080	1,2505	1,2940	1,3391	1,3851	**100**	1,0000	1,0362	1,0735	1,1120	1,1514	1,1922	1,2341	1,2771	1,3216	1,3670
110	1,4326	1,4815	1,5315	1,5831	1,6362	1,6905	1,7464	1,8038	1,8628	1,9234	110	1,4139	1,4621	1,5115	1,5624	1,6148	1,6684	1,7236	1,7802	1,8384	1,8982
120	1,9854	2,0489	2,1146	2,1816	2,2502	2,3211	2,3933	2,4676	2,5436	2,6216	120	1,9594	2,0221	2,0869	2,1531	2,2208	2,2907	2,3620	2,4353	2,5103	2,5873
130	2,7013	2,7830	2,8670	2,9526	3,0408	3,1294	3,2215	3,3173	3,4139	3,5128	130	2,6660	2,7466	2,8295	2,9140	3,0010	3,0885	3,1794	3,2739	3,3693	3,4669
140	3,614	3,718	3,823	3,931	4,042	4,155	4,271	4,389	4,510	4,635	140	3,567	3,669	3,773	3,880	3,989	4,101	4,215	4,332	4,451	4,574
150	4,760	4,889	5,022	5,155	5,293	5,434	5,578	5,724	5,873	6,026	**150**	4,698	4,825	4,956	5,088	5,224	5,363	5,505	5,649	5,796	5,947
160	6,181	6,340	6,502	6,666	6,835	7,008	7,182	7,361	7,544	7,730	160	6,100	6,257	6,417	6,579	6,746	6,916	7,088	7,265	7,445	7,629
170	7,921	8,113	8,311	8,510	8,717	8,925	9,136	9,353	9,573	9,798	170	7,817	8,007	8,202	8,399	8,603	8,808	9,017	9,231	9,448	9,670
180	10,026	10,258	10,495	10,736	10,982	11,231	11,487	11,746	12,009	12,277	180	9,895	10,124	10,358	10,596	10,838	11,084	11,337	11,592	11,852	12,116
190	12,550	12,826	13,107	13,395	13,686	13,984	14,286	14,592	14,905	15,222	190	12,386	12,658	12,936	13,220	13,507	13,801	14,099	14,401	14,710	15,023
200	15,544	15,873	16,206	16,543	16,887	17,237	17,595	17,956	18,322	18,695	**200**	15,341	15,665	15,994	16,327	16,666	17,012	17,365	17,721	18,082	18,451
210	19,072	19,458	19,850	20,245	20,649	21,055	21,471	21,892	22,321	22,755	210	18,823	19,204	19,590	19,980	20,379	20,780	21,190	21,606	22,029	22,457
220	23,192	23,640	24,095	24,555	25,020	25,495	25,975	26,463	26,958	27,460	220	22,889	23,331	23,780	24,234	24,693	25,162	25,635	26,117	26,605	27,101
230	27,969	28,484	29,007	29,536	30,075	30,621	31,175	31,734	32,303	32,879	230	27,603	28,112	28,628	29,150	29,682	30,221	30,767	31,319	31,881	32,449
240	33,465	34,055	34,656	35,263	35,880	36,505	37,138	37,778	38,429	39,086	240	33,027	33,610	34,203	34,802	35,411	36,028	36,652	37,284	37,926	38,575
250	39,754	40,429	41,114	41,806	42,510	43,220	43,940	44,670	45,409	46,155	**250**	39,234	39,900	40,576	41,259	41,954	42,655	43,365	44,086	44,815	45,551
260	46,913	47,678	48,454	49,239	50,035	50,840	51,652	52,478	53,311	54,155	260	46,300	47,055	47,820	48,595	49,381	50,175	50,977	51,792	52,614	53,447
270	55,010	55,876	56,750	57,635	58,531	59,436	60,354	61,280	62,221	63,171	270	54,291	55,145	56,008	56,881	57,766	58,659	59,565	60,479	61,407	62,345
280	64,134	65,106	66,088	67,083	68,091	69,112	70,143	71,188	72,244	73,313	280	63,295	64,255	65,224	66,206	67,201	68,208	69,226	70,257	71,299	72,354
290	74,39	75,48	76,59	77,71	78,84	79,99	81,14	82,32	83,49	84,70	290	73,42	74,49	75,59	76,69	77,81	78,94	80,08	81,24	82,40	83,59
300	85,90	87,13	88,37	89,61	90,87	92,14	93,42	94,73	96,06	97,36	**300**	84,78	85,99	87,21	88,44	89,68	90,94	92,20	93,49	94,80	96,09
310	98,69	100,05	101,43	102,81	104,21	105,63	107,05	108,49	109,95	111,42	310	97,40	98,74	100,10	101,47	102,85	104,25	105,65	107,07	108,51	109,96
320	112,91	114,42	115,94	117,48	119,03	120,59	122,17	123,76	125,38	127,02	320	111,43	112,92	114,42	115,94	117,47	119,01	120,57	122,14	123,74	125,36
330	128,67	130,33	132,02	133,72	135,43	137,16	138,92	140,69	142,48	144,29	330	126,99	128,63	130,29	131,97	133,66	135,37	137,10	138,85	140,62	142,40
340	146,11	147,94	149,80	151,65	153,56	155,47	157,42	159,36	161,34	163,33	340	144,20	146,01	147,84	149,67	151,55	153,44	155,36	157,28	159,23	161,19
350	165,32	167,35	169,39	171,45	173,53	175,63	177,75	179,91	182,09	184,29	**350**	163,16	165,16	167,17	169,21	171,26	173,33	175,43	177,56	179,71	181,88
360	186,51	188,75	191,02	193,31	195,63	198,01	200,41	202,82	205,26	207,74	360	184,07	186,28	188,52	190,78	193,07	195,42	197,79	200,17	202,58	205,02
370	210,24	212,76	215,33	217,94	220,60	(←kritische Temperatur)					370	207,49	209,98	212,51	215,09	217,72	(←kritische Temperatur)				

1) Werte in Torr nach WASHBURN, E. W., *Monthly Weath. Rev.*, **52**, 488 (1924), und in *Int. crit. Tab.*, **3**, 210 (1928). *2)* Werte in Atmosphären nach KEYES, F. G., *Int. crit. Tab.*, **3**, 233 (1928). * Umrechnung in Mikrobar, Millibar und Bar durch den Herausgeber.

Dampfdruck und Siedepunkt des Wassers*

Sättigungsdruck in Torr

°C	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	4,58	4,61	4,64	4,68	4,71	4,75	4,78	4,82	4,85	4,89
1	4,92	4,96	4,99	5,03	5,06	5,10	5,14	5,17	5,21	5,25
2	5,29	5,33	5,36	5,40	5,44	5,48	5,52	5,56	5,60	5,64
3	5,68	5,72	5,76	5,80	5,84	5,88	5,92	5,97	6,01	6,05
4	6,09	6,14	6,18	6,22	6,27	6,31	6,35	6,40	6,44	6,49
5	6,53	6,58	6,63	6,67	6,72	6,77	6,81	6,86	6,91	6,96
6	7,00	7,05	7,10	7,15	7,20	7,25	7,30	7,35	7,40	7,45
7	7,50	7,56	7,61	7,66	7,71	7,77	7,82	7,87	7,93	7,98
8	8,04	8,09	8,15	8,20	8,26	8,31	8,37	8,43	8,48	8,54
9	8,60	8,66	8,72	8,77	8,83	8,89	8,95	9,01	9,08	9,14
10	9,20	9,26	9,32	9,38	9,45	9,51	9,57	9,64	9,70	9,77
11	9,83	9,90	9,96	10,03	10,10	10,16	10,23	10,30	10,37	10,44
12	10,50	10,57	10,64	10,71	10,79	10,86	10,93	11,00	11,07	11,15
13	11,22	11,29	11,37	11,44	11,52	11,59	11,67	11,74	11,82	11,90
14	11,97	12,05	12,13	12,21	12,29	12,37	12,45	12,53	12,61	12,69
15	12,77	12,86	12,94	13,02	13,11	13,19	13,28	13,36	13,45	13,53
16	13,62	13,71	13,79	13,88	13,97	14,06	14,15	14,24	14,33	14,42
17	14,51	14,61	14,70	14,79	14,89	14,98	15,08	15,17	15,27	15,36
18	15,46	15,56	15,66	15,75	15,85	15,95	16,05	16,15	16,26	16,36
19	16,46	16,56	16,67	16,77	16,88	16,98	17,09	17,19	17,30	17,41
20	17,52	17,63	17,73	17,84	17,96	18,07	18,18	18,29	18,40	18,52
21	18,63	18,75	18,86	18,98	19,09	19,21	19,33	19,45	19,57	19,69
22	19,81	19,93	20,05	20,17	20,30	20,42	20,54	20,67	20,79	20,92
23	21,05	21,18	21,30	21,43	21,56	21,69	21,82	21,96	22,09	22,22
24	22,36	22,49	22,63	22,76	22,90	23,04	23,17	23,31	23,45	23,59
25	23,73	23,88	24,02	24,16	24,31	24,45	24,60	24,74	24,89	25,04
26	25,19	25,34	25,49	25,64	25,79	25,94	26,09	26,25	26,40	26,56
27	26,72	26,87	27,03	27,19	27,35	27,51	27,67	27,83	28,00	28,16
28	28,32	28,49	28,66	28,82	28,99	29,16	29,33	29,50	29,67	29,84
29	30,02	30,19	30,37	30,54	30,72	30,90	31,07	31,25	31,43	31,61
30	31,80	31,98	32,16	32,35	32,53	32,72	32,91	33,10	33,29	33,48
31	33,67	33,86	34,05	34,25	34,44	34,64	34,84	35,03	35,23	35,43
32	35,63	35,84	36,04	36,24	36,45	36,65	36,86	37,07	37,28	37,49
33	37,70	37,91	38,13	38,34	38,55	38,77	38,99	39,21	39,43	39,65
34	39,87	40,09	40,32	40,54	40,77	40,99	41,22	41,45	41,68	41,91
35	42,14	42,38	42,61	42,85	43,08	43,32	43,56	43,80	44,04	44,29
36	44,53	44,78	45,02	45,27	45,52	45,77	46,02	46,27	46,52	46,78
37	47,04	47,29	47,55	47,81	48,07	48,33	48,59	48,86	49,12	49,39
38	49,66	49,93	50,20	50,47	50,74	51,02	51,29	51,57	51,85	52,13
39	52,41	52,69	52,97	53,26	53,55	53,83	54,12	54,41	54,70	54,99
40	55,29	55,58	55,88	56,18	56,48	56,78	57,08	57,38	57,69	58,00
41	58,31	58,61	58,92	59,24	59,55	59,87	60,18	60,50	60,82	61,14
42	61,46	61,78	62,11	62,44	62,77	63,09	63,43	63,76	64,09	64,43
43	64,76	65,10	65,45	65,78	66,13	66,47	66,82	67,17	67,52	67,87
44	68,22	68,58	68,93	69,29	69,65	70,01	70,37	70,73	71,10	71,46
45	71,83	72,21	72,58	72,95	73,33	73,70	74,08	74,46	74,84	75,23
46	75,61	76,00	76,39	76,78	77,17	77,56	77,96	78,36	78,76	79,15
47	79,56	79,96	80,37	80,78	81,18	81,60	82,01	82,42	82,84	83,26
48	83,68	84,10	84,52	84,95	85,38	85,81	86,24	86,67	87,11	87,54
49	87,98	88,42	88,87	89,31	89,76	90,21	90,66	91,11	91,56	92,02
50	92,48	92,94	93,40	93,86	94,33	94,79	95,27	95,74	96,21	96,69
51	97,16	97,64	98,13	98,61	99,10	99,58	100,08	100,56	101,06	101,56
52	102,05	102,56	103,06	103,57	104,07	104,58	105,09	105,60	106,12	106,64
53	107,16	107,68	108,20	108,72	109,25	109,78	110,32	110,86	111,39	111,93
54	112,47	113,02	113,56	114,11	114,67	115,22	115,77	116,32	116,89	117,45
55	118,01	118,58	119,15	119,72	120,30	120,87	121,45	122,03	122,61	123,19
56	123,79	124,37	124,97	125,57	126,16	126,76	127,37	127,97	128,58	129,19
57	129,79	130,41	131,03	131,65	132,27	132,90	133,52	134,15	134,78	134,53
58	136,05	136,69	137,34	137,98	138,63	139,28	139,93	140,59	141,25	141,91
59	142,57	143,24	143,90	144,58	145,25	145,93	146,60	147,29	147,97	148,66
60	149,35	150,04	150,74	151,44	152,13	152,84	153,54	154,26	154,96	155,68
61	156,41	157,12	157,85	158,57	159,30	160,04	160,76	161,50	162,25	162,99
62	163,73	164,48	165,24	165,99	166,75	167,52	168,27	169,04	169,81	170,58
63	171,36	172,14	172,92	173,70	174,49	175,28	176,07	176,87	177,68	178,48
64	179,28	180,09	180,90	181,72	182,54	183,36	184,18	185,02	185,84	186,67
65	187,52	188,35	189,19	190,05	190,89	191,75	192,60	193,47	194,33	195,20
66	196,06	196,94	197,81	198,69	199,58	200,46	201,35	202,25	203,14	204,04
67	204,95	205,86	206,76	207,67	208,59	209,51	210,44	211,37	212,28	213,22
68	214,16	215,10	216,04	216,99	217,94	218,90	219,86	220,82	221,78	222,75
69	223,74	224,71	225,69	226,67	227,65	228,64	229,65	230,64	231,64	232,64
70	233,66	234,67	235,68	236,71	237,73	238,76	239,79	240,82	241,86	242,90
71	243,96	245,00	246,06	247,11	248,18	249,25	250,31	251,39	252,46	253,54
72	254,63	255,71	256,81	257,91	259,02	260,11	261,22	262,34	263,46	264,58
73	265,69	266,82	267,96	269,10	270,24	271,39	272,54	273,69	274,85	276,01
74	277,17	278,34	279,52	280,69	281,87	283,06	284,24	285,46	286,65	287,85
75	289,06	290,26	291,50	292,71	293,93	295,15	296,40	297,63	298,87	300,13
76	301,37	302,64	303,89	305,14	306,42	307,69	308,98	310,25	311,54	312,82
77	314,13	315,44	316,73	318,05	319,35	320,67	322,00	323,31	324,65	326,00
78	327,32	328,67	330,03	331,39	332,75	334,10	335,47	336,85	338,23	339,62
79	341,01	342,40	343,80	345,21	346,59	348,00	349,42	350,84	352,29	353,72
80	355,15	356,59	358,04	359,49	360,94	362,39	363,86	365,35	366,82	368,29
81	369,77	371,28	372,77	374,26	375,76	377,29	378,80	380,31	381,85	383,37
82	384,93	386,46	388,02	389,56	391,10	392,68	394,24	395,82	397,41	398,98
83	400,58	402,16	403,77	405,36	406,98	408,60	410,20	411,84	413,48	415,13
84	416,75	418,40	420,06	421,73	423,37	425,04	426,72	428,41	430,10	431,80
85	433,50	435,17	436,88	438,60	440,32	442,05	443,78	445,51	447,26	449,00
86	450,75	452,55	454,31	456,08	457,85	459,63	461,41	463,20	465,03	466,83
87	468,63	470,44	472,29	474,11	475,93	477,77	479,64	481,48	483,33	485,21
88	487,07	488,97	490,84	492,71	494,63	496,51	498,44	500,34	502,28	504,18
89	506,13	508,05	510,01	511,98	513,91	515,89	517,83	519,82	521,82	523,78
90	525,79	527,80	529,82	531,80	533,83	535,87	537,91	539,92	541,97	544,03
91	546,10	548,17	550,24	552,33	554,41	556,46	558,57	560,67	562,79	564,90
92	567,03	569,16	571,29	573,43	575,63	577,78	579,94	582,11	584,28	586,46
93	588,64	590,84	593,08	595,28	597,49	599,70	601,98	604,20	606,43	608,67
94	610,97	613,22	615,48	617,79	620,06	622,34	624,67	626,96	629,30	631,60
95	633,96	636,28	638,65	640,97	643,36	645,70	648,10	650,45	652,86	655,22
96	657,65	660,08	662,46	664,91	667,36	669,76	672,22	674,69	677,12	679,60
97	682,09	684,59	687,09	689,55	692,06	694,59	697,12	699,66	702,20	704,69
98	707,25	709,82	712,39	714,97	717,56	720,15	722,75	725,35	727,97	730,59
99	733,22	735,85	738,49	741,14	743,85	746,52	749,19	751,86	754,55	757,23
100	760,00									

Siedepunkt in Grad Celsius

Torr	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		−17,28	−9,69	−5,03	−1,63	+1,22	3,78	5,99	7,93	9,67
10	11,25	12,70	14,03	15,27	16,43	17,52	18,54	19,51	20,44	21,32
20	22,15	22,96	23,73	24,47	25,18	25,87	26,53	27,18	27,80	28,40
30	28,99	29,55	30,11	30,64	31,17	31,68	32,18	32,66	33,14	33,60
40	34,05	34,50	34,93	35,36	35,78	36,19	36,59	36,98	37,37	37,75
50	38,12	38,49	38,85	39,20	39,55	39,90	40,23	40,57	40,90	41,22
60	41,54	41,85	42,16	42,47	42,77	43,06	43,36	43,65	43,93	44,21
70	44,49	44,77	45,04	45,31	45,57	45,84	46,10	46,35	46,60	46,86
80	47,10	47,35	47,59	47,83	48,07	48,31	48,54	48,77	49,00	49,23
90	49,45	49,67	49,89	50,11	50,32	50,54	50,75	50,96	51,17	51,37
100	51,58	51,78	51,98	52,18	52,38	52,58	52,77	52,96	53,16	53,35
110	53,54	53,72	53,91	54,09	54,28	54,46	54,64	54,81	54,99	55,17
120	55,34	55,52	55,69	55,86	56,03	56,20	56,37	56,53	56,70	56,86
130	57,03	57,19	57,35	57,51	57,67	57,93	57,99	58,14	58,30	58,45
140	58,61	58,76	58,91	59,06	59,21	59,36	59,51	59,65	59,80	59,94
150	60,09	60,23	60,38	60,52	60,66	60,80	60,94	61,08	61,22	61,35
160	61,49	61,63	61,76	61,90	62,03	62,16	62,30	62,43	62,56	62,69
170	62,82	62,95	63,08	63,21	63,33	63,46	63,59	63,71	63,84	63,96
180	64,08	64,21	64,33	64,45	64,57	64,69	64,81	64,93	65,05	65,17
190	65,29	65,41	65,52	65,64	65,76	65,87	65,99	66,10	66,22	66,33
200	66,44	66,56	66,67	66,78	66,89	67,00	67,11	67,22	67,33	67,44
210	67,55	67,66	67,76	67,87	67,98	68,08	68,19	68,30	68,40	68,51
220	68,61	68,71	68,82	68,92	69,02	69,12	69,23	69,33	69,43	69,53
230	69,63	69,73	69,83	69,93	70,03	70,13	70,23	70,32	70,42	70,52
240	70,62	70,71	70,81	70,90	71,00	71,10	71,19	71,28	71,38	71,47
250	71,57	71,66	71,75	71,85	71,94	72,03	72,12	72,21	72,30	72,39
260	72,49	72,58	72,66	72,75	72,84	72,93	73,02	73,11	73,20	73,29
270	73,37	73,46	73,55	73,64	73,72	73,81	73,89	73,98	74,07	74,15
280	74,24	74,32	74,41	74,49	74,57	74,66	74,74	74,82	74,91	74,99
290	75,07	75,15	75,24	75,32	75,40	75,48	75,56	75,64	75,72	75,81
300	75,88	75,97	76,04	76,12	76,20	76,28	76,36	76,44	76,52	76,60
310	76,68	76,75	76,83	76,91	76,99	77,06	77,14	77,22	77,29	77,37
320	77,44	77,52	77,59	77,67	77,75	77,82	77,90	77,97	78,05	78,12
330	78,19	78,27	78,34	78,41	78,49	78,56	78,63	78,71	78,78	78,85
340	78,92	78,99	79,07	79,14	79,21	79,28	79,35	79,42	79,49	79,57
350	79,64	79,71	79,78	79,84	79,91	79,98	80,05	80,12	80,19	80,26
360	80,33	80,40	80,47	80,54	80,60	80,67	80,74	80,81	80,88	80,94
370	81,01	81,08	81,14	81,21	81,28	81,34	81,41	81,48	81,54	81,61
380	81,67	81,74	81,80	81,87	81,94	82,00	82,07	82,13	82,19	82,26
390	82,32	82,39	82,45	82,52	82,58	82,64	82,71	82,77	82,83	82,90
400	82,96	83,02	83,08	83,15	83,21	83,27	83,33	83,40	83,46	83,52
410	83,58	83,64	83,70	83,77	83,83	83,89	83,95	84,01	84,07	84,13
420	84,19	84,25	84,31	84,37	84,43	84,49	84,55	84,61	84,67	84,73
430	84,79	84,85	84,91	84,97	85,02	85,08	85,14	85,20	85,26	85,32
440	85,38	85,43	85,49	85,55	85,61	85,67	85,72	85,78	85,84	85,89
450	85,95	86,01	86,06	86,12	86,18	86,23	86,29	86,35	86,40	86,46
460	86,52	86,57	86,63	86,68	86,74	86,79	86,85	86,90	86,96	87,02
470	87,07	87,13	87,18	87,23	87,29	87,34	87,40	87,45	87,51	87,56
480	87,61	87,67	87,72	87,78	87,83	87,88	87,94	87,99	88,04	88,10
490	88,15	88,20	88,26	88,31	88,36	88,41	88,47	88,52	88,57	88,62
500	88,68	88,73	88,78	88,83	88,89	88,94	88,99	89,04	89,09	89,14
510	89,19	89,25	89,30	89,35	89,40	89,45	89,50	89,55	89,60	89,65
520	89,70	89,75	89,80	89,86	89,91	89,96	90,01	90,06	90,10	90,15
530	90,20	90,25	90,30	90,35	90,40	90,45	90,50	90,55	90,60	90,65
540	90,70	90,75	90,80	90,85	90,89	90,94	90,99	91,04	91,09	91,14
550	91,18	91,23	91,28	91,33	91,38	91,42	91,47	91,52	91,57	91,62
560	91,66	91,71	91,76	91,81	91,85	91,90	91,95	91,99	92,04	92,09
570	92,13	92,18	92,23	92,27	92,32	92,37	92,41	92,46	92,51	92,55
580	92,60	92,64	92,69	92,74	92,78	92,83	92,87	92,92	92,97	93,01
590	93,06	93,10	93,15	93,19	93,24	93,28	93,33	93,37	93,42	93,46
600	93,51	93,55	93,60	93,64	93,69	93,73	93,78	93,82	93,87	93,91
610	93,95	94,00	94,04	94,09	94,13	94,17	94,22	94,26	94,30	94,35
620	94,39	94,44	94,48	94,52	94,57	94,61	94,65	94,70	94,74	94,78
630	94,83	94,87	94,91	94,95	95,00	95,04	95,08	95,13	95,17	95,21
640	95,25	95,30	95,34	95,38	95,42	95,47	95,51	95,55	95,59	95,63
650	95,68	95,72	95,76	95,80	95,84	95,89	95,93	95,97	96,01	96,05
660	96,09	96,13	96,18	96,22	96,26	96,30	96,34	96,38	96,42	96,46
670	96,50	96,55	96,59	96,63	96,67	96,71	96,75	96,79	96,83	96,87
680	96,91	96,95	96,99	97,03	97,07	97,11	97,15	97,19	97,23	97,27
690	97,31	97,35	97,39	97,43	97,47	97,51	97,55	97,59	97,63	97,67
700	97,71	97,75	97,79	97,83	97,87	97,91	97,95	97,99	98,02	98,06
710	98,10	98,14	98,18	98,22	98,26	98,30	98,33	98,37	98,41	98,45
720	98,49	98,53	98,57	98,60	98,64	98,68	98,72	98,76	98,80	98,83
730	98,87	98,91	98,95	98,99	99,02	99,06	99,10	99,14	99,18	99,21
740	99,25	99,29	99,33	99,36	99,40	99,44	99,48	99,51	99,55	99,59
750	99,63	99,66	99,70	99,74	99,77	99,81	99,85	99,89	99,92	99,96
760	100,00	100,03	100,07	100,11	100,14	100,18	100,22	100,25	100,29	100,33
770	100,36	100,40	100,44	100,47	100,51	100,54	100,58	100,62	100,65	100,69
780	100,73	100,76	100,80	100,83	100,87	100,91	100,94	100,98	101,01	101,05
790	101,08	101,12	101,16	101,19	101,23	101,26	101,30	101,33	101,37	101,40
800	101,44	101,47	101,51	101,55	101,58	101,62	101,65	101,69	101,72	101,76
810	101,79	101,83	101,86	101,90	101,93	101,96	102,00	102,03	102,07	102,10
820	102,14	102,17	102,21	102,24	102,28	102,31	102,35	102,38	102,41	102,45
830	102,48	102,52	102,55	102,58	102,62	102,65	102,69	102,72	102,76	102,79
840	102,82	102,86	102,89	102,92	102,96	102,99	103,02	103,06	103,09	103,13
850	103,16	103,19	103,23	103,26	103,29	103,33	103,36	103,40	103,43	103,46
860	103,50	103,53	103,56	103,60	103,63	103,66	103,70	103,73	103,76	103,80
870	103,83	103,86	103,89	103,93	103,96	103,99	104,03	104,06	104,09	104,12
880	104,16	104,19	104,22	104,25	104,29	104,32	104,35	104,38	104,42	104,45
890	104,48	104,51	104,54	104,58	104,61	104,64	104,67	104,70	104,74	104,77
900	104,80	104,83	104,86	104,90	104,93	104,96	104,99	105,02	105,06	105,09
910	105,12	105,15	105,18	105,21	105,25	105,28	105,31	105,34	105,37	105,40
920	105,44	105,47	105,50	105,53	105,56	105,59	105,62	105,66	105,69	105,72
930	105,75	105,78	105,81	105,84	105,87	105,90	105,94	105,97	106,00	106,03
940	106,06	106,09	106,12	106,15	106,18	106,21	106,24	106,28	106,31	106,34
950	106,37	106,40	106,43	106,46	106,49	106,52	106,55	106,58	106,61	106,64
960	106,67	106,70	106,73	106,77	106,80	106,83	106,86	106,89	106,92	106,95
970	106,98	107,01	107,04	107,07	107,10	107,13	107,16	107,19	107,22	107,25
980	107,28	107,31	107,34	107,37	107,40	107,43	107,46	107,49	107,52	107,55
990	107,58	107,61	107,63	107,66	107,69	107,72	107,75	107,78	107,81	107,84
1000	107,87									

* Nachdruck nur mit Erlaubnis des Herausgebers.

Sättigungsdruck in Millibar

°C	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	6,10	6,15	6,19	6,24	6,28	6,33	6,37	6,42	6,47	6,51
1	6,56	6,61	6,66	6,70	6,75	6,80	6,85	6,90	6,95	7,00
2	7,05	7,10	7,15	7,20	7,25	7,30	7,36	7,41	7,46	7,52
3	7,57	7,62	7,68	7,73	7,79	7,84	7,90	7,95	8,01	8,07
4	8,12	8,18	8,24	8,30	8,35	8,41	8,47	8,53	8,59	8,65
5	8,71	8,77	8,83	8,90	8,96	9,02	9,08	9,15	9,21	9,27
6	9,34	9,40	9,47	9,53	9,60	9,67	9,73	9,80	9,87	9,94
7	10,01	10,07	10,14	10,21	10,28	10,35	10,42	10,50	10,57	10,64
8	10,71	10,79	10,86	10,93	11,01	11,08	11,16	11,23	11,31	11,39
9	11,46	11,54	11,62	11,70	11,78	11,86	11,94	12,02	12,10	12,18
10	12,26	12,34	12,43	12,51	12,60	12,68	12,76	12,85	12,93	13,02
11	13,11	13,20	13,28	13,37	13,46	13,55	13,64	13,73	13,82	13,91
12	14,01	14,10	14,19	14,29	14,38	14,47	14,57	14,67	14,76	14,86
13	14,96	15,06	15,15	15,25	15,35	15,45	15,55	15,66	15,76	15,86
14	15,96	16,07	16,17	16,28	16,38	16,49	16,60	16,70	16,81	16,92
15	17,03	17,14	17,25	17,36	17,47	17,59	17,70	17,81	17,93	18,04
16	18,16	18,27	18,39	18,51	18,63	18,75	18,87	18,99	19,11	19,23
17	19,35	19,47	19,60	19,72	19,85	19,97	20,10	20,23	20,35	20,48
18	20,61	20,74	20,87	21,00	21,14	21,27	21,40	21,54	21,67	21,81
19	21,95	22,08	22,22	22,36	22,50	22,64	22,78	22,92	23,07	23,21
20	23,35	23,50	23,64	23,79	23,94	24,09	24,23	24,38	24,54	24,69
21	24,84	24,99	25,15	25,30	25,46	25,61	25,77	25,93	26,09	26,25
22	26,41	26,57	26,73	26,89	27,06	27,22	27,39	27,56	27,72	27,89
23	28,06	28,23	28,40	28,57	28,75	28,92	29,10	29,27	29,45	29,63
24	29,81	29,99	30,16	30,35	30,53	30,71	30,90	31,08	31,27	31,46
25	31,64	31,83	32,02	32,21	32,41	32,60	32,79	32,99	33,18	33,38
26	33,58	33,78	33,98	34,18	34,38	34,58	34,79	34,99	35,20	35,41
27	35,62	35,83	36,04	36,25	36,46	36,68	36,89	37,11	37,32	37,54
28	37,76	37,98	38,21	38,43	38,65	38,88	39,10	39,33	39,56	39,79
29	40,02	40,25	40,48	40,72	40,96	41,19	41,43	41,67	41,91	42,15
30	42,39	42,64	42,88	43,13	43,37	43,63	43,87	44,13	44,38	44,63
31	44,89	45,15	45,40	45,66	45,92	46,18	46,44	46,71	46,97	47,24
32	47,51	47,78	48,05	48,32	48,60	48,87	49,15	49,42	49,70	49,98
33	50,26	50,55	50,83	51,11	51,40	51,69	51,98	52,27	52,56	52,86
34	53,15	53,45	53,75	54,05	54,35	54,65	54,96	55,26	55,57	55,88
35	56,19	56,50	56,81	57,13	57,44	57,76	58,08	58,40	58,72	59,05
36	59,37	59,70	60,03	60,36	60,69	61,02	61,35	61,69	62,03	62,36
37	62,71	63,05	63,39	63,74	64,09	64,44	64,79	65,14	65,49	65,85
38	66,21	66,56	66,93	67,29	67,65	68,02	68,38	68,76	69,12	69,50
39	69,87	70,25	70,63	71,01	71,39	71,77	72,15	72,54	72,93	73,32
40	73,71	74,11	74,50	74,90	75,30	75,70	76,10	76,51	76,91	77,33
41	77,74	78,15	78,56	78,97	79,40	79,81	80,23	80,66	81,09	81,51
42	81,94	82,37	82,81	83,24	83,68	84,12	84,56	85,00	85,45	85,90
43	86,35	86,80	87,25	87,71	88,16	88,63	89,09	89,55	90,01	90,48
44	90,95	91,43	91,90	92,38	92,86	93,34	93,82	94,30	94,79	95,28
45	95,77	96,27	96,76	97,26	97,76	98,26	98,77	99,27	99,78	100,30
46	100,81	101,32	101,84	102,36	102,89	103,41	103,94	104,47	105,00	105,53
47	106,07	106,61	107,15	107,70	108,24	108,79	109,34	109,89	110,45	111,01
48	111,57	112,13	112,69	113,26	113,83	114,40	114,98	115,56	116,14	116,72
49	117,30	117,89	118,48	119,07	119,67	120,27	120,87	121,47	122,07	122,68
50	123,30	123,91	124,52	125,14	125,76	126,38	127,02	127,64	128,28	128,91
51	129,54	130,18	130,83	131,47	132,12	132,77	133,43	134,08	134,74	135,40
52	136,06	136,73	137,40	138,08	138,75	139,43	140,11	140,80	141,48	142,17
53	142,87	143,56	144,25	144,95	145,66	146,37	147,09	147,80	148,51	149,23
54	149,95	150,68	151,40	152,13	152,88	153,61	154,35	155,09	155,84	156,59
55	157,34	158,10	158,85	159,61	160,38	161,14	161,92	162,69	163,47	164,25
56	165,04	165,82	166,61	167,41	168,20	169,00	169,81	170,61	171,42	172,24
57	173,04	173,87	174,69	175,52	176,35	177,19	178,01	178,85	179,70	179,35
58	181,39	182,25	183,10	183,96	184,82	185,69	186,56	187,45	188,32	189,20
59	190,08	190,97	191,86	192,76	193,66	194,55	195,46	196,37	197,28	198,19
60	199,12	200,04	200,98	201,90	202,83	203,77	204,71	205,66	206,60	207,56
61	208,53	209,48	210,45	211,41	212,39	213,37	214,33	215,32	216,31	217,31
62	218,29	219,29	220,30	221,31	222,32	223,34	224,34	225,37	226,39	227,42
63	228,46	229,50	230,54	231,58	232,63	233,69	234,74	235,80	236,89	237,95
64	239,03	240,10	241,18	242,28	243,37	244,46	245,55	246,67	247,77	248,88
65	250,01	251,12	252,24	253,38	254,50	255,65	256,78	257,94	259,08	260,25
66	261,40	262,57	263,72	264,90	266,09	267,26	268,45	269,65	270,83	272,03
67	273,24	274,46	275,65	276,87	278,10	279,33	280,57	281,80	283,02	284,27
68	285,52	286,78	288,04	289,30	290,57	291,84	293,12	294,40	295,69	296,98
69	298,29	299,59	300,89	302,20	303,51	304,83	306,17	307,50	308,83	310,16
70	311,52	312,87	314,21	315,59	316,94	318,33	319,69	321,06	322,46	323,84
71	325,25	326,64	328,05	329,45	330,88	332,31	333,72	335,16	336,58	338,03
72	339,49	340,92	342,39	343,86	345,33	346,78	348,27	349,76	351,25	352,75
73	354,23	355,74	357,25	358,77	360,29	361,82	363,35	364,89	366,44	367,98
74	369,54	371,10	372,66	374,23	375,80	377,38	378,96	380,58	382,18	383,78
75	385,38	386,99	388,63	390,25	391,88	393,51	395,17	396,81	398,46	400,14
76	401,80	403,49	405,16	406,83	408,54	410,22	411,94	413,63	415,36	417,07
77	418,81	420,55	422,27	424,03	425,76	427,53	429,31	431,05	432,84	434,63
78	436,40	438,20	440,01	441,82	443,64	445,43	447,26	449,10	450,94	452,79
79	454,64	456,50	458,37	460,24	462,08	463,97	465,85	467,75	469,69	471,59
80	473,50	475,42	477,35	479,28	481,21	483,15	485,10	487,09	489,06	491,02
81	492,99	495,01	496,99	498,98	500,98	503,02	505,03	507,04	509,10	511,13
82	513,20	515,24	517,32	519,37	521,43	523,54	525,61	527,72	529,85	531,94
83	534,07	536,17	538,32	540,44	542,60	544,77	546,90	549,08	551,27	553,46
84	555,62	557,83	560,04	562,27	564,45	566,68	568,92	571,17	573,43	575,69
85	577,96	580,18	582,47	584,75	587,05	589,35	591,66	593,97	596,30	598,63
86	600,96	603,35	605,70	608,06	610,42	612,79	615,17	617,55	619,99	622,39
87	624,79	627,20	629,67	632,10	634,53	636,97	639,47	641,93	644,39	646,90
88	649,38	651,91	654,40	656,90	659,46	661,97	664,54	667,07	669,65	672,19
89	674,79	677,35	679,96	682,59	685,16	687,80	690,39	693,05	695,71	698,32
90	701,00	703,68	706,37	709,02	711,72	714,44	717,16	719,83	722,57	725,32
91	728,07	730,83	733,60	736,38	739,16	741,90	744,70	747,51	750,32	753,15
92	755,98	758,82	761,67	764,52	767,45	770,32	773,20	776,09	778,98	781,89
93	784,80	787,72	790,71	793,65	796,59	799,54	802,57	805,54	808,51	811,50
94	814,56	817,56	820,57	823,66	826,68	829,72	832,83	835,88	839,01	842,07
95	845,22	848,30	851,47	854,57	857,75	860,86	864,06	867,20	870,41	873,56
96	876,80	880,04	883,21	886,47	889,74	892,94	896,23	899,52	902,75	906,06
97	909,38	912,71	916,05	919,32	922,68	926,05	929,42	932,80	936,20	939,52
98	942,93	946,35	949,78	953,22	956,67	960,12	963,59	967,06	970,55	974,04
99	977,55	981,06	984,58	988,11	991,73	995,28	998,84	1002,41	1005,99	1009,58
100	1013,25									

Siedepunkt in Grad Celsius

mb	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		−16,52	−12,90	−8,35	−5,02	−2,40	−0,21	+1,90	3,78	5,46
10	6,99	8,38	9,67	10,87	11,99	13,04	14,03	14,97	15,86	16,71
20	17,52	18,29	19,04	19,75	20,44	21,10	21,74	22,36	22,96	23,54
30	24,10	24,65	25,18	25,70	26,21	26,70	27,18	27,65	28,10	28,55
40	28,99	29,41	29,83	30,24	30,65	31,04	31,43	31,80	32,18	32,54
50	32,90	33,26	33,60	33,94	34,28	34,61	34,93	35,25	35,57	35,88
60	36,19	36,49	36,79	37,08	37,37	37,66	37,94	38,22	38,49	38,76
70	39,03	39,29	39,55	39,81	40,07	40,32	40,57	40,82	41,06	41,30
80	41,54	41,77	42,01	42,24	42,47	42,69	42,92	43,14	43,36	43,58
90	43,79	44,00	44,22	44,43	44,63	44,84	45,04	45,24	45,44	45,64
100	45,84	46,03	46,23	46,42	46,61	46,79	46,98	47,17	47,35	47,53
110	47,72	47,89	48,07	48,25	48,42	48,60	48,77	48,94	49,11	49,28
120	49,45	49,62	49,78	49,95	50,11	50,27	50,43	50,59	50,75	50,91
130	51,07	51,22	51,38	51,53	51,68	51,83	51,99	52,14	52,28	52,43
140	52,58	52,72	52,87	53,01	53,16	53,30	53,44	53,58	53,72	53,86
150	54,00	54,14	54,28	54,41	54,55	54,68	54,82	54,95	55,08	55,21
160	55,35	55,48	55,61	55,73	55,86	55,99	56,12	56,24	56,37	56,49
170	56,62	56,74	56,87	56,99	57,11	57,23	57,35	57,47	57,59	57,71
180	57,93	57,98	58,07	58,18	58,30	58,42	58,53	58,64	58,76	58,87
190	58,99	59,10	59,21	59,32	59,43	59,54	59,65	59,76	59,87	59,98
200	60,09	60,20	60,31	60,41	60,52	60,63	60,73	60,84	60,94	61,04
210	61,15	61,25	61,36	61,46	61,56	61,66	61,76	61,86	61,97	62,07
220	62,17	62,26	62,36	62,46	62,56	62,66	62,76	62,85	62,95	63,05
230	63,14	63,24	63,33	63,43	63,52	63,62	63,71	63,81	63,90	63,99
240	64,09	64,18	64,27	64,36	64,45	64,54	64,64	64,72	64,82	64,91
250	64,99	65,08	65,17	65,26	65,35	65,44	65,53	65,61	65,70	65,79
260	65,87	65,96	66,05	66,13	66,22	66,30	66,39	66,47	66,56	66,64
270	66,72	66,81	66,89	66,97	67,06	67,14	67,22	67,31	67,39	67,47
280	67,55	67,63	67,71	67,79	67,87	67,95	68,03	68,11	68,19	68,27
290	68,35	68,43	68,51	68,59	68,66	68,74	68,82	68,90	68,97	69,05
300	69,13	69,20	69,28	69,36	69,43	69,51	69,58	69,66	69,73	69,81
310	69,88	69,96	70,03	70,10	70,18	70,25	70,33	70,40	70,47	70,54
320	70,62	70,69	70,76	70,83	70,91	70,98	71,05	71,12	71,19	71,26
330	71,33	71,40	71,47	71,54	71,61	71,68	71,75	71,82	71,89	71,96
340	72,03	72,10	72,17	72,24	72,30	72,37	72,44	72,51	72,58	72,64
350	72,71	72,78	72,84	72,91	72,98	73,05	73,11	73,18	73,24	73,31
360	73,38	73,44	73,51	73,57	73,64	73,70	73,77	73,83	73,90	73,96
370	74,02	74,09	74,15	74,22	74,28	74,34	74,41	74,47	74,53	74,60
380	74,66	74,72	74,78	74,85	74,91	74,97	75,03	75,10	75,16	75,22
390	75,28	75,34	75,40	75,46	75,52	75,58	75,65	75,71	75,77	75,83
400	75,89	75,95	76,01	76,07	76,13	76,19	76,25	76,31	76,36	76,42
410	76,48	76,54	76,60	76,66	76,72	76,77	76,83	76,89	76,95	77,01
420	77,06	77,12	77,18	77,24	77,29	77,35	77,41	77,46	77,52	77,58
430	77,63	77,69	77,75	77,80	77,86	77,92	77,97	78,03	78,08	78,14
440	78,19	78,25	78,30	78,36	78,42	78,47	78,53	78,58	78,64	78,69
450	78,74	78,80	78,85	78,91	78,96	79,01	79,07	79,12	79,18	79,23
460	79,28	79,34	79,39	79,44	79,50	79,55	79,60	79,66	79,71	79,76
470	79,81	79,86	79,92	79,97	80,02	80,07	80,12	80,18	80,23	80,28
480	80,33	80,38	80,44	80,49	80,54	80,59	80,64	80,69	80,74	80,79
490	80,84	80,89	80,94	81,00	81,05	81,09	81,15	81,20	81,25	81,30
500	81,35	81,40	81,45	81,49	81,54	81,59	81,64	81,69	81,74	81,79
510	81,84	81,89	81,94	81,99	82,03	82,08	82,13	82,18	82,23	82,28
520	82,33	82,37	82,42	82,47	82,52	82,57	82,61	82,66	82,71	82,76
530	82,80	82,85	82,90	82,94	82,99	83,04	83,09	83,13	83,18	83,23
540	83,27	83,32	83,37	83,41	83,46	83,51	83,55	83,60	83,65	83,69
550	83,74	83,78	83,83	83,87	83,92	83,97	84,01	84,06	84,10	84,15
560	84,19	84,24	84,28	84,33	84,37	84,42	84,46	84,51	84,55	84,60
570	84,64	84,69	84,73	84,78	84,82	84,86	84,91	84,95	85,00	85,04
580	85,09	85,13	85,17	85,22	85,26	85,31	85,35	85,39	85,44	85,48
590	85,52	85,57	85,61	85,65	85,70	85,74	85,78	85,83	85,87	85,91
600	85,95	86,00	86,04	86,08	86,12	86,17	86,21	86,25	86,29	86,33
610	86,38	86,42	86,46	86,50	86,55	86,59	86,63	86,67	86,71	86,75
620	86,80	86,84	86,88	86,92	86,96	87,00	87,05	87,09	87,13	87,17
630	87,21	87,25	87,29	87,33	87,37	87,41	87,46	87,50	87,54	87,58
640	87,62	87,66	87,70	87,74	87,78	87,82	87,86	87,90	87,94	87,98
650	88,02	88,06	88,10	88,14	88,18	88,22	88,26	88,30	88,34	88,38
660	88,42	88,46	88,50	88,54	88,57	88,61	88,65	88,69	88,73	88,77
670	88,81	88,85	88,89	88,93	88,96	89,00	89,04	89,08	89,12	89,16
680	89,20	89,23	89,27	89,31	89,35	89,39	89,43	89,46	89,50	89,54
690	89,58	89,62	89,66	89,69	89,73	89,77	89,81	89,84	89,88	89,92
700	89,96	90,00	90,03	90,07	90,11	90,14	90,18	90,22	90,26	90,29
710	90,33	90,37	90,41	90,44	90,48	90,52	90,55	90,59	90,63	90,66
720	90,70	90,74	90,77	90,81	90,85	90,88	90,92	90,96	90,99	91,03
730	91,06	91,10	91,14	91,17	91,21	91,25	91,28	91,32	91,35	91,39
740	91,43	91,46	91,50	91,53	91,57	91,61	91,64	91,68	91,71	91,75
750	91,78	91,82	91,85	91,89	91,93	91,96	92,00	92,03	92,07	92,10
760	92,14	92,17	92,21	92,24	92,28	92,31	92,35	92,38	92,41	92,45
770	92,48	92,52	92,55	92,59	92,62	92,66	92,69	92,73	92,76	92,80
780	92,83	92,86	92,90	92,93	92,97	93,00	93,04	93,07	93,10	93,14
790	93,17	93,20	93,24	93,27	93,31	93,34	93,37	93,41	93,44	93,48
800	93,51	93,54	93,58	93,61	93,64	93,68	93,71	93,74	93,78	93,81
810	93,84	93,88	93,91	93,94	93,98	94,01	94,04	94,08	94,11	94,14
820	94,18	94,21	94,24	94,27	94,31	94,34	94,37	94,41	94,44	94,47
830	94,50	94,54	94,57	94,60	94,63	94,67	94,70	94,73	94,76	94,79
840	94,83	94,86	94,89	94,92	94,96	94,99	95,02	95,05	95,09	95,12
850	95,15	95,18	95,21	95,24	95,28	95,31	95,34	95,37	95,40	95,44
860	95,47	95,50	95,53	95,56	95,59	95,62	95,66	95,69	95,72	95,75
870	95,78	95,81	95,85	95,88	95,91	95,94	95,97	96,00	96,03	96,06
880	96,09	96,13	96,16	96,19	96,22	96,25	96,28	96,31	96,34	96,37
890	96,40	96,43	96,47	96,50	96,53	96,56	96,59	96,62	96,65	96,68
900	96,71	96,74	96,77	96,80	96,83	96,86	96,89	96,92	96,95	96,98
910	97,01	97,04	97,07	97,10	97,13	97,16	97,19	97,22	97,25	97,29
920	97,32	97,34	97,37	97,40	97,43	97,46	97,49	97,52	97,55	97,58
930	97,61	97,64	97,67	97,70	97,73	97,76	97,79	97,82	97,85	97,88
940	97,91	97,94	97,97	98,00	98,03	98,06	98,08	98,11	98,14	98,17
950	98,20	98,23	98,26	98,29	98,32	98,35	98,38	98,40	98,43	98,46
960	98,49	98,52	98,55	98,58	98,61	98,64	98,66	98,69	98,72	98,75
970	98,78	98,81	98,84	98,87	98,89	98,92	98,95	98,98	99,01	99,04
980	99,06	99,09	99,12	99,15	99,18	99,21	99,24	99,26	99,29	99,32
990	99,35	99,37	99,40	99,43	99,46	99,49	99,52	99,54	99,57	99,60
1000	99,63									

* Nachdruck nur mit Erlaubnis des Herausgebers.

Umrechnung* von wasserdampfgesättigten Gasvolumen auf Größe bei Körpertemperatur (37° C) 490—780 Torr

Diese Tafel gibt die Faktoren zur Umrechnung von Spirometer- auf Lungenwerte. Die Umrechnungsfaktoren wurden errechnet nach der Formel

$$f = \frac{(p - p_{t\,H_2O})\,(1 + 37\,\alpha)}{(p - p_{37°\,H_2O})\,(1 + \alpha\,t)}$$

wobei: p = aktueller Druck im Spirometervolumen

$p_{t\,H_2O}$ und $p_{37°\,H_2O}$ = Wasserdampfdruck bei der aktuellen Temperatur im Spirometervolumen und bei 37 °C in der Lunge

α = kubischer Ausdehnungskoeffizient der Luft pro °C (vgl. S. 263)

°C = Temperatur, Torr = Druck des umzurechnenden Gases

Torr / °C	490	500	510	520	530	540	550	560	570	580	590	600	610	620	630
0	1,2447	1,2423	1,2400	1,2378	1,2357	1,2337	1,2317	1,2299	1,2281	1,2263	1,2247	1,2231	1,2215	1,2200	1,2186
1	2393	2369	2347	2325	2304	2284	2265	2246	2228	2211	2195	2179	2164	2149	2134
2	2339	2315	2293	2271	2250	2231	2212	2193	2176	2159	2143	2127	2112	2097	2083
3	2284	2261	2239	2217	2197	2177	2159	2141	2123	2107	2091	2075	2060	2046	2032
4	2229	2206	2184	2163	2143	2124	2105	2088	2071	2054	2038	2023	2008	1994	1980
5	1,2174	1,2151	1,2130	1,2109	1,2089	1,2070	1,2052	1,2034	1,2018	1,2001	1,1986	1,1971	1,1956	1,1942	1,1929
6	2118	2096	2075	2054	2035	2016	1998	1981	1964	1948	1933	1918	1904	1890	1877
7	2062	2041	2020	2000	1980	1962	1944	1927	1911	1895	1880	1866	1852	1838	1825
8	2006	1985	1964	1944	1926	1907	1890	1873	1857	1842	1827	1813	1799	1786	1773
9	1949	1928	1908	1889	1870	1853	1836	1819	1803	1788	1774	1760	1746	1733	1720
10	1,1892	1,1872	1,1852	1,1833	1,1815	1,1797	1,1781	1,1764	1,1749	1,1734	1,1720	1,1706	1,1693	1,1680	1,1667
11	1835	1814	1795	1776	1759	1742	1725	1709	1694	1680	1666	1652	1639	1627	1614
12	1777	1757	1738	1720	1702	1685	1669	1654	1639	1625	1611	1598	1585	1573	1561
13	1718	1698	1680	1662	1645	1629	1613	1598	1584	1570	1556	1543	1531	1519	1507
14	1658	1640	1622	1604	1588	1572	1556	1542	1528	1514	1501	1488	1476	1464	1453
15	1,1598	1,1580	1,1562	1,1546	1,1529	1,1514	1,1499	1,1485	1,1471	1,1458	1,1445	1,1433	1,1421	1,1409	1,1398
16	1538	1520	1503	1486	1471	1456	1441	1427	1414	1401	1389	1377	1365	1354	1343
17	1476	1459	1442	1426	1411	1397	1383	1369	1356	1344	1332	1320	1309	1298	1288
18	1414	1397	1381	1366	1351	1337	1323	1310	1298	1286	1274	1263	1252	1242	1232
19	1351	1335	1319	1304	1290	1276	1263	1251	1239	1227	1216	1205	1195	1184	1175
20	1,1287	1,1271	1,1256	1,1242	1,1228	1,1215	1,1203	1,1191	1,1179	1,1168	1,1157	1,1146	1,1136	1,1127	1,1117
21	1221	1207	1193	1179	1166	1153	1141	1129	1118	1108	1097	1087	1078	1068	1059
22	1156	1141	1128	1115	1102	1090	1079	1068	1057	1047	1037	1027	1018	1009	1001
23	1089	1075	1062	1050	1038	1026	1015	1005	0995	0985	0975	0966	0958	0949	0941
24	1020	1008	0995	0983	0972	0961	0951	0941	0931	0922	0913	0905	0896	0888	0881
25	1,0951	1,0939	1,0927	1,0916	1,0906	1,0895	1,0886	1,0876	1,0867	1,0859	1,0850	1,0842	1,0834	1,0827	1,0819
26	0880	0869	0858	0848	0838	0828	0819	0810	0802	0794	0786	0778	0771	0764	0757
27	0808	0798	0788	0778	0769	0760	0752	0744	0736	0728	0721	0714	0707	0701	0694
28	0735	0725	0716	0707	0699	0691	0683	0675	0668	0661	0655	0648	0642	0636	0630
29	0660	0651	0643	0635	0627	0620	0613	0606	0600	0593	0587	0581	0576	0570	0565
30	1,0584	1,0576	1,0568	1,0561	1,0554	1,0548	1,0542	1,0536	1,0530	1,0524	1,0519	1,0514	1,0509	1,0504	1,0499
31	0506	0499	0492	0486	0480	0474	0469	0464	0459	0454	0449	0444	0440	0436	0432
32	0426	0420	0415	0409	0404	0399	0395	0390	0386	0382	0378	0374	0370	0367	0363
33	0345	0340	0335	0331	0327	0323	0319	0315	0312	0309	0304	0302	0299	0296	0293
34	0261	0258	0254	0251	0248	0245	0242	0239	0236	0234	0231	0229	0227	0224	0222
35	1,0176	1,0174	1,0171	1,0169	1,0167	1,0165	1,0163	1,0161	1,0159	1,0157	1,0156	1,0154	1,0153	1,0151	1,0150
36	0089	0088	0087	0086	0084	0083	0082	0081	0081	0080	0079	0078	0077	0076	0076

Torr / °C	640	650	660	670	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	780
0	1,2172	1,2158	1,2145	1,2133	1,2120	1,2109	1,2097	1,2086	1,2075	1,2065	1,2054	1,2045	1,2035	1,2025	1,2016
1	2121	2107	2094	2082	2070	2058	2047	2036	2025	2015	2005	1995	1985	1976	1967
2	2070	2056	2044	2031	2019	2008	1997	1986	1975	1965	1955	1945	1936	1927	1918
3	2018	2005	1993	1981	1969	1957	1946	1936	1925	1915	1905	1896	1886	1877	1869
4	1967	1954	1942	1930	1918	1907	1896	1885	1875	1865	1855	1846	1837	1828	1819
5	1,1916	1,1903	1,1891	1,1879	1,1867	1,1856	1,1846	1,1835	1,1825	1,1815	1,1806	1,1796	1,1787	1,1778	1,1770
6	1864	1852	1840	1828	1817	1806	1795	1785	1775	1765	1756	1746	1738	1729	1721
7	1812	1800	1788	1777	1765	1755	1744	1734	1724	1715	1706	1697	1688	1679	1671
8	1760	1748	1736	1725	1714	1704	1693	1683	1674	1664	1655	1647	1638	1630	1621
9	1708	1696	1685	1674	1663	1652	1642	1633	1623	1614	1605	1596	1588	1580	1572
10	1,1655	1,1644	1,1633	1,1622	1,1611	1,1601	1,1591	1,1582	1,1572	1,1563	1,1554	1,1546	1,1538	1,1530	1,1522
11	1603	1591	1580	1570	1559	1549	1540	1530	1521	1512	1504	1495	1487	1479	1472
12	1549	1538	1528	1517	1507	1497	1488	1479	1470	1461	1453	1444	1437	1429	1421
13	1496	1485	1475	1464	1455	1445	1436	1427	1418	1410	1401	1393	1386	1378	1371
14	1442	1431	1421	1411	1402	1392	1383	1375	1366	1358	1350	1342	1334	1327	1320
15	1,1388	1,1377	1,1367	1,1358	1,1348	1,1339	1,1331	1,1322	1,1314	1,1306	1,1298	1,1290	1,1283	1,1276	1,1269
16	1333	1323	1313	1304	1295	1286	1277	1269	1261	1253	1246	1238	1231	1224	1217
17	1278	1268	1258	1249	1241	1232	1224	1216	1208	1200	1193	1186	1179	1172	1166
18	1222	1212	1203	1194	1186	1178	1170	1162	1154	1147	1140	1133	1126	1120	1113
19	1165	1156	1147	1139	1131	1123	1115	1108	1100	1093	1086	1080	1073	1067	1061
20	1,1108	1,1100	1,1091	1,1083	1,1075	1,1067	1,1060	1,1053	1,1046	1,1039	1,1032	1,1026	1,1020	1,1014	1,1008
21	1051	1042	1034	1026	1019	1011	1004	0997	0991	0984	0978	0972	0966	0960	0954
22	0992	0984	0976	0969	0962	0955	0948	0941	0935	0929	0923	0917	0911	0905	0900
23	0933	0926	0918	0911	0904	0897	0891	0885	0879	0873	0867	0861	0856	0851	0845
24	0873	0866	0859	0852	0846	0839	0833	0827	0822	0816	0810	0805	0800	0795	0790
25	1,0812	1,0806	1,0799	1,0793	1,0787	1,0781	1,0775	1,0769	1,0764	1,0759	1,0753	1,0748	1,0744	1,0739	1,0734
26	0751	0744	0738	0732	0727	0721	0716	0710	0705	0700	0696	0691	0686	0682	0678
27	0688	0682	0677	0671	0666	0661	0656	0651	0646	0642	0637	0633	0629	0625	0621
28	0625	0619	0614	0609	0604	0599	0595	0590	0586	0582	0578	0574	0570	0566	0563
29	0560	0555	0551	0546	0542	0537	0533	0529	0525	0521	0518	0514	0511	0507	0504
30	1,0495	1,0490	1,0486	1,0482	1,0478	1,0474	1,0470	1,0467	1,0463	1,0460	1,0457	1,0453	1,0450	1,0447	1,0444
31	0428	0424	0420	0417	0413	0410	0407	0403	0400	0397	0395	0392	0389	0386	0384
32	0360	0357	0353	0350	0347	0345	0342	0339	0337	0334	0332	0329	0327	0325	0322
33	0291	0288	0285	0283	0280	0278	0276	0274	0272	0270	0268	0266	0264	0262	0260
34	0220	0218	0216	0214	0212	0211	0209	0207	0206	0204	0202	0201	0199	0198	0197
35	1,0148	1,0147	1,0145	1,0144	1,0143	1,0142	1,0141	1,0139	1,0138	1,0137	1,0136	1,0135	1,0134	1,0133	1,0132
36	0075	0074	0073	0073	0072	0072	0071	0070	0070	0069	0069	0068	0068	0067	0067

* Nachdruck nur mit Erlaubnis des Herausgebers.

Im folgenden kann an Stelle von «Luft» ohne großen Fehler irgendein Gas angenommen werden. Vgl. Spalte rechts unter *Bemerkungen*.

Torr = Werte in der obersten waagrechten Zeile = aktueller Druck in Torricelli (mm Hg) innerhalb eines Luftvolumens unter entsprechenden Bedingungen (Temperatur, trocken oder wasserdampfgesättigt). Unter vielen Meßbedingungen entspricht dieser Druck dem atmosphärischen Druck, der am Barometer abzulesen ist, unter Zufügung einer Korrektur für Temperatur. Die Korrektur für den Wasserdampfdruck bei Wasserdampfsättigung der gemessenen Luft ist in dieser Tabelle schon eingerechnet (vgl. weiter unten unter *feucht*). Umrechnung von Millibar in Torricelli und umgekehrt vgl. S. 170.

°C = Werte in der ersten senkrechten Kolonne = aktuelle Temperatur in Grad Celsius innerhalb eines Luftvolumens unter entsprechenden Bedingungen (Druck, trocken oder wasserdampfgesättigt).

trocken = Faktor zur Umrechnung einer unter entsprechenden Bedingungen (Temperatur, Druck) gemessenen *trockenen* Luftmenge auf *Normvolumen* (0 °C, 760 Torr, trocken). Gasnormwerte sind mit der Abkürzung NTP (normal temperature and pressure) zu kennzeichnen. Von amerikanischen Lungenspezialisten ist dafür der unglückliche Ausdruck STPD (standard temperature and pressure, dry) vorgeschlagen worden, der in der medizinischen Literatur teilweise verbreitet ist.

feucht = Faktor zur Umrechnung einer unter entsprechenden Bedingungen (Temperatur, Druck) gemessenen *wasserdampfgesättigten* Luftmenge auf *Normvolumen* (0 °C, 760 Torr, trocken). Wasserdampfsättigung kann angenommen werden, wenn sich die gemessene Luft mit Wasser in Kontakt befindet. Auch die Luft in der Lunge und die Ausatmungsluft wie auch die Spirometerluft (falls sie nicht getrocknet wird) können als wasserdampfgesättigt angesehen werden. Über den Druck des gesättigten Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen vgl. S. 259–261.

Anwendung

A. Umrechnung eines gemessenen Volumens auf Normvolumen

Gesuchtes Normvolumen = gemessenes Volumen multipliziert mit dem der Meßsituation (Temperatur, Druck, trocken oder wasserdampfgesättigt) entsprechenden Umrechnungsfaktor.

Beispiele:

1. Wie groß ist das Normvolumen einer bei 712 Torr und 25 °C gemessenen trockenen Luftmenge von 1,6 Litern? Gesuchtes Normvolumen = 1,6 × 0,8581 = 1,3730 Liter (NTP).

2. Wie groß ist das Normvolumen einer bei 712 Torr und 25 °C gemessenen wasserdampfgesättigten Luftmenge von 1,6 Litern? Gesuchtes Normvolumen = 1,6 × 0,8295 = 1,3272 Liter (NTP). Diesem Rechnungsvorgang entspricht die Umrechnung von Spirometerwerten auf Normbedingungen.

B. Umrechnung eines gemessenen Volumens auf eine andere Situation

Gesuchtes Volumen = gemessenes Volumen multipliziert mit dem Umrechnungsfaktor für Normvolumen, der der Situation des gemessenen Volumens entspricht (Temperatur, Druck, trocken oder wasserdampfgesättigt), dividiert durch den Umrechnungsfaktor für Normvolumen, der der Situation des gesuchten Volumens entspricht (Temperatur, Druck, Wasserdampfsättigung).

Beispiele:

1. Welches Volumen nimmt eine bei 25 °C, 730 Torr, mit Wasser in Kontakt stehende Luftmenge von 1,6 Litern ein, wenn sie bei gleichem Druck (isobar) auf 37 °C erwärmt wird? Gesuchtes Volumen = 1,6 × 0,8512/0,7912 = 1,7213 Liter. Dieser Rechnungsvorgang entspricht der Umrechnung von Spirometerwerten auf Lungenwerte. Gasvolumen, die der Lungensituation (37 °C, Umgebungsdruck, wasserdampfgesättigt) entsprechen, werden in der medizinischen Literatur nach amerikanischen Vorschlägen oft mit BTPS gekennzeichnet (body temperature and pressure, saturated). – Umrechnungsfaktoren von Spirometer- auf Lungenwerte finden sich auf S. 262.

2. Welches Volumen nimmt eine bei 0 °C und 600 Torr gemessene trockene Luftmenge von 1,6 Litern ein, wenn sie auf 25 °C erwärmt, bei dieser Temperatur mit Wasserdampf gesättigt und auf 760 Torr komprimiert wird? Gesuchtes Volumen = 1,6 × 0,7895/0,8873 = 1,4236 Liter.

Bemerkungen

Der Tabelle sind folgende Formeln zugrunde gelegt:

$$\text{Umrechnungsfaktor auf Normvolumen } (\textit{trocken}) = \frac{p}{760(1+\alpha t)};\quad \text{Umrechnungsfaktor auf Normvolumen } (\textit{feucht}) = \frac{p-p_{H_2O}}{760(1+\alpha t)}$$

p, t = Druck und Temperatur in Torr und °C innerhalb des gemessenen Luftvolumens.

p_{H_2O} = Druck des gesättigten Wasserdampfes bei der Temperatur t (vgl. S. 259–261).

α = kubischer Wärmeausdehnungskoeffizient für Luft zwischen 0 und 100 °C und bei einem gleichbleibenden Druck von 760 Torr (isobarer Ausdehnungskoeffizient). Er beträgt nach REGNAULT (1842) 0,003 670 pro °C. Unter gleichen Bedingungen beträgt er für ein ideales Gas 0,003 661 (= 1/273,**15**), für Stickstoff 0,003 671, für Kohlenmonoxyd 0,003 669, für Kohlendioxyd 0,003 723, für Acetylen 0,003 739 usw. Wie man sieht, bleibt der Fehler klein, wenn man die für Luft korrekten Umrechnungsfaktoren für irgendwelche Gase verwendet.

Die Berechnung der Tabelle wurde so durchgeführt, daß die 4. Stelle nach dem Komma nach obigen Formeln korrekt ist, wobei die 5. Stelle nach dem Komma die Auf- oder Abrundung entschied. Differenzen zu anderen Tabellen, zum Beispiel im *Handbook of Chemistry and Physics*, erklären sich dadurch, daß dort andere Ausdehnungskoeffizienten oder aufgerundete Werte der Berechnung zugrunde gelegt wurden.

Torr	600		601		602		603		604		605		606		607		608		609	
°C	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*
0	0,7895	*0,7834*	0,7908	*0,7848*	0,7921	*0,7861*	0,7934	*0,7874*	0,7947	*0,7887*	0,7961	*0,7900*	0,7974	*0,7913*	0,7987	*0,7927*	0,8000	*0,7940*	0,8013	*0,7953*
1	7866	*7801*	7879	*7814*	7892	*7828*	7905	*7841*	7918	*7854*	7931	*7867*	7945	*7880*	7958	*7893*	7971	*7906*	7984	*7919*
2	7837	*7768*	7850	*7781*	7863	*7794*	7876	*7807*	7889	*7820*	7903	*7833*	7916	*7846*	7929	*7859*	7942	*7873*	7955	*7886*
3	7809	*7735*	7822	*7748*	7835	*7761*	7848	*7774*	7861	*7787*	7874	*7800*	7887	*7813*	7900	*7826*	7913	*7839*	7926	*7852*
4	7781	*7701*	7793	*7714*	7806	*7727*	7819	*7740*	7832	*7753*	7845	*7766*	7858	*7779*	7871	*7792*	7884	*7805*	7897	*7818*
5	0,7752	*0,7668*	0,7765	*0,7681*	0,7778	*0,7694*	0,7791	*0,7707*	0,7804	*0,7720*	0,7817	*0,7733*	0,7830	*0,7745*	0,7843	*0,7758*	0,7856	*0,7771*	0,7869	*0,7784*
6	7725	*7634*	7738	*7647*	7750	*7660*	7763	*7673*	7776	*7686*	7789	*7699*	7802	*7712*	7815	*7724*	7828	*7737*	7841	*7750*
7	7697	*7601*	7710	*7613*	7723	*7626*	7735	*7639*	7748	*7652*	7761	*7665*	7774	*7678*	7787	*7690*	7800	*7703*	7812	*7716*
8	7670	*7567*	7682	*7580*	7695	*7592*	7708	*7605*	7721	*7618*	7733	*7631*	7746	*7643*	7759	*7656*	7772	*7669*	7785	*7682*
9	7642	*7533*	7655	*7545*	7668	*7558*	7681	*7571*	7693	*7584*	7706	*7596*	7719	*7609*	7731	*7622*	7744	*7635*	7757	*7647*
10	0,7615	*0,7498*	0,7628	*0,7511*	0,7641	*0,7524*	0,7653	*0,7536*	0,7666	*0,7549*	0,7679	*0,7562*	0,7691	*0,7575*	0,7704	*0,7587*	0,7717	*0,7600*	0,7729	*0,7613*
11	7588	*7464*	7601	*7477*	7614	*7489*	7626	*7502*	7639	*7514*	7652	*7527*	7664	*7540*	7677	*7552*	7690	*7565*	7702	*7578*
12	7562	*7429*	7574	*7442*	7587	*7454*	7600	*7467*	7612	*7480*	7625	*7492*	7637	*7505*	7650	*7517*	7663	*7530*	7675	*7543*
13	7535	*7394*	7548	*7407*	7560	*7419*	7573	*7432*	7585	*7444*	7598	*7457*	7611	*7470*	7623	*7482*	7636	*7495*	7648	*7507*
14	7509	*7359*	7521	*7371*	7534	*7384*	7546	*7396*	7559	*7409*	7572	*7421*	7584	*7434*	7597	*7447*	7609	*7459*	7622	*7472*
15	0,7483	*0,7323*	0,7495	*0,7336*	0,7508	*0,7348*	0,7520	*0,7361*	0,7533	*0,7373*	0,7545	*0,7386*	0,7558	*0,7398*	0,7570	*0,7411*	0,7583	*0,7423*	0,7595	*0,7436*
16	7457	*7287*	7469	*7300*	7482	*7312*	7494	*7325*	7507	*7337*	7519	*7350*	7531	*7362*	7544	*7374*	7556	*7387*	7569	*7399*
17	7431	*7251*	7443	*7264*	7456	*7276*	7468	*7288*	7481	*7301*	7493	*7313*	7505	*7325*	7518	*7338*	7530	*7350*	7543	*7363*
18	7406	*7215*	7418	*7227*	7430	*7239*	7443	*7252*	7455	*7264*	7467	*7276*	7480	*7289*	7492	*7301*	7504	*7313*	7517	*7326*
19	7380	*7177*	7392	*7190*	7405	*7202*	7417	*7214*	7429	*7227*	7442	*7239*	7454	*7251*	7466	*7264*	7479	*7276*	7491	*7288*
20	0,7355	*0,7140*	0,7367	*0,7152*	0,7379	*0,7164*	0,7392	*0,7177*	0,7404	*0,7189*	0,7416	*0,7201*	0,7428	*0,7213*	0,7441	*0,7226*	0,7453	*0,7238*	0,7465	*0,7250*
21	7330	*7102*	7342	*7114*	7354	*7126*	7366	*7139*	7379	*7151*	7391	*7163*	7403	*7175*	7415	*7188*	7428	*7200*	7440	*7212*
22	7305	*7064*	7317	*7076*	7329	*7088*	7341	*7100*	7354	*7112*	7366	*7124*	7378	*7137*	7390	*7149*	7402	*7161*	7415	*7173*
23	7280	*7025*	7292	*7037*	7304	*7049*	7317	*7061*	7329	*7073*	7341	*7085*	7353	*7097*	7365	*7110*	7377	*7122*	7389	*7134*
24	7256	*6985*	7268	*6997*	7280	*7009*	7292	*7021*	7304	*7033*	7316	*7046*	7328	*7058*	7340	*7070*	7352	*7082*	7364	*7094*
25	0,7231	*0,6945*	0,7243	*0,6957*	0,7255	*0,6969*	0,7267	*0,6981*	0,7279	*0,6993*	0,7292	*0,7005*	0,7304	*0,7017*	0,7316	*0,7029*	0,7328	*0,7041*	0,7340	*0,7053*
26	7207	*6904*	7219	*6916*	7231	*6928*	7243	*6940*	7255	*6952*	7267	*6964*	7279	*6976*	7291	*6988*	7303	*7000*	7315	*7012*
27	7183	*6863*	7195	*6875*	7207	*6887*	7219	*6899*	7231	*6911*	7243	*6923*	7255	*6935*	7267	*6947*	7279	*6959*	7291	*6971*
28	7159	*6821*	7171	*6833*	7183	*6845*	7195	*6857*	7207	*6869*	7219	*6880*	7231	*6892*	7243	*6904*	7255	*6916*	7266	*6928*
29	7135	*6778*	7147	*6790*	7159	*6802*	7171	*6814*	7183	*6826*	7195	*6838*	7207	*6849*	7219	*6861*	7230	*6873*	7242	*6885*
30	0,7112	*0,6735*	0,7124	*0,6746*	0,7135	*0,6758*	0,7147	*0,6770*	0,7159	*0,6782*	0,7171	*0,6794*	0,7183	*0,6806*	0,7195	*0,6817*	0,7207	*0,6829*	0,7218	*0,6841*
31	7088	*6690*	7100	*6702*	7112	*6714*	7124	*6726*	7136	*6737*	7147	*6749*	7159	*6761*	7171	*6773*	7183	*6785*	7195	*6797*
32	7065	*6645*	7077	*6657*	7089	*6669*	7100	*6680*	7112	*6692*	7124	*6704*	7136	*6716*	7147	*6728*	7159	*6739*	7171	*6751*
33	7042	*6599*	7054	*6611*	7065	*6623*	7077	*6634*	7089	*6646*	7101	*6658*	7112	*6670*	7124	*6681*	7136	*6693*	7148	*6705*
34	7019	*6552*	7031	*6564*	7042	*6576*	7054	*6587*	7066	*6599*	7077	*6611*	7089	*6622*	7101	*6634*	7113	*6646*	7124	*6657*
35	0,6996	*0,6504*	0,7008	*0,6516*	0,7019	*0,6528*	0,7031	*0,6539*	0,7043	*0,6551*	0,7054	*0,6563*	0,7066	*0,6574*	0,7078	*0,6586*	0,7089	*0,6598*	0,7101	*0,6609*
36	6973	*6455*	6985	*6467*	6997	*6479*	7008	*6490*	7020	*6502*	7032	*6514*	7043	*6525*	7055	*6537*	7066	*6548*	7078	*6560*
37	6951	*6406*	6962	*6417*	6974	*6429*	6986	*6440*	6997	*6452*	7009	*6464*	7020	*6475*	7032	*6487*	7044	*6498*	7055	*6510*
38	6928	*6355*	6940	*6366*	6952	*6378*	6963	*6389*	6975	*6401*	6986	*6412*	6998	*6424*	7009	*6436*	7021	*6447*	7032	*6459*
39	6906	*6303*	6918	*6314*	6929	*6326*	6941	*6337*	6952	*6349*	6964	*6360*	6975	*6372*	6987	*6383*	6998	*6395*	7010	*6406*
40	0,6884	*0,6249*	0,6896	*0,6261*	0,6907	*0,6272*	0,6919	*0,6284*	0,6930	*0,6295*	0,6942	*0,6307*	0,6953	*0,6318*	0,6964	*0,6330*	0,6976	*0,6341*	0,6987	*0,6353*
41	6862	*6195*	6874	*6206*	6885	*6218*	6896	*6229*	6908	*6241*	6919	*6252*	6931	*6264*	6942	*6275*	6954	*6286*	6965	*6298*
42	6840	*6139*	6852	*6151*	6863	*6162*	6875	*6173*	6886	*6185*	6897	*6196*	6909	*6208*	6920	*6219*	6932	*6230*	6943	*6242*

* Nachdruck der Seiten 263–272 nur mit Erlaubnis des Herausgebers.

Torr	610		611		612		613		614		615		616		617		618		619	
°C	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*
0	0,8026	*0,7966*	0,8039	*0,7979*	0,8053	*0,7992*	0,8066	*0,8006*	0,8079	*0,8019*	0,8092	*0,8032*	0,8105	*0,8045*	0,8118	*0,8058*	0,8132	*0,8071*	0,8145	*0,8084*
1	7997	*7932*	8010	*7945*	8023	*7959*	8036	*7972*	8049	*7985*	8063	*7998*	8076	*8011*	8089	*8024*	8102	*8037*	8115	*8050*
2	7968	*7899*	7981	*7912*	7994	*7925*	8007	*7938*	8020	*7951*	8033	*7964*	8046	*7977*	8059	*7990*	8072	*8003*	8085	*8016*
3	7939	*7865*	7952	*7878*	7965	*7891*	7978	*7904*	7991	*7917*	8004	*7930*	8017	*7943*	8030	*7956*	8043	*7969*	8056	*7982*
4	7910	*7831*	7923	*7844*	7936	*7857*	7949	*7870*	7962	*7883*	7975	*7896*	7988	*7909*	8001	*7922*	8014	*7935*	8027	*7948*
5	0,7882	*0,7797*	0,7895	*0,7810*	0,7908	*0,7823*	0,7920	*0,7836*	0,7933	*0,7849*	0,7946	*0,7862*	0,7959	*0,7875*	0,7972	*0,7888*	0,7985	*0,7901*	0,7998	*0,7913*
6	7853	*7763*	7866	*7776*	7879	*7789*	7892	*7802*	7905	*7815*	7918	*7827*	7931	*7840*	7944	*7853*	7956	*7866*	7969	*7879*
7	7825	*7729*	7838	*7742*	7851	*7755*	7864	*7767*	7877	*7780*	7889	*7793*	7902	*7806*	7915	*7819*	7928	*7832*	7941	*7844*
8	7797	*7695*	7810	*7707*	7823	*7720*	7836	*7733*	7849	*7746*	7861	*7758*	7874	*7771*	7887	*7784*	7900	*7797*	7912	*7810*
9	7770	*7660*	7782	*7673*	7795	*7686*	7808	*7698*	7821	*7711*	7833	*7724*	7846	*7736*	7859	*7749*	7872	*7762*	7884	*7775*
10	0,7742	*0,7625*	0,7755	*0,7638*	0,7768	*0,7651*	0,7780	*0,7663*	0,7793	*0,7676*	0,7806	*0,7689*	0,7818	*0,7701*	0,7831	*0,7714*	0,7844	*0,7727*	0,7856	*0,7740*
11	7715	*7590*	7728	*7603*	7740	*7616*	7753	*7628*	7765	*7641*	7778	*7654*	7791	*7666*	7803	*7679*	7816	*7692*	7829	*7704*
12	7688	*7555*	7700	*7568*	7713	*7580*	7726	*7593*	7738	*7606*	7751	*7618*	7763	*7631*	7776	*7643*	7789	*7656*	7801	*7669*
13	7661	*7520*	7673	*7532*	7686	*7545*	7698	*7557*	7711	*7570*	7724	*7583*	7736	*7595*	7749	*7608*	7761	*7620*	7774	*7633*
14	7634	*7484*	7647	*7497*	7659	*7509*	7672	*7522*	7684	*7534*	7697	*7547*	7709	*7559*	7722	*7572*	7734	*7584*	7747	*7597*
15	0,7608	*0,7448*	0,7620	*0,7461*	0,7632	*0,7473*	0,7645	*0,7485*	0,7657	*0,7498*	0,7670	*0,7510*	0,7682	*0,7523*	0,7695	*0,7535*	0,7707	*0,7548*	0,7720	*0,7560*
16	7581	*7412*	7594	*7424*	7606	*7437*	7618	*7449*	7631	*7461*	7643	*7474*	7656	*7486*	7668	*7499*	7681	*7511*	7693	*7524*
17	7555	*7375*	7567	*7387*	7580	*7400*	7592	*7412*	7605	*7425*	7617	*7437*	7629	*7449*	7642	*7462*	7654	*7474*	7666	*7486*
18	7529	*7338*	7541	*7350*	7554	*7363*	7566	*7375*	7578	*7387*	7591	*7400*	7603	*7412*	7615	*7424*	7628	*7437*	7640	*7449*
19	7503	*7300*	7515	*7313*	7528	*7325*	7540	*7337*	7552	*7350*	7565	*7362*	7577	*7374*	7589	*7387*	7602	*7399*	7614	*7411*
20	0,7477	*0,7263*	0,7490	*0,7275*	0,7502	*0,7287*	0,7514	*0,7299*	0,7527	*0,7312*	0,7539	*0,7324*	0,7551	*0,7336*	0,7563	*0,7348*	0,7576	*0,7361*	0,7588	*0,7373*
21	7452	*7224*	7464	*7236*	7476	*7249*	7489	*7261*	7501	*7273*	7513	*7285*	7525	*7297*	7538	*7310*	7550	*7322*	7562	*7334*
22	7427	*7185*	7439	*7197*	7451	*7210*	7463	*7222*	7475	*7234*	7488	*7246*	7500	*7258*	7512	*7271*	7524	*7283*	7536	*7295*
23	7402	*7146*	7414	*7158*	7426	*7170*	7438	*7182*	7450	*7194*	7462	*7207*	7474	*7219*	7486	*7231*	7499	*7243*	7511	*7255*
24	7377	*7106*	7389	*7118*	7401	*7130*	7413	*7142*	7425	*7154*	7437	*7166*	7449	*7179*	7461	*7191*	7473	*7203*	7485	*7215*
25	0,7352	*0,7065*	0,7364	*0,7078*	0,7376	*0,7090*	0,7388	*0,7102*	0,7400	*0,7114*	0,7412	*0,7126*	0,7424	*0,7138*	0,7436	*0,7150*	0,7448	*0,7162*	0,7460	*0,7174*
26	7327	*7024*	7339	*7036*	7351	*7048*	7363	*7060*	7375	*7072*	7387	*7084*	7399	*7096*	7411	*7108*	7423	*7120*	7435	*7132*
27	7303	*6983*	7315	*6995*	7327	*7007*	7339	*7018*	7351	*7030*	7363	*7042*	7375	*7054*	7386	*7066*	7398	*7078*	7410	*7090*
28	7278	*6940*	7290	*6952*	7302	*6964*	7314	*6976*	7326	*6988*	7338	*7000*	7350	*7012*	7362	*7024*	7374	*7036*	7386	*7048*
29	7254	*6897*	7266	*6909*	7278	*6921*	7290	*6933*	7302	*6945*	7314	*6956*	7326	*6968*	7337	*6980*	7349	*6992*	7361	*7004*
30	0,7230	*0,6853*	0,7242	*0,6865*	0,7254	*0,6877*	0,7266	*0,6889*	0,7278	*0,6900*	0,7290	*0,6912*	0,7301	*0,6924*	0,7313	*0,6936*	0,7325	*0,6948*	0,7337	*0,6960*
31	7206	*6808*	7218	*6820*	7230	*6832*	7242	*6844*	7254	*6856*	7266	*6867*	7277	*6879*	7289	*6891*	7301	*6903*	7313	*6915*
32	7183	*6763*	7195	*6775*	7206	*6786*	7218	*6798*	7230	*6810*	7242	*6822*	7253	*6833*	7265	*6845*	7277	*6857*	7289	*6869*
33	7159	*6716*	7171	*6728*	7183	*6740*	7194	*6752*	7206	*6763*	7218	*6775*	7230	*6787*	7241	*6799*	7253	*6810*	7265	*6822*
34	7136	*6669*	7148	*6681*	7159	*6693*	7171	*6704*	7183	*6716*	7194	*6728*	7206	*6739*	7218	*6751*	7229	*6763*	7241	*6774*
35	0,7113	*0,6621*	0,7124	*0,6633*	0,7136	*0,6644*	0,7148	*0,6656*	0,7159	*0,6668*	0,7171	*0,6679*	0,7183	*0,6691*	0,7194	*0,6703*	0,7206	*0,6714*	0,7218	*0,6726*
36	7090	*6572*	7101	*6583*	7113	*6595*	7125	*6607*	7136	*6618*	7148	*6630*	7159	*6641*	7171	*6653*	7183	*6665*	7194	*6676*
37	7067	*6521*	7078	*6533*	7090	*6545*	7101	*6556*	7113	*6568*	7125	*6579*	7136	*6591*	7148	*6603*	7159	*6614*	7171	*6626*
38	7044	*6470*	7056	*6482*	7067	*6493*	7079	*6505*	7090	*6516*	7102	*6528*	7113	*6539*	7125	*6551*	7136	*6563*	7148	*6574*
39	7021	*6418*	7033	*6429*	7044	*6441*	7056	*6452*	7067	*6464*	7079	*6475*	7090	*6487*	7102	*6498*	7113	*6510*	7125	*6521*
40	0,6999	*0,6364*	0,7010	*0,6376*	0,7022	*0,6387*	0,7033	*0,6399*	0,7045	*0,6410*	0,7056	*0,6421*	0,7068	*0,6433*	0,7079	*0,6444*	0,7091	*0,6456*	0,7102	*0,6467*
41	6977	*6309*	6988	*6321*	6999	*6332*	7011	*6344*	7022	*6355*	7034	*6367*	7045	*6378*	7057	*6389*	7068	*6401*	7079	*6412*
42	6954	*6253*	6966	*6265*	6977	*6276*	6989	*6287*	7000	*6299*	7011	*6310*	7023	*6322*	7034	*6333*	7046	*6344*	7057	*6356*

	620		621		622		623		624		625		626		627		628		629	
0	0,8158	*0,8098*	0,8171	*0,8111*	0,8184	*0,8124*	0,8197	*0,8137*	0,8211	*0,8150*	0,8224	*0,8163*	0,8237	*0,8177*	0,8250	*0,8190*	0,8263	*0,8203*	0,8276	*0,8216*
1	8128	*8063*	8141	*8077*	8154	*8090*	8167	*8103*	8181	*8116*	8194	*8129*	8207	*8142*	8220	*8155*	8233	*8168*	8246	*8181*
2	8098	*8029*	8112	*8042*	8125	*8055*	8138	*8068*	8151	*8082*	8164	*8095*	8177	*8108*	8190	*8121*	8203	*8134*	8216	*8147*
3	8069	*7995*	8082	*8008*	8095	*8021*	8108	*8034*	8121	*8047*	8134	*8060*	8147	*8073*	8160	*8086*	8173	*8099*	8186	*8112*
4	8040	*7961*	8053	*7974*	8066	*7987*	8079	*8000*	8092	*8013*	8105	*8026*	8118	*8039*	8131	*8052*	8144	*8064*	8157	*8077*
5	0,8011	*0,7926*	0,8024	*0,7939*	0,8037	*0,7952*	0,8050	*0,7965*	0,8063	*0,7978*	0,8075	*0,7991*	0,8088	*0,8004*	0,8101	*0,8017*	0,8114	*0,8030*	0,8127	*0,8043*
6	7982	*7892*	7995	*7905*	8008	*7918*	8021	*7930*	8034	*7943*	8047	*7956*	8059	*7969*	8072	*7982*	8085	*7995*	8098	*8008*
7	7954	*7857*	7966	*7870*	7979	*7883*	7992	*7896*	8005	*7909*	8018	*7921*	8031	*7934*	8043	*7947*	8056	*7960*	8069	*7973*
8	7925	*7822*	7938	*7835*	7951	*7848*	7964	*7861*	7976	*7874*	7989	*7886*	8002	*7899*	8015	*7912*	8027	*7925*	8040	*7937*
9	7897	*7787*	7910	*7800*	7923	*7813*	7935	*7826*	7948	*7838*	7961	*7851*	7973	*7864*	7986	*7877*	7999	*7889*	8012	*7902*
10	0,7869	*0,7752*	0,7882	*0,7765*	0,7894	*0,7778*	0,7907	*0,7790*	0,7920	*0,7803*	0,7933	*0,7816*	0,7945	*0,7828*	0,7958	*0,7841*	0,7971	*0,7854*	0,7983	*0,7866*
11	7841	*7717*	7854	*7729*	7867	*7742*	7879	*7755*	7892	*7767*	7905	*7780*	7917	*7793*	7930	*7805*	7943	*7818*	7955	*7831*
12	7814	*7681*	7826	*7694*	7839	*7706*	7852	*7719*	7864	*7732*	7877	*7744*	7889	*7757*	7902	*7769*	7915	*7782*	7927	*7795*
13	7786	*7645*	7799	*7658*	7812	*7670*	7824	*7683*	7837	*7696*	7849	*7708*	7862	*7721*	7874	*7733*	7887	*7746*	7899	*7758*
14	7759	*7609*	7772	*7622*	7784	*7634*	7797	*7647*	7809	*7659*	7822	*7672*	7834	*7684*	7847	*7697*	7859	*7709*	7872	*7722*
15	0,7732	*0,7573*	0,7745	*0,7585*	0,7757	*0,7598*	0,7770	*0,7610*	0,7782	*0,7623*	0,7795	*0,7635*	0,7807	*0,7648*	0,7820	*0,7660*	0,7832	*0,7673*	0,7844	*0,7685*
16	7705	*7536*	7718	*7548*	7730	*7561*	7743	*7573*	7755	*7586*	7768	*7598*	7780	*7611*	7792	*7623*	7805	*7635*	7817	*7648*
17	7679	*7499*	7691	*7511*	7704	*7524*	7716	*7536*	7728	*7548*	7741	*7561*	7753	*7573*	7766	*7586*	7778	*7598*	7790	*7610*
18	7652	*7461*	7665	*7474*	7677	*7486*	7689	*7498*	7702	*7511*	7714	*7523*	7726	*7535*	7739	*7548*	7751	*7560*	7763	*7572*
19	7626	*7423*	7638	*7436*	7651	*7448*	7663	*7460*	7675	*7473*	7688	*7485*	7700	*7497*	7712	*7510*	7725	*7522*	7737	*7534*
20	0,7600	*0,7385*	0,7612	*0,7397*	0,7625	*0,7410*	0,7637	*0,7422*	0,7649	*0,7434*	0,7661	*0,7446*	0,7674	*0,7459*	0,7686	*0,7471*	0,7698	*0,7483*	0,7710	*0,7495*
21	7574	*7346*	7586	*7359*	7599	*7371*	7611	*7383*	7623	*7395*	7635	*7407*	7647	*7420*	7660	*7432*	7672	*7444*	7684	*7456*
22	7548	*7307*	7561	*7319*	7573	*7331*	7585	*7344*	7597	*7356*	7609	*7368*	7621	*7380*	7634	*7392*	7646	*7404*	7658	*7417*
23	7523	*7267*	7535	*7279*	7547	*7292*	7559	*7304*	7571	*7316*	7584	*7328*	7596	*7340*	7608	*7352*	7620	*7364*	7632	*7376*
24	7498	*7227*	7510	*7239*	7522	*7251*	7534	*7263*	7546	*7275*	7558	*7287*	7570	*7299*	7582	*7312*	7594	*7324*	7606	*7336*
25	0,7472	*0,7186*	0,7484	*0,7198*	0,7496	*0,7210*	0,7508	*0,7222*	0,7521	*0,7234*	0,7533	*0,7246*	0,7545	*0,7258*	0,7557	*0,7270*	0,7569	*0,7282*	0,7581	*0,7294*
26	7447	*7144*	7459	*7156*	7471	*7168*	7483	*7181*	7495	*7193*	7507	*7205*	7519	*7217*	7531	*7229*	7543	*7241*	7555	*7253*
27	7422	*7102*	7434	*7114*	7446	*7126*	7458	*7138*	7470	*7150*	7482	*7162*	7494	*7174*	7506	*7186*	7518	*7198*	7530	*7210*
28	7398	*7059*	7410	*7071*	7422	*7083*	7434	*7095*	7445	*7107*	7457	*7119*	7469	*7131*	7481	*7143*	7493	*7155*	7505	*7167*
29	7373	*7016*	7385	*7028*	7397	*7040*	7409	*7052*	7421	*7063*	7433	*7075*	7445	*7087*	7456	*7099*	7468	*7111*	7480	*7123*
30	0,7349	*0,6972*	0,7361	*0,6983*	0,7372	*0,6995*	0,7384	*0,7007*	0,7396	*0,7019*	0,7408	*0,7031*	0,7420	*0,7043*	0,7432	*0,7055*	0,7444	*0,7066*	0,7455	*0,7078*
31	7325	*6927*	7336	*6938*	7348	*6950*	7360	*6962*	7372	*6974*	7384	*6986*	7395	*6997*	7407	*7009*	7419	*7021*	7431	*7033*
32	7301	*6881*	7312	*6892*	7324	*6904*	7336	*6916*	7348	*6928*	7359	*6939*	7371	*6951*	7383	*6963*	7395	*6975*	7406	*6987*
33	7277	*6834*	7288	*6846*	7300	*6857*	7312	*6869*	7324	*6881*	7335	*6892*	7347	*6904*	7359	*6916*	7371	*6928*	7382	*6939*
34	7253	*6786*	7265	*6798*	7276	*6810*	7288	*6821*	7300	*6833*	7311	*6845*	7323	*6856*	7335	*6868*	7346	*6880*	7358	*6891*
35	0,7229	*0,6738*	0,7241	*0,6749*	0,7253	*0,6761*	0,7264	*0,6773*	0,7276	*0,6784*	0,7288	*0,6796*	0,7299	*0,6807*	0,7311	*0,6819*	0,7323	*0,6831*	0,7334	*0,6842*
36	7206	*6688*	7217	*6700*	7229	*6711*	7241	*6723*	7252	*6734*	7264	*6746*	7276	*6758*	7287	*6769*	7299	*6781*	7310	*6793*
37	7183	*6637*	7194	*6649*	7206	*6660*	7217	*6672*	7229	*6684*	7240	*6695*	7252	*6707*	7264	*6718*	7275	*6730*	7287	*6742*
38	7159	*6586*	7171	*6597*	7183	*6609*	7194	*6620*	7206	*6632*	7217	*6643*	7229	*6655*	7240	*6666*	7252	*6678*	7263	*6690*
39	7136	*6533*	7148	*6544*	7159	*6556*	7171	*6567*	7182	*6579*	7194	*6590*	7206	*6602*	7217	*6613*	7229	*6625*	7240	*6636*
40	0,7114	*0,6479*	0,7125	*0,6490*	0,7137	*0,6502*	0,7148	*0,6513*	0,7160	*0,6525*	0,7171	*0,6536*	0,7182	*0,6548*	0,7194	*0,6559*	0,7205	*0,6571*	0,7217	*0,6582*
41	7091	*6424*	7102	*6435*	7114	*6447*	7125	*6458*	7137	*6469*	7148	*6481*	7160	*6492*	7171	*6504*	7182	*6515*	7194	*6527*
42	7068	*6367*	7080	*6379*	7091	*6390*	7103	*6401*	7114	*6413*	7125	*6424*	7137	*6436*	7148	*6447*	7160	*6458*	7171	*6470*

Torr / °C	630		631		632		633		634		635		636		637		638		639	
	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*
0	0,8289	*0,8229*	0,8303	*0,8242*	0,8316	*0,8256*	0,8329	*0,8269*	0,8342	*0,8282*	0,8355	*0,8295*	0,8368	*0,8308*	0,8382	*0,8321*	0,8395	*0,8334*	0,8408	*0,8348*
1	8259	*8195*	8272	*8208*	8285	*8221*	8298	*8234*	8312	*8247*	8325	*8260*	8338	*8273*	8351	*8286*	8364	*8299*	8377	*8313*
2	8229	*8160*	8242	*8173*	8255	*8186*	8268	*8199*	8281	*8212*	8294	*8225*	8307	*8238*	8321	*8251*	8334	*8264*	8347	*8277*
3	8199	*8125*	8212	*8138*	8225	*8151*	8238	*8164*	8251	*8177*	8264	*8190*	8277	*8203*	8290	*8216*	8303	*8229*	8316	*8242*
4	8170	*8090*	8183	*8103*	8195	*8116*	8208	*8129*	8221	*8142*	8234	*8155*	8247	*8168*	8260	*8181*	8273	*8194*	8286	*8207*
5	0,8140	*0,8056*	0,8153	*0,8068*	0,8166	*0,8081*	0,8179	*0,8094*	0,8192	*0,8107*	0,8205	*0,8120*	0,8218	*0,8133*	0,8231	*0,8146*	0,8243	*0,8159*	0,8256	*0,8172*
6	8111	*8021*	8124	*8033*	8137	*8046*	8149	*8059*	8162	*8072*	8175	*8085*	8188	*8098*	8201	*8111*	8214	*8124*	8227	*8136*
7	8082	*7985*	8095	*7998*	8108	*8011*	8120	*8024*	8133	*8037*	8146	*8050*	8159	*8062*	8172	*8075*	8184	*8088*	8197	*8101*
8	8053	*7950*	8066	*7963*	8079	*7976*	8091	*7989*	8104	*8001*	8117	*8014*	8130	*8027*	8143	*8040*	8155	*8052*	8168	*8065*
9	8024	*7915*	8037	*7928*	8050	*7940*	8063	*7953*	8075	*7966*	8088	*7978*	8101	*7991*	8114	*8004*	8126	*8017*	8139	*8029*
10	0,7996	*0,7879*	0,8009	*0,7892*	0,8021	*0,7905*	0,8034	*0,7917*	0,8047	*0,7930*	0,8059	*0,7943*	0,8072	*0,7955*	0,8085	*0,7968*	0,8098	*0,7981*	0,8110	*0,7993*
11	7968	*7843*	7980	*7856*	7993	*7869*	8006	*7881*	8018	*7894*	8031	*7907*	8044	*7919*	8056	*7932*	8069	*7944*	8082	*7957*
12	7940	*7807*	7952	*7820*	7965	*7832*	7978	*7845*	7990	*7858*	8003	*7870*	8015	*7883*	8028	*7895*	8041	*7908*	8053	*7921*
13	7912	*7771*	7925	*7784*	7937	*7796*	7950	*7809*	7962	*7821*	7975	*7834*	7987	*7846*	8000	*7859*	8012	*7871*	8025	*7884*
14	7884	*7734*	7897	*7747*	7909	*7759*	7922	*7772*	7934	*7784*	7947	*7797*	7959	*7809*	7972	*7822*	7984	*7834*	7997	*7847*
15	0,7857	*0,7697*	0,7869	*0,7710*	0,7882	*0,7722*	0,7894	*0,7735*	0,7907	*0,7747*	0,7919	*0,7760*	0,7932	*0,7772*	0,7944	*0,7785*	0,7957	*0,7797*	0,7969	*0,7810*
16	7830	*7660*	7842	*7673*	7855	*7685*	7867	*7698*	7879	*7710*	7892	*7722*	7904	*7735*	7917	*7747*	7929	*7760*	7942	*7772*
17	7803	*7623*	7815	*7635*	7827	*7647*	7840	*7660*	7852	*7672*	7865	*7685*	7877	*7697*	7889	*7709*	7902	*7722*	7914	*7734*
18	7776	*7585*	7788	*7597*	7800	*7609*	7813	*7622*	7825	*7634*	7838	*7646*	7850	*7659*	7862	*7671*	7875	*7684*	7887	*7696*
19	7749	*7546*	7761	*7559*	7774	*7571*	7786	*7583*	7798	*7596*	7811	*7608*	7823	*7620*	7835	*7633*	7848	*7645*	7860	*7657*
20	0,7723	*0,7508*	0,7735	*0,7520*	0,7747	*0,7532*	0,7759	*0,7544*	0,7772	*0,7557*	0,7784	*0,7569*	0,7796	*0,7581*	0,7808	*0,7593*	0,7821	*0,7606*	0,7833	*0,7618*
21	7696	*7468*	7709	*7481*	7721	*7493*	7733	*7505*	7745	*7517*	7757	*7530*	7770	*7542*	7782	*7554*	7794	*7566*	7806	*7578*
22	7670	*7429*	7682	*7441*	7695	*7453*	7707	*7465*	7719	*7477*	7731	*7490*	7743	*7502*	7755	*7514*	7768	*7526*	7780	*7538*
23	7644	*7389*	7656	*7401*	7668	*7413*	7681	*7425*	7693	*7437*	7705	*7449*	7717	*7461*	7729	*7474*	7741	*7486*	7753	*7498*
24	7618	*7348*	7631	*7360*	7643	*7372*	7655	*7384*	7667	*7396*	7679	*7408*	7691	*7420*	7703	*7432*	7715	*7445*	7727	*7457*
25	0,7593	*0,7307*	0,7605	*0,7319*	0,7617	*0,7331*	0,7629	*0,7343*	0,7641	*0,7355*	0,7653	*0,7367*	0,7665	*0,7379*	0,7677	*0,7391*	0,7689	*0,7403*	0,7701	*0,7415*
26	7567	*7265*	7579	*7277*	7591	*7289*	7603	*7301*	7615	*7313*	7627	*7325*	7639	*7337*	7651	*7349*	7663	*7361*	7675	*7373*
27	7542	*7222*	7554	*7234*	7566	*7246*	7578	*7258*	7590	*7270*	7602	*7282*	7614	*7294*	7626	*7306*	7638	*7318*	7650	*7330*
28	7517	*7179*	7529	*7191*	7541	*7203*	7553	*7215*	7565	*7226*	7577	*7238*	7589	*7250*	7601	*7262*	7612	*7274*	7624	*7286*
29	7492	*7135*	7504	*7147*	7516	*7159*	7528	*7170*	7540	*7182*	7552	*7194*	7563	*7206*	7575	*7218*	7587	*7230*	7599	*7242*
30	0,7467	*0,7090*	0,7479	*0,7102*	0,7491	*0,7114*	0,7503	*0,7126*	0,7515	*0,7138*	0,7527	*0,7149*	0,7538	*0,7161*	0,7550	*0,7173*	0,7562	*0,7185*	0,7574	*0,7197*
31	7443	*7045*	7455	*7056*	7466	*7068*	7478	*7080*	7490	*7092*	7502	*7104*	7514	*7116*	7525	*7127*	7537	*7139*	7549	*7151*
32	7418	*6998*	7430	*7010*	7442	*7022*	7454	*7034*	7465	*7045*	7477	*7057*	7489	*7069*	7501	*7081*	7512	*7093*	7524	*7104*
33	7394	*6951*	7406	*6963*	7417	*6975*	7429	*6986*	7441	*6998*	7453	*7010*	7464	*7022*	7476	*7033*	7488	*7045*	7500	*7057*
34	7370	*6903*	7382	*6915*	7393	*6927*	7405	*6938*	7417	*6950*	7428	*6962*	7440	*6973*	7452	*6985*	7463	*6997*	7475	*7008*
35	0,7346	*0,6854*	0,7358	*0,6866*	0,7369	*0,6877*	0,7381	*0,6889*	0,7393	*0,6901*	0,7404	*0,6912*	0,7416	*0,6924*	0,7428	*0,6936*	0,7439	*0,6947*	0,7451	*0,6959*
36	7322	*6804*	7334	*6816*	7345	*6827*	7357	*6839*	7369	*6851*	7380	*6862*	7392	*6874*	7403	*6886*	7415	*6897*	7427	*6909*
37	7298	*6753*	7310	*6765*	7322	*6776*	7333	*6788*	7345	*6799*	7356	*6811*	7368	*6823*	7380	*6834*	7391	*6846*	7403	*6857*
38	7275	*6701*	7286	*6713*	7298	*6724*	7310	*6736*	7321	*6747*	7333	*6759*	7344	*6770*	7356	*6782*	7367	*6793*	7379	*6805*
39	7252	*6648*	7263	*6659*	7275	*6671*	7286	*6682*	7298	*6694*	7309	*6705*	7321	*6717*	7332	*6729*	7344	*6740*	7355	*6752*
40	0,7228	*0,6594*	0,7240	*0,6605*	0,7251	*0,6617*	0,7263	*0,6628*	0,7274	*0,6639*	0,7286	*0,6651*	0,7297	*0,6662*	0,7309	*0,6674*	0,7320	*0,6685*	0,7332	*0,6697*
41	7205	*6538*	7217	*6549*	7228	*6561*	7240	*6572*	7251	*6584*	7262	*6595*	7274	*6607*	7285	*6618*	7297	*6630*	7308	*6641*
42	7182	*6481*	7194	*6493*	7205	*6504*	7217	*6515*	7228	*6527*	7239	*6538*	7251	*6550*	7262	*6561*	7274	*6572*	7285	*6584*

	640		641		642		643		644		645		646		647		648		649	
0	0,8421	*0,8361*	0,8434	*0,8374*	0,8447	*0,8387*	0,8461	*0,8400*	0,8474	*0,8413*	0,8487	*0,8427*	0,8500	*0,8440*	0,8513	*0,8453*	0,8526	*0,8466*	0,8539	*0,8479*
1	8390	*8326*	8403	*8339*	8416	*8352*	8430	*8365*	8443	*8378*	8456	*8391*	8469	*8404*	8482	*8417*	8495	*8431*	8508	*8444*
2	8360	*8291*	8373	*8304*	8386	*8317*	8399	*8330*	8412	*8343*	8425	*8356*	8438	*8369*	8451	*8382*	8464	*8395*	8477	*8408*
3	8329	*8255*	8342	*8268*	8355	*8281*	8368	*8294*	8381	*8307*	8394	*8320*	8407	*8333*	8420	*8346*	8433	*8359*	8446	*8372*
4	8299	*8220*	8312	*8233*	8325	*8246*	8338	*8259*	8351	*8272*	8364	*8285*	8377	*8298*	8390	*8311*	8403	*8324*	8416	*8337*
5	0,8269	*0,8185*	0,8282	*0,8198*	0,8295	*0,8211*	0,8308	*0,8224*	0,8321	*0,8236*	0,8334	*0,8249*	0,8347	*0,8262*	0,8360	*0,8275*	0,8373	*0,8288*	0,8386	*0,8301*
6	8240	*8149*	8252	*8162*	8265	*8175*	8278	*8188*	8291	*8201*	8304	*8214*	8317	*8227*	8330	*8239*	8343	*8252*	8355	*8265*
7	8210	*8114*	8223	*8127*	8236	*8139*	8249	*8152*	8261	*8165*	8274	*8178*	8287	*8191*	8300	*8204*	8313	*8216*	8326	*8229*
8	8181	*8078*	8194	*8091*	8206	*8104*	8219	*8116*	8232	*8129*	8245	*8142*	8258	*8155*	8270	*8168*	8283	*8180*	8296	*8193*
9	8152	*8042*	8165	*8055*	8177	*8068*	8190	*8080*	8203	*8093*	8215	*8106*	8228	*8119*	8241	*8131*	8254	*8144*	8266	*8157*
10	0,8123	*0,8006*	0,8136	*0,8019*	0,8148	*0,8031*	0,8161	*0,8044*	0,8174	*0,8057*	0,8186	*0,8070*	0,8199	*0,8082*	0,8212	*0,8095*	0,8224	*0,8108*	0,8237	*0,8120*
11	8094	*7970*	8107	*7982*	8120	*7995*	8132	*8008*	8145	*8020*	8158	*8033*	8170	*8046*	8183	*8058*	8195	*8071*	8208	*8084*
12	8066	*7933*	8078	*7946*	8091	*7958*	8104	*7971*	8116	*7984*	8129	*7996*	8141	*8009*	8154	*8021*	8167	*8034*	8179	*8047*
13	8038	*7897*	8050	*7909*	8063	*7922*	8075	*7934*	8088	*7947*	8100	*7959*	8113	*7972*	8125	*7984*	8138	*7997*	8151	*8010*
14	8010	*7860*	8022	*7872*	8035	*7885*	8047	*7897*	8060	*7910*	8072	*7922*	8085	*7935*	8097	*7947*	8110	*7960*	8122	*7972*
15	0,7982	*0,7822*	0,7994	*0,7835*	0,8007	*0,7847*	0,8019	*0,7860*	0,8032	*0,7872*	0,8044	*0,7885*	0,8056	*0,7897*	0,8069	*0,7909*	0,8081	*0,7922*	0,8094	*0,7934*
16	7954	*7785*	7966	*7797*	7979	*7809*	7991	*7822*	8004	*7834*	8016	*7847*	8029	*7859*	8041	*7872*	8053	*7884*	8066	*7896*
17	7927	*7747*	7939	*7759*	7951	*7771*	7964	*7784*	7976	*7796*	7988	*7808*	8001	*7821*	8013	*7833*	8026	*7846*	8038	*7858*
18	7899	*7708*	7912	*7721*	7924	*7733*	7936	*7745*	7949	*7758*	7961	*7770*	7973	*7782*	7986	*7795*	7998	*7807*	8010	*7819*
19	7872	*7669*	7884	*7682*	7897	*7694*	7909	*7706*	7921	*7719*	7934	*7731*	7946	*7743*	7958	*7756*	7971	*7768*	7983	*7780*
20	0,7845	*0,7630*	0,7857	*0,7643*	0,7870	*0,7655*	0,7882	*0,7667*	0,7894	*0,7679*	0,7907	*0,7692*	0,7919	*0,7704*	0,7931	*0,7716*	0,7943	*0,7728*	0,7956	*0,7741*
21	7818	*7591*	7831	*7603*	7843	*7615*	7855	*7627*	7867	*7640*	7880	*7652*	7892	*7664*	7904	*7676*	7916	*7688*	7928	*7701*
22	7792	*7551*	7804	*7563*	7816	*7575*	7828	*7587*	7841	*7599*	7853	*7611*	7865	*7624*	7877	*7636*	7889	*7648*	7902	*7660*
23	7766	*7510*	7778	*7522*	7790	*7534*	7802	*7546*	7814	*7558*	7826	*7571*	7838	*7583*	7850	*7595*	7863	*7607*	7875	*7619*
24	7739	*7469*	7751	*7481*	7764	*7493*	7776	*7505*	7788	*7517*	7800	*7529*	7812	*7541*	7824	*7553*	7836	*7566*	7848	*7578*
25	0,7713	*0,7427*	0,7725	*0,7439*	0,7737	*0,7451*	0,7750	*0,7463*	0,7762	*0,7475*	0,7774	*0,7487*	0,7786	*0,7499*	0,7798	*0,7511*	0,7810	*0,7523*	0,7822	*0,7536*
26	7688	*7385*	7700	*7397*	7712	*7409*	7724	*7421*	7736	*7433*	7748	*7445*	7760	*7457*	7772	*7469*	7784	*7481*	7796	*7493*
27	7662	*7342*	7674	*7354*	7686	*7366*	7698	*7378*	7710	*7390*	7722	*7402*	7734	*7414*	7746	*7426*	7758	*7438*	7770	*7449*
28	7636	*7298*	7648	*7310*	7660	*7322*	7672	*7334*	7684	*7346*	7696	*7358*	7708	*7370*	7720	*7382*	7732	*7394*	7744	*7405*
29	7611	*7254*	7623	*7266*	7635	*7278*	7647	*7289*	7659	*7301*	7670	*7313*	7682	*7325*	7694	*7337*	7706	*7349*	7718	*7361*
30	0,7586	*0,7209*	0,7598	*0,7220*	0,7610	*0,7232*	0,7621	*0,7244*	0,7633	*0,7256*	0,7645	*0,7268*	0,7657	*0,7280*	0,7669	*0,7292*	0,7681	*0,7303*	0,7693	*0,7315*
31	7561	*7163*	7573	*7175*	7584	*7186*	7596	*7198*	7608	*7210*	7620	*7222*	7632	*7234*	7644	*7245*	7655	*7257*	7667	*7269*
32	7536	*7116*	7548	*7128*	7560	*7140*	7571	*7151*	7583	*7163*	7595	*7175*	7607	*7187*	7618	*7199*	7630	*7210*	7642	*7222*
33	7511	*7069*	7523	*7080*	7535	*7092*	7547	*7104*	7558	*7115*	7570	*7127*	7582	*7139*	7594	*7151*	7605	*7162*	7617	*7174*
34	7487	*7020*	7499	*7032*	7510	*7044*	7522	*7055*	7534	*7067*	7545	*7079*	7557	*7090*	7569	*7102*	7580	*7114*	7592	*7125*
35	0,7462	*0,6971*	0,7474	*0,6982*	0,7486	*0,6994*	0,7497	*0,7006*	0,7509	*0,7017*	0,7521	*0,7029*	0,7532	*0,7041*	0,7544	*0,7052*	0,7556	*0,7064*	0,7567	*0,7076*
36	7438	*6920*	7450	*6932*	7462	*6944*	7473	*6955*	7485	*6967*	7496	*6978*	7508	*6990*	7520	*7002*	7531	*7013*	7543	*7025*
37	7414	*6869*	7426	*6881*	7437	*6892*	7449	*6904*	7461	*6915*	7472	*6927*	7484	*6939*	7495	*6950*	7507	*6962*	7519	*6973*
38	7390	*6817*	7402	*6828*	7413	*6840*	7425	*6851*	7437	*6863*	7448	*6874*	7460	*6886*	7471	*6897*	7483	*6909*	7494	*6920*
39	7367	*6763*	7378	*6775*	7390	*6786*	7401	*6798*	7413	*6809*	7424	*6821*	7436	*6832*	7447	*6844*	7459	*6855*	7470	*6867*
40	0,7343	*0,6708*	0,7355	*0,6720*	0,7366	*0,6731*	0,7378	*0,6743*	0,7389	*0,6754*	0,7400	*0,6766*	0,7412	*0,6777*	0,7423	*0,6789*	0,7435	*0,6800*	0,7446	*0,6812*
41	7320	*6652*	7331	*6664*	7343	*6675*	7354	*6687*	7365	*6698*	7377	*6710*	7388	*6721*	7400	*6732*	7411	*6744*	7423	*6755*
42	7296	*6595*	7308	*6607*	7319	*6618*	7331	*6629*	7342	*6641*	7353	*6652*	7365	*6664*	7376	*6675*	7388	*6686*	7399	*6698*

Torr	650		651		652		653		654		655		656		657		658		659	
°C	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*
0	0,8553	*0,8492*	0,8566	*0,8506*	0,8579	*0,8519*	0,8592	*0,8532*	0,8605	*0,8545*	0,8618	*0,8558*	0,8632	*0,8571*	0,8645	*0,8584*	0,8658	*0,8598*	0,8671	*0,8611*
1	8521	*8457*	8534	*8470*	8548	*8483*	8561	*8496*	8574	*8509*	8587	*8522*	8600	*8535*	8613	*8549*	8626	*8562*	8639	*8575*
2	8490	*8421*	8503	*8434*	8516	*8447*	8529	*8460*	8543	*8473*	8556	*8486*	8569	*8500*	8582	*8513*	8595	*8526*	8608	*8539*
3	8459	*8386*	8473	*8399*	8486	*8412*	8499	*8425*	8512	*8438*	8525	*8451*	8538	*8464*	8551	*8477*	8564	*8490*	8577	*8503*
4	8429	*8350*	8442	*8363*	8455	*8376*	8468	*8389*	8481	*8402*	8494	*8415*	8507	*8428*	8520	*8441*	8533	*8454*	8546	*8466*
5	0,8399	*0,8314*	0,8411	*0,8327*	0,8424	*0,8340*	0,8437	*0,8353*	0,8450	*0,8366*	0,8463	*0,8379*	0,8476	*0,8392*	0,8489	*0,8404*	0,8502	*0,8417*	0,8515	*0,8430*
6	8368	*8278*	8381	*8291*	8394	*8304*	8407	*8317*	8420	*8330*	8433	*8342*	8446	*8355*	8458	*8368*	8471	*8381*	8484	*8394*
7	8338	*8242*	8351	*8255*	8364	*8268*	8377	*8281*	8390	*8293*	8403	*8306*	8415	*8319*	8428	*8332*	8441	*8345*	8454	*8357*
8	8309	*8206*	8321	*8219*	8334	*8231*	8347	*8244*	8360	*8257*	8373	*8270*	8385	*8283*	8398	*8295*	8411	*8308*	8424	*8321*
9	8279	*8170*	8292	*8182*	8305	*8195*	8317	*8208*	8330	*8220*	8343	*8233*	8356	*8246*	8368	*8259*	8381	*8271*	8394	*8284*
10	0,8250	*0,8133*	0,8263	*0,8146*	0,8275	*0,8158*	0,8288	*0,8171*	0,8301	*0,8184*	0,8313	*0,8196*	0,8326	*0,8209*	0,8339	*0,8222*	0,8351	*0,8235*	0,8364	*0,8247*
11	8221	*8096*	8233	*8109*	8246	*8122*	8259	*8134*	8271	*8147*	8284	*8159*	8297	*8172*	8309	*8185*	8322	*8197*	8335	*8210*
12	8192	*8059*	8204	*8072*	8217	*8085*	8230	*8097*	8242	*8110*	8255	*8122*	8267	*8135*	8280	*8148*	8293	*8160*	8305	*8173*
13	8163	*8022*	8176	*8035*	8188	*8047*	8201	*8060*	8213	*8072*	8226	*8085*	8239	*8097*	8251	*8110*	8264	*8123*	8276	*8135*
14	8135	*7985*	8147	*7997*	8160	*8010*	8172	*8022*	8185	*8035*	8197	*8047*	8210	*8060*	8222	*8072*	8235	*8085*	8247	*8097*
15	0,8106	*0,7947*	0,8119	*0,7959*	0,8131	*0,7972*	0,8144	*0,7984*	0,8156	*0,7997*	0,8169	*0,8009*	0,8181	*0,8022*	0,8194	*0,8034*	0,8206	*0,8047*	0,8219	*0,8059*
16	8078	*7909*	8091	*7921*	8103	*7934*	8116	*7946*	8128	*7959*	8140	*7971*	8153	*7983*	8165	*7996*	8178	*8008*	8190	*8021*
17	8050	*7870*	8063	*7883*	8075	*7895*	8088	*7908*	8100	*7920*	8112	*7932*	8125	*7945*	8137	*7957*	8149	*7969*	8162	*7982*
18	8023	*7832*	8035	*7844*	8047	*7856*	8060	*7869*	8072	*7881*	8084	*7893*	8097	*7906*	8109	*7918*	8121	*7930*	8134	*7943*
19	7995	*7792*	8007	*7805*	8020	*7817*	8032	*7829*	8044	*7842*	8057	*7854*	8069	*7866*	8081	*7879*	8094	*7891*	8106	*7903*
20	0,7968	*0,7753*	0,7980	*0,7765*	0,7992	*0,7777*	0,8005	*0,7790*	0,8017	*0,7802*	0,8029	*0,7814*	0,8041	*0,7826*	0,8054	*0,7839*	0,8066	*0,7851*	0,8078	*0,7863*
21	7941	*7713*	7953	*7725*	7965	*7737*	7977	*7749*	7990	*7762*	8002	*7774*	8014	*7786*	8026	*7798*	8038	*7811*	8051	*7823*
22	7914	*7672*	7926	*7684*	7938	*7697*	7950	*7709*	7962	*7721*	7975	*7733*	7987	*7745*	7999	*7758*	8011	*7770*	8023	*7782*
23	7887	*7631*	7899	*7643*	7911	*7656*	7923	*7668*	7935	*7680*	7948	*7692*	7960	*7704*	7972	*7716*	7984	*7728*	7996	*7740*
24	7860	*7590*	7872	*7602*	7884	*7614*	7897	*7626*	7909	*7638*	7921	*7650*	7933	*7662*	7945	*7674*	7957	*7686*	7969	*7699*
25	0,7834	*0,7548*	0,7846	*0,7560*	0,7858	*0,7572*	0,7870	*0,7584*	0,7882	*0,7596*	0,7894	*0,7608*	0,7906	*0,7620*	0,7918	*0,7632*	0,7930	*0,7644*	0,7942	*0,7656*
26	7808	*7505*	7820	*7517*	7832	*7529*	7844	*7541*	7856	*7553*	7868	*7565*	7880	*7577*	7892	*7589*	7904	*7601*	7916	*7613*
27	7782	*7461*	7794	*7473*	7806	*7485*	7817	*7497*	7829	*7509*	7841	*7521*	7853	*7533*	7865	*7545*	7877	*7557*	7889	*7569*
28	7756	*7417*	7768	*7429*	7780	*7441*	7791	*7453*	7803	*7465*	7815	*7477*	7827	*7489*	7839	*7501*	7851	*7513*	7863	*7525*
29	7730	*7373*	7742	*7385*	7754	*7396*	7766	*7408*	7778	*7420*	7789	*7432*	7801	*7444*	7813	*7456*	7825	*7468*	7837	*7480*
30	0,7704	*0,7327*	0,7716	*0,7339*	0,7728	*0,7351*	0,7740	*0,7363*	0,7752	*0,7375*	0,7764	*0,7386*	0,7775	*0,7398*	0,7787	*0,7410*	0,7799	*0,7422*	0,7811	*0,7434*
31	7679	*7281*	7691	*7293*	7703	*7305*	7714	*7316*	7726	*7328*	7738	*7340*	7750	*7352*	7762	*7364*	7774	*7375*	7785	*7387*
32	7654	*7234*	7666	*7246*	7677	*7257*	7689	*7269*	7701	*7281*	7713	*7293*	7724	*7304*	7736	*7316*	7748	*7328*	7760	*7340*
33	7629	*7186*	7640	*7198*	7652	*7209*	7664	*7221*	7676	*7233*	7687	*7245*	7699	*7256*	7711	*7268*	7723	*7280*	7734	*7292*
34	7604	*7137*	7616	*7149*	7627	*7160*	7639	*7172*	7651	*7184*	7662	*7196*	7674	*7207*	7686	*7219*	7697	*7231*	7709	*7242*
35	0,7579	*0,7087*	0,7591	*0,7099*	0,7602	*0,7111*	0,7614	*0,7122*	0,7626	*0,7134*	0,7637	*0,7146*	0,7649	*0,7157*	0,7661	*0,7169*	0,7672	*0,7181*	0,7684	*0,7192*
36	7555	*7037*	7566	*7048*	7578	*7060*	7589	*7071*	7601	*7083*	7613	*7095*	7624	*7106*	7636	*7118*	7648	*7130*	7659	*7141*
37	7530	*6985*	7542	*6996*	7553	*7008*	7565	*7020*	7576	*7031*	7588	*7043*	7600	*7054*	7611	*7066*	7623	*7078*	7634	*7089*
38	7506	*6932*	7517	*6944*	7529	*6955*	7541	*6967*	7552	*6978*	7564	*6990*	7575	*7001*	7587	*7013*	7598	*7024*	7610	*7036*
39	7482	*6878*	7493	*6890*	7505	*6901*	7516	*6913*	7528	*6924*	7539	*6936*	7551	*6947*	7562	*6959*	7574	*6970*	7585	*6982*
40	0,7458	*0,6823*	0,7469	*0,6835*	0,7481	*0,6846*	0,7492	*0,6857*	0,7504	*0,6869*	0,7515	*0,6880*	0,7527	*0,6892*	0,7538	*0,6903*	0,7550	*0,6915*	0,7561	*0,6926*
41	7434	*6767*	7445	*6778*	7457	*6790*	7468	*6801*	7480	*6813*	7491	*6824*	7503	*6835*	7514	*6847*	7526	*6858*	7537	*6870*
42	7410	*6709*	7422	*6721*	7433	*6732*	7445	*6743*	7456	*6755*	7467	*6766*	7479	*6778*	7490	*6789*	7502	*6800*	7513	*6812*

	660		661		662		663		664		665		666		667		668		669	
0	0,8684	*0,8624*	0,8697	*0,8637*	0,8711	*0,8650*	0,8724	*0,8663*	0,8737	*0,8677*	0,8750	*0,8690*	0,8763	*0,8703*	0,8776	*0,8716*	0,8789	*0,8729*	0,8803	*0,8742*
1	8652	*8588*	8666	*8601*	8679	*8614*	8692	*8627*	8705	*8640*	8718	*8653*	8731	*8667*	8744	*8680*	8757	*8693*	8770	*8706*
2	8621	*8552*	8634	*8565*	8647	*8578*	8660	*8591*	8673	*8604*	8686	*8617*	8699	*8630*	8712	*8643*	8725	*8656*	8738	*8669*
3	8590	*8516*	8603	*8529*	8616	*8542*	8629	*8555*	8642	*8568*	8655	*8581*	8668	*8594*	8681	*8607*	8694	*8620*	8707	*8633*
4	8559	*8479*	8572	*8492*	8585	*8505*	8597	*8518*	8610	*8531*	8623	*8544*	8636	*8557*	8649	*8570*	8662	*8583*	8675	*8596*
5	0,8528	*0,8443*	0,8541	*0,8456*	0,8554	*0,8469*	0,8566	*0,8482*	0,8579	*0,8495*	0,8592	*0,8508*	0,8605	*0,8521*	0,8618	*0,8534*	0,8631	*0,8547*	0,8644	*0,8559*
6	8497	*8407*	8510	*8420*	8523	*8433*	8536	*8445*	8549	*8458*	8561	*8471*	8574	*8484*	8587	*8497*	8600	*8510*	8613	*8523*
7	8467	*8370*	8480	*8383*	8492	*8396*	8505	*8409*	8518	*8422*	8531	*8434*	8544	*8447*	8556	*8460*	8569	*8473*	8582	*8486*
8	8437	*8334*	8449	*8346*	8462	*8359*	8475	*8372*	8488	*8385*	8500	*8398*	8513	*8410*	8526	*8423*	8539	*8436*	8552	*8449*
9	8407	*8297*	8419	*8310*	8432	*8322*	8445	*8335*	8457	*8348*	8470	*8361*	8483	*8373*	8496	*8386*	8508	*8399*	8521	*8412*
10	0,8377	*0,8260*	0,8389	*0,8273*	0,8402	*0,8285*	0,8415	*0,8298*	0,8428	*0,8311*	0,8440	*0,8323*	0,8453	*0,8336*	0,8466	*0,8349*	0,8478	*0,8361*	0,8491	*0,8374*
11	8347	*8223*	8360	*8235*	8373	*8248*	8385	*8261*	8398	*8273*	8410	*8286*	8423	*8299*	8436	*8311*	8448	*8324*	8461	*8337*
12	8318	*8185*	8330	*8198*	8343	*8211*	8356	*8223*	8368	*8236*	8381	*8248*	8394	*8261*	8406	*8274*	8419	*8286*	8431	*8299*
13	8289	*8148*	8301	*8160*	8314	*8173*	8326	*8185*	8339	*8198*	8352	*8211*	8364	*8223*	8377	*8236*	8389	*8248*	8402	*8261*
14	8260	*8110*	8272	*8122*	8285	*8135*	8297	*8147*	8310	*8160*	8322	*8172*	8335	*8185*	8347	*8197*	8360	*8210*	8372	*8222*
15	0,8231	*0,8072*	0,8244	*0,8084*	0,8256	*0,8097*	0,8269	*0,8109*	0,8281	*0,8121*	0,8293	*0,8134*	0,8306	*0,8146*	0,8318	*0,8159*	0,8331	*0,8171*	0,8343	*0,8184*
16	8203	*8033*	8215	*8046*	8227	*8058*	8240	*8070*	8252	*8083*	8265	*8095*	8277	*8108*	8290	*8120*	8302	*8133*	8314	*8145*
17	8174	*7994*	8187	*8007*	8199	*8019*	8211	*8031*	8224	*8044*	8236	*8056*	8249	*8069*	8261	*8081*	8273	*8093*	8286	*8106*
18	8146	*7955*	8158	*7967*	8171	*7980*	8183	*7992*	8195	*8004*	8208	*8017*	8220	*8029*	8232	*8041*	8245	*8054*	8257	*8066*
19	8118	*7915*	8130	*7928*	8143	*7940*	8155	*7952*	8167	*7965*	8180	*7977*	8192	*7989*	8204	*8002*	8217	*8014*	8229	*8026*
20	0,8090	*0,7875*	0,8103	*0,7888*	0,8115	*0,7900*	0,8127	*0,7912*	0,8139	*0,7924*	0,8152	*0,7937*	0,8164	*0,7949*	0,8176	*0,7961*	0,8188	*0,7973*	0,8201	*0,7986*
21	8063	*7835*	8075	*7847*	8087	*7859*	8099	*7872*	8112	*7884*	8124	*7896*	8136	*7908*	8148	*7920*	8161	*7933*	8173	*7945*
22	8035	*7794*	8048	*7806*	8060	*7818*	8072	*7831*	8084	*7843*	8096	*7855*	8108	*7867*	8121	*7879*	8133	*7891*	8145	*7904*
23	8008	*7753*	8020	*7765*	8033	*7777*	8045	*7789*	8057	*7801*	8069	*7813*	8081	*7825*	8093	*7838*	8105	*7850*	8117	*7862*
24	7981	*7711*	7993	*7723*	8005	*7735*	8018	*7747*	8030	*7759*	8042	*7771*	8054	*7783*	8066	*7795*	8078	*7807*	8090	*7819*
25	0,7954	*0,7668*	0,7966	*0,7680*	0,7978	*0,7692*	0,7991	*0,7704*	0,8003	*0,7716*	0,8015	*0,7728*	0,8027	*0,7740*	0,8039	*0,7752*	0,8051	*0,7765*	0,8063	*0,7777*
26	7928	*7625*	7940	*7637*	7952	*7649*	7964	*7661*	7976	*7673*	7988	*7685*	8000	*7697*	8012	*7709*	8024	*7721*	8036	*7733*
27	7901	*7581*	7913	*7593*	7925	*7605*	7937	*7617*	7949	*7629*	7961	*7641*	7973	*7653*	7985	*7665*	7997	*7677*	8009	*7689*
28	7875	*7537*	7887	*7549*	7899	*7561*	7911	*7573*	7923	*7584*	7935	*7596*	7947	*7608*	7959	*7620*	7970	*7632*	7982	*7644*
29	7849	*7492*	7861	*7503*	7873	*7515*	7885	*7527*	7896	*7539*	7908	*7551*	7920	*7563*	7932	*7575*	7944	*7587*	7956	*7599*
30	0,7823	*0,7446*	0,7835	*0,7458*	0,7847	*0,7469*	0,7858	*0,7481*	0,7870	*0,7493*	0,7882	*0,7505*	0,7894	*0,7517*	0,7906	*0,7529*	0,7918	*0,7541*	0,7930	*0,7552*
31	7797	*7399*	7809	*7411*	7821	*7423*	7833	*7435*	7844	*7446*	7856	*7458*	7868	*7470*	7880	*7482*	7892	*7494*	7903	*7505*
32	7772	*7352*	7783	*7363*	7795	*7375*	7807	*7387*	7819	*7399*	7830	*7410*	7842	*7422*	7854	*7434*	7866	*7446*	7877	*7458*
33	7746	*7303*	7758	*7315*	7770	*7327*	7781	*7338*	7793	*7350*	7805	*7362*	7817	*7374*	7828	*7385*	7840	*7397*	7852	*7409*
34	7721	*7254*	7733	*7266*	7744	*7277*	7756	*7289*	7768	*7301*	7779	*7313*	7791	*7324*	7803	*7336*	7814	*7348*	7826	*7359*
35	0,7696	*0,7204*	0,7707	*0,7216*	0,7719	*0,7227*	0,7731	*0,7239*	0,7742	*0,7251*	0,7754	*0,7262*	0,7766	*0,7274*	0,7777	*0,7286*	0,7789	*0,7297*	0,7801	*0,7309*
36	7671	*7153*	7682	*7164*	7694	*7176*	7706	*7188*	7717	*7199*	7729	*7211*	7740	*7223*	7752	*7234*	7764	*7246*	7775	*7257*
37	7646	*7101*	7658	*7112*	7669	*7124*	7681	*7135*	7692	*7147*	7704	*7159*	7715	*7170*	7727	*7182*	7739	*7193*	7750	*7205*
38	7621	*7048*	7633	*7059*	7644	*7071*	7656	*7082*	7668	*7094*	7679	*7105*	7691	*7117*	7702	*7128*	7714	*7140*	7725	*7151*
39	7597	*6993*	7608	*7005*	7620	*7016*	7631	*7028*	7643	*7039*	7654	*7051*	7666	*7062*	7677	*7074*	7689	*7085*	7700	*7097*
40	0,7573	*0,6938*	0,7584	*0,6949*	0,7596	*0,6961*	0,7607	*0,6972*	0,7618	*0,6984*	0,7630	*0,6995*	0,7641	*0,7007*	0,7653	*0,7018*	0,7664	*0,7030*	0,7676	*0,7041*
41	7548	*6881*	7560	*6893*	7571	*6904*	7583	*6915*	7594	*6927*	7606	*6938*	7617	*6950*	7628	*6961*	7640	*6973*	7651	*6984*
42	7524	*6823*	7536	*6835*	7547	*6846*	7559	*6857*	7570	*6869*	7581	*6880*	7593	*6892*	7604	*6903*	7616	*6914*	7627	*6926*

Torr	670		671		672		673		674		675		676		677		678		679	
°C	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*
0	0,8816	*0,8756*	0,8829	*0,8769*	0,8842	*0,8782*	0,8855	*0,8795*	0,8868	*0,8808*	0,8882	*0,8821*	0,8895	*0,8834*	0,8908	*0,8848*	0,8921	*0,8861*	0,8934	*0,8874*
1	8784	*8719*	8797	*8732*	8810	*8745*	8823	*8758*	8836	*8771*	8849	*8785*	8862	*8798*	8875	*8811*	8888	*8824*	8902	*8837*
2	8752	*8682*	8765	*8695*	8778	*8709*	8791	*8722*	8804	*8735*	8817	*8748*	8830	*8761*	8843	*8774*	8856	*8787*	8869	*8800*
3	8720	*8646*	8733	*8659*	8746	*8672*	8759	*8685*	8772	*8698*	8785	*8711*	8798	*8724*	8811	*8737*	8824	*8750*	8837	*8763*
4	8688	*8609*	8701	*8622*	8714	*8635*	8727	*8648*	8740	*8661*	8753	*8674*	8766	*8687*	8779	*8700*	8792	*8713*	8805	*8726*
5	0,8657	*0,8572*	0,8670	*0,8585*	0,8683	*0,8598*	0,8696	*0,8611*	0,8709	*0,8624*	0,8722	*0,8637*	0,8734	*0,8650*	0,8747	*0,8663*	0,8760	*0,8676*	0,8773	*0,8689*
6	8626	*8536*	8639	*8548*	8652	*8561*	8664	*8574*	8677	*8587*	8690	*8600*	8703	*8613*	8716	*8626*	8729	*8639*	8742	*8651*
7	8595	*8499*	8608	*8511*	8621	*8524*	8633	*8537*	8646	*8550*	8659	*8563*	8672	*8576*	8685	*8588*	8698	*8601*	8710	*8614*
8	8564	*8462*	8577	*8474*	8590	*8487*	8603	*8500*	8615	*8513*	8628	*8525*	8641	*8538*	8654	*8551*	8667	*8564*	8679	*8577*
9	8534	*8424*	8547	*8437*	8559	*8450*	8572	*8462*	8585	*8475*	8598	*8488*	8610	*8501*	8623	*8513*	8636	*8526*	8649	*8539*
10	0,8504	*0,8387*	0,8516	*0,8400*	0,8529	*0,8412*	0,8542	*0,8425*	0,8554	*0,8438*	0,8567	*0,8450*	0,8580	*0,8463*	0,8593	*0,8476*	0,8605	*0,8488*	0,8618	*0,8501*
11	8474	*8349*	8486	*8362*	8499	*8375*	8512	*8387*	8524	*8400*	8537	*8412*	8550	*8425*	8562	*8438*	8575	*8450*	8588	*8463*
12	8444	*8311*	8457	*8324*	8469	*8337*	8482	*8349*	8494	*8362*	8507	*8374*	8520	*8387*	8532	*8400*	8545	*8412*	8557	*8425*
13	8414	*8273*	8427	*8286*	8439	*8298*	8452	*8311*	8465	*8324*	8477	*8336*	8490	*8349*	8502	*8361*	8515	*8374*	8527	*8386*
14	8385	*8235*	8397	*8247*	8410	*8260*	8423	*8272*	8435	*8285*	8448	*8298*	8460	*8310*	8473	*8323*	8485	*8335*	8498	*8348*
15	0,8356	*0,8196*	0,8368	*0,8209*	0,8381	*0,8221*	0,8393	*0,8234*	0,8406	*0,8246*	0,8418	*0,8259*	0,8431	*0,8271*	0,8443	*0,8284*	0,8456	*0,8296*	0,8468	*0,8309*
16	8327	*8157*	8339	*8170*	8352	*8182*	8364	*8195*	8377	*8207*	8389	*8220*	8401	*8232*	8414	*8244*	8426	*8257*	8439	*8269*
17	8298	*8118*	8310	*8131*	8323	*8143*	8335	*8155*	8348	*8168*	8360	*8180*	8372	*8192*	8385	*8205*	8397	*8217*	8410	*8230*
18	8270	*8078*	8282	*8091*	8294	*8103*	8307	*8116*	8319	*8128*	8331	*8140*	8344	*8153*	8356	*8165*	8368	*8177*	8381	*8190*
19	8241	*8038*	8253	*8051*	8266	*8063*	8278	*8075*	8290	*8088*	8303	*8100*	8315	*8112*	8327	*8125*	8340	*8137*	8352	*8149*
20	0,8213	*0,7998*	0,8225	*0,8010*	0,8237	*0,8023*	0,8250	*0,8035*	0,8262	*0,8047*	0,8274	*0,8059*	0,8287	*0,8072*	0,8299	*0,8084*	0,8311	*0,8096*	0,8323	*0,8108*
21	8185	*7957*	8197	*7969*	8209	*7982*	8222	*7994*	8234	*8006*	8246	*8018*	8258	*8030*	8270	*8043*	8283	*8055*	8295	*8067*
22	8157	*7916*	8169	*7928*	8182	*7940*	8194	*7952*	8206	*7964*	8218	*7977*	8230	*7989*	8242	*8001*	8255	*8013*	8267	*8025*
23	8130	*7874*	8142	*7886*	8154	*7898*	8166	*7910*	8178	*7922*	8190	*7935*	8202	*7947*	8215	*7959*	8227	*7971*	8239	*7983*
24	8102	*7832*	8114	*7844*	8126	*7856*	8138	*7868*	8151	*7880*	8163	*7892*	8175	*7904*	8187	*7916*	8199	*7928*	8211	*7940*
25	0,8075	*0,7789*	0,8087	*0,7801*	0,8099	*0,7813*	0,8111	*0,7825*	0,8123	*0,7837*	0,8135	*0,7849*	0,8147	*0,7861*	0,8159	*0,7873*	0,8171	*0,7885*	0,8183	*0,7897*
26	8048	*7745*	8060	*7757*	8072	*7769*	8084	*7781*	8096	*7793*	8108	*7805*	8120	*7817*	8132	*7829*	8144	*7841*	8156	*7853*
27	8021	*7701*	8033	*7713*	8045	*7725*	8057	*7737*	8069	*7749*	8081	*7761*	8093	*7773*	8105	*7785*	8117	*7797*	8129	*7809*
28	7994	*7656*	8006	*7668*	8018	*7680*	8030	*7692*	8042	*7704*	8054	*7716*	8066	*7728*	8078	*7740*	8090	*7751*	8102	*7763*
29	7968	*7611*	7980	*7622*	7992	*7634*	8003	*7646*	8015	*7658*	8027	*7670*	8039	*7682*	8051	*7694*	8063	*7706*	8075	*7718*
30	0,7941	*0,7564*	0,7953	*0,7576*	0,7965	*0,7588*	0,7977	*0,7600*	0,7989	*0,7612*	0,8001	*0,7623*	0,8013	*0,7635*	0,8024	*0,7647*	0,8036	*0,7659*	0,8048	*0,7671*
31	7915	*7517*	7927	*7529*	7939	*7541*	7951	*7553*	7963	*7564*	7974	*7576*	7986	*7588*	7998	*7600*	8010	*7612*	8022	*7624*
32	7889	*7469*	7901	*7481*	7913	*7493*	7925	*7505*	7936	*7516*	7948	*7528*	7960	*7540*	7972	*7552*	7983	*7564*	7995	*7575*
33	7863	*7421*	7875	*7432*	7887	*7444*	7899	*7456*	7910	*7468*	7922	*7479*	7934	*7491*	7946	*7503*	7957	*7515*	7969	*7526*
34	7838	*7371*	7849	*7383*	7861	*7394*	7873	*7406*	7885	*7418*	7896	*7430*	7908	*7441*	7920	*7453*	7931	*7465*	7943	*7476*
35	0,7812	*0,7321*	0,7824	*0,7332*	0,7836	*0,7344*	0,7847	*0,7356*	0,7859	*0,7367*	0,7871	*0,7379*	0,7882	*0,7390*	0,7894	*0,7402*	0,7906	*0,7414*	0,7917	*0,7425*
36	7787	*7269*	7799	*7281*	7810	*7292*	7822	*7304*	7833	*7316*	7845	*7327*	7857	*7339*	7868	*7350*	7880	*7362*	7892	*7374*
37	7762	*7217*	7773	*7228*	7785	*7240*	7797	*7251*	7808	*7263*	7820	*7274*	7831	*7286*	7843	*7298*	7854	*7309*	7866	*7321*
38	7737	*7163*	7748	*7175*	7760	*7186*	7771	*7198*	7783	*7209*	7795	*7221*	7806	*7232*	7818	*7244*	7829	*7255*	7841	*7267*
39	7712	*7108*	7723	*7120*	7735	*7131*	7747	*7143*	7758	*7154*	7770	*7166*	7781	*7177*	7793	*7189*	7804	*7200*	7816	*7212*
40	0,7687	*0,7053*	0,7699	*0,7064*	0,7710	*0,7075*	0,7722	*0,7087*	0,7733	*0,7098*	0,7745	*0,7110*	0,7756	*0,7121*	0,7768	*0,7133*	0,7779	*0,7144*	0,7791	*0,7156*
41	7663	*6996*	7674	*7007*	7686	*7018*	7697	*7030*	7709	*7041*	7720	*7053*	7731	*7064*	7743	*7076*	7754	*7087*	7766	*7098*
42	7638	*6937*	7650	*6949*	7661	*6960*	7673	*6971*	7684	*6983*	7695	*6994*	7707	*7006*	7718	*7017*	7730	*7028*	7741	*7040*

	680		681		682		683		684		685		686		687		688		689	
0	0,8947	*0,8887*	0,8961	*0,8900*	0,8974	*0,8913*	0,8987	*0,8927*	0,9000	*0,8940*	0,9013	*0,8953*	0,9026	*0,8966*	0,9039	*0,8979*	0,9053	*0,8992*	0,9066	*0,9006*
1	8915	*8850*	8928	*8863*	8941	*8876*	8954	*8889*	8967	*8903*	8980	*8916*	8993	*8929*	9006	*8942*	9020	*8955*	9033	*8968*
2	8882	*8813*	8895	*8826*	8908	*8839*	8921	*8852*	8934	*8865*	8947	*8878*	8961	*8891*	8974	*8904*	8987	*8918*	9000	*8931*
3	8850	*8776*	8863	*8789*	8876	*8802*	8889	*8815*	8902	*8828*	8915	*8841*	8928	*8854*	8941	*8867*	8954	*8880*	8967	*8893*
4	8818	*8739*	8831	*8752*	8844	*8765*	8857	*8778*	8870	*8791*	8883	*8804*	8896	*8817*	8909	*8830*	8922	*8843*	8935	*8856*
5	0,8786	*0,8702*	0,8799	*0,8715*	0,8812	*0,8727*	0,8825	*0,8740*	0,8838	*0,8753*	0,8851	*0,8766*	0,8864	*0,8779*	0,8877	*0,8792*	0,8890	*0,8805*	0,8902	*0,8818*
6	8755	*8664*	8767	*8677*	8780	*8690*	8793	*8703*	8806	*8716*	8819	*8729*	8832	*8742*	8845	*8754*	8858	*8767*	8870	*8780*
7	8723	*8627*	8736	*8640*	8749	*8653*	8762	*8665*	8775	*8678*	8787	*8691*	8800	*8704*	8813	*8717*	8826	*8730*	8839	*8742*
8	8692	*8589*	8705	*8602*	8718	*8615*	8731	*8628*	8743	*8640*	8756	*8653*	8769	*8666*	8782	*8679*	8794	*8692*	8807	*8704*
9	8661	*8552*	8674	*8564*	8687	*8577*	8699	*8590*	8712	*8603*	8725	*8615*	8738	*8628*	8750	*8641*	8763	*8654*	8776	*8666*
10	0,8631	*0,8514*	0,8643	*0,8526*	0,8656	*0,8539*	0,8669	*0,8552*	0,8681	*0,8565*	0,8694	*0,8577*	0,8707	*0,8590*	0,8719	*0,8603*	0,8732	*0,8615*	0,8745	*0,8628*
11	8600	*8476*	8613	*8488*	8625	*8501*	8638	*8514*	8651	*8526*	8663	*8539*	8676	*8552*	8689	*8564*	8701	*8577*	8714	*8590*
12	8570	*8437*	8583	*8450*	8595	*8463*	8608	*8475*	8620	*8488*	8633	*8500*	8646	*8513*	8658	*8526*	8671	*8538*	8683	*8551*
13	8540	*8399*	8552	*8411*	8565	*8424*	8578	*8437*	8590	*8449*	8603	*8462*	8615	*8474*	8628	*8487*	8640	*8499*	8653	*8512*
14	8510	*8360*	8523	*8373*	8535	*8385*	8548	*8398*	8560	*8410*	8573	*8423*	8585	*8435*	8598	*8448*	8610	*8460*	8623	*8473*
15	0,8481	*0,8321*	0,8493	*0,8334*	0,8505	*0,8346*	0,8518	*0,8358*	0,8530	*0,8371*	0,8543	*0,8383*	0,8555	*0,8396*	0,8568	*0,8408*	0,8580	*0,8421*	0,8593	*0,8433*
16	8451	*8282*	8464	*8294*	8476	*8307*	8488	*8319*	8501	*8331*	8513	*8344*	8526	*8356*	8538	*8369*	8551	*8381*	8563	*8394*
17	8422	*8242*	8434	*8254*	8447	*8267*	8459	*8279*	8471	*8292*	8484	*8304*	8496	*8316*	8509	*8329*	8521	*8341*	8533	*8353*
18	8393	*8202*	8405	*8214*	8418	*8227*	8430	*8239*	8442	*8251*	8455	*8264*	8467	*8276*	8479	*8288*	8492	*8301*	8504	*8313*
19	8364	*8161*	8376	*8174*	8389	*8186*	8401	*8198*	8413	*8211*	8426	*8223*	8438	*8235*	8450	*8248*	8463	*8260*	8475	*8272*
20	0,8336	*0,8121*	0,8348	*0,8133*	0,8360	*0,8145*	0,8372	*0,8157*	0,8385	*0,8170*	0,8397	*0,8182*	0,8409	*0,8194*	0,8421	*0,8206*	0,8434	*0,8219*	0,8446	*0,8231*
21	8307	*8079*	8319	*8092*	8332	*8104*	8344	*8116*	8356	*8128*	8368	*8140*	8380	*8153*	8393	*8165*	8405	*8177*	8417	*8189*
22	8279	*8038*	8291	*8050*	8303	*8062*	8315	*8074*	8328	*8086*	8340	*8098*	8352	*8111*	8364	*8123*	8376	*8135*	8389	*8147*
23	8251	*7995*	8263	*8007*	8275	*8020*	8287	*8032*	8299	*8044*	8312	*8056*	8324	*8068*	8336	*8080*	8348	*8092*	8360	*8104*
24	8223	*7952*	8235	*7965*	8247	*7977*	8259	*7989*	8271	*8001*	8284	*8013*	8296	*8025*	8308	*8037*	8320	*8049*	8332	*8061*
25	0,8195	*0,7909*	0,8207	*0,7921*	0,8220	*0,7933*	0,8232	*0,7945*	0,8244	*0,7957*	0,8256	*0,7969*	0,8268	*0,7981*	0,8280	*0,7993*	0,8292	*0,8006*	0,8304	*0,8018*
26	8168	*7865*	8180	*7877*	8192	*7889*	8204	*7901*	8216	*7913*	8228	*7925*	8240	*7937*	8252	*7949*	8264	*7961*	8276	*7973*
27	8141	*7821*	8153	*7833*	8165	*7845*	8177	*7857*	8189	*7868*	8201	*7880*	8213	*7892*	8225	*7904*	8236	*7916*	8248	*7928*
28	8114	*7775*	8126	*7787*	8137	*7799*	8149	*7811*	8161	*7823*	8173	*7835*	8185	*7847*	8197	*7859*	8209	*7871*	8221	*7883*
29	8087	*7729*	8099	*7741*	8110	*7753*	8122	*7765*	8134	*7777*	8146	*7789*	8158	*7801*	8170	*7813*	8182	*7825*	8194	*7836*
30	0,8060	*0,7683*	0,8072	*0,7695*	0,8084	*0,7706*	0,8096	*0,7718*	0,8107	*0,7730*	0,8119	*0,7742*	0,8131	*0,7754*	0,8143	*0,7766*	0,8155	*0,7778*	0,8167	*0,7789*
31	8033	*7635*	8045	*7647*	8057	*7659*	8069	*7671*	8081	*7683*	8092	*7694*	8104	*7706*	8116	*7718*	8128	*7730*	8140	*7742*
32	8007	*7587*	8019	*7599*	8031	*7611*	8042	*7622*	8054	*7634*	8066	*7646*	8078	*7658*	8089	*7670*	8101	*7681*	8113	*7693*
33	7981	*7538*	7993	*7550*	8004	*7561*	8016	*7573*	8028	*7585*	8039	*7597*	8051	*7608*	8063	*7620*	8075	*7632*	8086	*7644*
34	7955	*7488*	7966	*7500*	7978	*7511*	7990	*7523*	8002	*7535*	8013	*7547*	8025	*7558*	8037	*7570*	8048	*7582*	8060	*7593*
35	0,7929	*0,7437*	0,7941	*0,7449*	0,7952	*0,7460*	0,7964	*0,7472*	0,7976	*0,7484*	0,7987	*0,7495*	0,7999	*0,7507*	0,8011	*0,7519*	0,8022	*0,7530*	0,8034	*0,7542*
36	7903	*7385*	7915	*7397*	7926	*7409*	7938	*7420*	7950	*7432*	7961	*7443*	7973	*7455*	7985	*7467*	7996	*7478*	8008	*7490*
37	7878	*7332*	7889	*7344*	7901	*7356*	7912	*7367*	7924	*7379*	7936	*7390*	7947	*7402*	7959	*7413*	7970	*7425*	7982	*7437*
38	7852	*7278*	7864	*7290*	7875	*7302*	7887	*7313*	7898	*7325*	7910	*7336*	7922	*7348*	7933	*7359*	7945	*7371*	7956	*7382*
39	7827	*7223*	7839	*7235*	7850	*7246*	7862	*7258*	7873	*7269*	7885	*7281*	7896	*7293*	7908	*7304*	7919	*7316*	7931	*7327*
40	0,7802	*0,7167*	0,7814	*0,7179*	0,7825	*0,7190*	0,7836	*0,7202*	0,7848	*0,7213*	0,7859	*0,7225*	0,7871	*0,7236*	0,7882	*0,7248*	0,7894	*0,7259*	0,7905	*0,7271*
41	7777	*7110*	7789	*7121*	7800	*7133*	7811	*7144*	7823	*7156*	7834	*7167*	7846	*7179*	7857	*7190*	7869	*7201*	7880	*7213*
42	7752	*7051*	7764	*7063*	7775	*7074*	7787	*7085*	7798	*7097*	7809	*7108*	7821	*7120*	7832	*7131*	7844	*7142*	7855	*7154*

Torr / °C	690		691		692		693		694		695		696		697		698		699	
	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*
0	0,9079	*0,9019*	0,9092	*0,9032*	0,9105	*0,9045*	0,9118	*0,9058*	0,9132	*0,9071*	0,9145	*0,9084*	0,9158	*0,9098*	0,9171	*0,9111*	0,9184	*0,9124*	0,9197	*0,9137*
1	9046	*8981*	9059	*8994*	9072	*9007*	9085	*9020*	9098	*9034*	9111	*9047*	9124	*9060*	9138	*9073*	9151	*9086*	9164	*9099*
2	9013	*8944*	9026	*8957*	9039	*8970*	9052	*8983*	9065	*8996*	9078	*9009*	9091	*9022*	9104	*9035*	9117	*9048*	9130	*9061*
3	8980	*8906*	8993	*8919*	9006	*8932*	9019	*8945*	9032	*8958*	9045	*8971*	9058	*8984*	9071	*8997*	9084	*9010*	9097	*9023*
4	8948	*8868*	8961	*8881*	8974	*8894*	8986	*8907*	8999	*8920*	9012	*8933*	9025	*8946*	9038	*8959*	9051	*8972*	9064	*8985*
5	0,8915	*0,8831*	0,8928	*0,8844*	0,8941	*0,8857*	0,8954	*0,8870*	0,8967	*0,8882*	0,8980	*0,8895*	0,8993	*0,8908*	0,9006	*0,8921*	0,9019	*0,8934*	0,9032	*0,8947*
6	8883	*8793*	8896	*8806*	8909	*8819*	8922	*8832*	8935	*8845*	8948	*8857*	8961	*8870*	8973	*8883*	8986	*8896*	8999	*8909*
7	8852	*8755*	8864	*8768*	8877	*8781*	8890	*8794*	8903	*8806*	8916	*8819*	8929	*8832*	8941	*8845*	8954	*8858*	8967	*8871*
8	8820	*8717*	8833	*8730*	8846	*8743*	8858	*8756*	8871	*8768*	8884	*8781*	8897	*8794*	8909	*8807*	8922	*8819*	8935	*8832*
9	8789	*8679*	8801	*8692*	8814	*8704*	8827	*8717*	8840	*8730*	8852	*8743*	8865	*8755*	8878	*8768*	8891	*8781*	8903	*8794*
10	0,8758	*0,8641*	0,8770	*0,8653*	0,8783	*0,8666*	0,8796	*0,8679*	0,8808	*0,8691*	0,8821	*0,8704*	0,8834	*0,8717*	0,8846	*0,8730*	0,8859	*0,8742*	0,8872	*0,8755*
11	8727	*8602*	8739	*8615*	8752	*8627*	8765	*8640*	8777	*8653*	8790	*8665*	8803	*8678*	8815	*8691*	8828	*8703*	8840	*8716*
12	8696	*8563*	8709	*8576*	8721	*8589*	8734	*8601*	8746	*8614*	8759	*8626*	8772	*8639*	8784	*8652*	8797	*8664*	8809	*8677*
13	8666	*8524*	8678	*8537*	8691	*8550*	8703	*8562*	8716	*8575*	8728	*8587*	8741	*8600*	8753	*8612*	8766	*8625*	8779	*8637*
14	8635	*8485*	8648	*8498*	8660	*8510*	8673	*8523*	8685	*8535*	8698	*8548*	8710	*8560*	8723	*8573*	8735	*8585*	8748	*8598*
15	0,8605	*0,8446*	0,8618	*0,8458*	0,8630	*0,8471*	0,8643	*0,8483*	0,8655	*0,8496*	0,8668	*0,8508*	0,8680	*0,8521*	0,8693	*0,8533*	0,8705	*0,8546*	0,8717	*0,8558*
16	8575	*8406*	8588	*8418*	8600	*8431*	8613	*8443*	8625	*8456*	8638	*8468*	8650	*8481*	8662	*8493*	8675	*8505*	8687	*8518*
17	8546	*8366*	8558	*8378*	8571	*8391*	8583	*8403*	8595	*8415*	8608	*8428*	8620	*8440*	8632	*8453*	8645	*8465*	8657	*8477*
18	8516	*8325*	8529	*8338*	8541	*8350*	8553	*8362*	8566	*8375*	8578	*8387*	8590	*8399*	8603	*8412*	8615	*8424*	8627	*8436*
19	8487	*8284*	8499	*8297*	8512	*8309*	8524	*8321*	8536	*8334*	8549	*8346*	8561	*8358*	8573	*8371*	8586	*8383*	8598	*8395*
20	0,8458	*0,8243*	0,8470	*0,8255*	0,8483	*0,8268*	0,8495	*0,8280*	0,8507	*0,8292*	0,8519	*0,8304*	0,8532	*0,8317*	0,8544	*0,8329*	0,8556	*0,8341*	0,8568	*0,8353*
21	8429	*8201*	8442	*8214*	8454	*8226*	8466	*8238*	8478	*8250*	8490	*8263*	8503	*8275*	8515	*8287*	8527	*8299*	8539	*8311*
22	8401	*8159*	8413	*8171*	8425	*8184*	8437	*8196*	8449	*8208*	8462	*8220*	8474	*8232*	8486	*8245*	8498	*8257*	8510	*8269*
23	8372	*8117*	8384	*8129*	8397	*8141*	8409	*8153*	8421	*8165*	8433	*8177*	8445	*8189*	8457	*8202*	8469	*8214*	8481	*8226*
24	8344	*8073*	8356	*8086*	8368	*8098*	8380	*8110*	8392	*8122*	8404	*8134*	8417	*8146*	8429	*8158*	8441	*8170*	8453	*8182*
25	0,8316	*0,8030*	0,8328	*0,8042*	0,8340	*0,8054*	0,8352	*0,8066*	0,8364	*0,8078*	0,8376	*0,8090*	0,8388	*0,8102*	0,8400	*0,8114*	0,8412	*0,8126*	0,8424	*0,8138*
26	8288	*7985*	8300	*7997*	8312	*8009*	8324	*8021*	8336	*8033*	8348	*8045*	8360	*8057*	8372	*8069*	8384	*8081*	8396	*8093*
27	8260	*7940*	8272	*7952*	8284	*7964*	8296	*7976*	8308	*7988*	8320	*8000*	8332	*8012*	8344	*8024*	8356	*8036*	8368	*8048*
28	8233	*7895*	8245	*7907*	8257	*7919*	8269	*7930*	8281	*7942*	8293	*7954*	8305	*7966*	8316	*7978*	8328	*7990*	8340	*8002*
29	8206	*7848*	8218	*7860*	8229	*7872*	8241	*7884*	8253	*7896*	8265	*7908*	8277	*7920*	8289	*7932*	8301	*7943*	8313	*7955*
30	0,8178	*0,7801*	0,8190	*0,7813*	0,8202	*0,7825*	0,8214	*0,7837*	0,8226	*0,7849*	0,8238	*0,7861*	0,8250	*0,7872*	0,8261	*0,7884*	0,8273	*0,7896*	0,8285	*0,7908*
31	8152	*7753*	8163	*7765*	8175	*7777*	8187	*7789*	8199	*7801*	8211	*7813*	8222	*7824*	8234	*7836*	8246	*7848*	8258	*7860*
32	8125	*7705*	8137	*7717*	8148	*7728*	8160	*7740*	8172	*7752*	8184	*7764*	8195	*7775*	8207	*7787*	8219	*7799*	8231	*7811*
33	8098	*7655*	8110	*7667*	8122	*7679*	8133	*7691*	8145	*7702*	8157	*7714*	8169	*7726*	8180	*7738*	8192	*7749*	8204	*7761*
34	8072	*7605*	8083	*7617*	8095	*7628*	8107	*7640*	8119	*7652*	8130	*7664*	8142	*7675*	8154	*7687*	8165	*7699*	8177	*7710*
35	0,8046	*0,7554*	0,8057	*0,7565*	0,8069	*0,7577*	0,8080	*0,7589*	0,8092	*0,7600*	0,8104	*0,7612*	0,8115	*0,7624*	0,8127	*0,7635*	0,8139	*0,7647*	0,8150	*0,7659*
36	8019	*7501*	8031	*7513*	8043	*7525*	8054	*7536*	8066	*7548*	8078	*7560*	8089	*7571*	8101	*7583*	8112	*7594*	8124	*7606*
37	7994	*7448*	8005	*7460*	8017	*7471*	8028	*7483*	8040	*7495*	8051	*7506*	8063	*7518*	8075	*7529*	8086	*7541*	8098	*7553*
38	7968	*7394*	7979	*7405*	7991	*7417*	8002	*7429*	8014	*7440*	8026	*7452*	8037	*7463*	8049	*7475*	8060	*7486*	8072	*7498*
39	7942	*7339*	7954	*7350*	7965	*7362*	7977	*7373*	7988	*7385*	8000	*7396*	8011	*7408*	8023	*7419*	8034	*7431*	8046	*7442*
40	0,7917	*0,7282*	0,7928	*0,7293*	0,7940	*0,7305*	0,7951	*0,7316*	0,7963	*0,7328*	0,7974	*0,7339*	0,7986	*0,7351*	0,7997	*0,7362*	0,8009	*0,7374*	0,8020	*0,7385*
41	7892	*7224*	7903	*7236*	7914	*7247*	7926	*7259*	7937	*7270*	7949	*7281*	7960	*7293*	7972	*7304*	7983	*7316*	7994	*7327*
42	7866	*7165*	7878	*7177*	7889	*7188*	7901	*7199*	7912	*7211*	7923	*7222*	7935	*7234*	7946	*7245*	7958	*7256*	7969	*7268*

	700		701		702		703		704		705		706		707		708		709	
0	0,9211	*0,9150*	0,9224	*0,9163*	0,9237	*0,9177*	0,9250	*0,9190*	0,9263	*0,9203*	0,9276	*0,9216*	0,9289	*0,9229*	0,9303	*0,9242*	0,9316	*0,9256*	0,9329	*0,9269*
1	9177	*9112*	9190	*9125*	9203	*9138*	9216	*9152*	9229	*9165*	9242	*9178*	9256	*9191*	9269	*9204*	9282	*9217*	9295	*9230*
2	9143	*9074*	9156	*9087*	9170	*9100*	9183	*9113*	9196	*9127*	9209	*9140*	9222	*9153*	9235	*9166*	9248	*9179*	9261	*9192*
3	9110	*9036*	9123	*9049*	9136	*9062*	9149	*9075*	9162	*9088*	9175	*9101*	9188	*9114*	9201	*9127*	9214	*9140*	9227	*9153*
4	9077	*8998*	9090	*9011*	9103	*9024*	9116	*9037*	9129	*9050*	9142	*9063*	9155	*9076*	9168	*9089*	9181	*9102*	9194	*9115*
5	0,9045	*0,8960*	0,9057	*0,8973*	0,9070	*0,8986*	0,9083	*0,8999*	0,9096	*0,9012*	0,9109	*0,9025*	0,9122	*0,9038*	0,9135	*0,9050*	0,9148	*0,9063*	0,9161	*0,9076*
6	9012	*8922*	9025	*8935*	9038	*8948*	9051	*8960*	9064	*8973*	9076	*8986*	9089	*8999*	9102	*9012*	9115	*9025*	9128	*9038*
7	8980	*8883*	8993	*8896*	9005	*8909*	9018	*8922*	9031	*8935*	9044	*8948*	9057	*8960*	9070	*8973*	9082	*8986*	9095	*8999*
8	8948	*8845*	8961	*8858*	8973	*8871*	8986	*8883*	8999	*8896*	9012	*8909*	9025	*8922*	9037	*8934*	9050	*8947*	9063	*8960*
9	8916	*8806*	8929	*8819*	8942	*8832*	8954	*8845*	8967	*8857*	8980	*8870*	8992	*8883*	9005	*8896*	9018	*8908*	9031	*8921*
10	0,8884	*0,8768*	0,8897	*0,8780*	0,8910	*0,8793*	0,8923	*0,8806*	0,8935	*0,8818*	0,8948	*0,8831*	0,8961	*0,8844*	0,8973	*0,8856*	0,8986	*0,8869*	0,8999	*0,8882*
11	8853	*8729*	8866	*8741*	8878	*8754*	8891	*8767*	8904	*8779*	8916	*8792*	8929	*8805*	8942	*8817*	8954	*8830*	8967	*8842*
12	8822	*8689*	8835	*8702*	8847	*8715*	8860	*8727*	8872	*8740*	8885	*8752*	8898	*8765*	8910	*8778*	8923	*8790*	8935	*8803*
13	8791	*8650*	8804	*8663*	8816	*8675*	8829	*8688*	8841	*8700*	8854	*8713*	8866	*8725*	8879	*8738*	8892	*8751*	8904	*8763*
14	8760	*8610*	8773	*8623*	8785	*8635*	8798	*8648*	8810	*8660*	8823	*8673*	8836	*8685*	8848	*8698*	8861	*8711*	8873	*8723*
15	0,8730	*0,8570*	0,8742	*0,8583*	0,8755	*0,8595*	0,8767	*0,8608*	0,8780	*0,8620*	0,8792	*0,8633*	0,8805	*0,8645*	0,8817	*0,8658*	0,8830	*0,8670*	0,8842	*0,8683*
16	8700	*8530*	8712	*8543*	8725	*8555*	8737	*8568*	8749	*8580*	8762	*8592*	8774	*8605*	8787	*8617*	8799	*8630*	8812	*8642*
17	8670	*8490*	8682	*8502*	8694	*8514*	8707	*8527*	8719	*8539*	8732	*8552*	8744	*8564*	8756	*8576*	8769	*8589*	8781	*8601*
18	8640	*8449*	8652	*8461*	8664	*8473*	8677	*8486*	8689	*8498*	8701	*8510*	8714	*8523*	8726	*8535*	8739	*8547*	8751	*8560*
19	8610	*8407*	8622	*8420*	8635	*8432*	8647	*8444*	8659	*8457*	8672	*8469*	8684	*8481*	8696	*8494*	8709	*8506*	8721	*8518*
20	0,8581	*0,8366*	0,8593	*0,8378*	0,8605	*0,8390*	0,8617	*0,8403*	0,8630	*0,8415*	0,8642	*0,8427*	0,8654	*0,8439*	0,8667	*0,8452*	0,8679	*0,8464*	0,8691	*0,8476*
21	8551	*8324*	8564	*8336*	8576	*8348*	8588	*8360*	8600	*8372*	8613	*8385*	8625	*8397*	8637	*8409*	8649	*8421*	8661	*8434*
22	8522	*8281*	8535	*8293*	8547	*8305*	8559	*8318*	8571	*8330*	8583	*8342*	8595	*8354*	8608	*8366*	8620	*8378*	8632	*8391*
23	8494	*8238*	8506	*8250*	8518	*8262*	8530	*8274*	8542	*8286*	8554	*8299*	8566	*8311*	8579	*8323*	8591	*8335*	8603	*8347*
24	8465	*8194*	8477	*8206*	8489	*8219*	8501	*8231*	8513	*8243*	8525	*8255*	8537	*8267*	8550	*8279*	8562	*8291*	8574	*8303*
25	0,8436	*0,8150*	0,8449	*0,8162*	0,8461	*0,8174*	0,8473	*0,8186*	0,8485	*0,8198*	0,8497	*0,8210*	0,8509	*0,8222*	0,8521	*0,8235*	0,8533	*0,8247*	0,8545	*0,8259*
26	8408	*8105*	8420	*8117*	8432	*8129*	8444	*8141*	8456	*8153*	8468	*8165*	8480	*8177*	8492	*8189*	8504	*8202*	8516	*8214*
27	8380	*8060*	8392	*8072*	8404	*8084*	8416	*8096*	8428	*8108*	8440	*8120*	8452	*8132*	8464	*8144*	8476	*8156*	8488	*8168*
28	8352	*8014*	8364	*8026*	8376	*8038*	8388	*8050*	8400	*8062*	8412	*8074*	8424	*8086*	8436	*8098*	8448	*8109*	8460	*8121*
29	8325	*7967*	8336	*7979*	8348	*7991*	8360	*8003*	8372	*8015*	8384	*8027*	8396	*8039*	8408	*8051*	8420	*8062*	8432	*8074*
30	0,8297	*0,7920*	0,8309	*0,7932*	0,8321	*0,7944*	0,8333	*0,7955*	0,8344	*0,7967*	0,8356	*0,7979*	0,8368	*0,7991*	0,8380	*0,8003*	0,8392	*0,8015*	0,8404	*0,8026*
31	8270	*7872*	8281	*7883*	8293	*7895*	8305	*7907*	8317	*7919*	8329	*7931*	8341	*7943*	8352	*7954*	8364	*7966*	8376	*7978*
32	8243	*7823*	8254	*7834*	8266	*7846*	8278	*7858*	8290	*7870*	8301	*7881*	8313	*7893*	8325	*7905*	8337	*7917*	8348	*7929*
33	8216	*7773*	8227	*7784*	8239	*7796*	8251	*7808*	8262	*7820*	8274	*7831*	8286	*7843*	8298	*7855*	8309	*7867*	8321	*7878*
34	8189	*7722*	8200	*7734*	8212	*7745*	8224	*7757*	8236	*7769*	8247	*7780*	8259	*7792*	8271	*7804*	8282	*7816*	8294	*7827*
35	0,8162	*0,7670*	0,8174	*0,7682*	0,8185	*0,7694*	0,8197	*0,7705*	0,8209	*0,7717*	0,8220	*0,7729*	0,8232	*0,7740*	0,8244	*0,7752*	0,8255	*0,7764*	0,8267	*0,7775*
36	8136	*7618*	8147	*7629*	8159	*7641*	8171	*7653*	8182	*7664*	8194	*7676*	8205	*7687*	8217	*7699*	8229	*7711*	8240	*7722*
37	8109	*7564*	8121	*7576*	8133	*7587*	8144	*7599*	8156	*7610*	8167	*7622*	8179	*7634*	8190	*7645*	8202	*7657*	8214	*7668*
38	8083	*7509*	8095	*7521*	8106	*7533*	8118	*7544*	8129	*7556*	8141	*7567*	8153	*7579*	8164	*7590*	8176	*7602*	8187	*7613*
39	8057	*7454*	8069	*7465*	8080	*7477*	8092	*7488*	8103	*7500*	8115	*7511*	8126	*7523*	8138	*7534*	8149	*7546*	8161	*7557*
40	0,8032	*0,7397*	0,8043	*0,7408*	0,8054	*0,7420*	0,8066	*0,7431*	0,8077	*0,7443*	0,8089	*0,7454*	0,8100	*0,7466*	0,8112	*0,7477*	0,8123	*0,7489*	0,8135	*0,7500*
41	8006	*7339*	8017	*7350*	8029	*7362*	8040	*7373*	8052	*7384*	8063	*7396*	8075	*7407*	8086	*7419*	8097	*7430*	8109	*7442*
42	7980	*7279*	7992	*7291*	8003	*7302*	8015	*7313*	8026	*7325*	8037	*7336*	8049	*7348*	8060	*7359*	8072	*7370*	8083	*7382*

Torr / °C	710		711		712		713		714		715		716		717		718		719	
	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*
0	0,9342	*0,9282*	0,9355	*0,9295*	0,9368	*0,9308*	0,9382	*0,9321*	0,9395	*0,9334*	0,9408	*0,9348*	0,9421	*0,9361*	0,9434	*0,9374*	0,9447	*0,9387*	0,9461	*0,9400*
1	9308	*9243*	9321	*9256*	9334	*9270*	9347	*9283*	9360	*9296*	9373	*9309*	9387	*9322*	9400	*9335*	9413	*9348*	9426	*9361*
2	9274	*9205*	9287	*9218*	9300	*9231*	9313	*9244*	9326	*9257*	9339	*9270*	9352	*9283*	9365	*9296*	9379	*9309*	9392	*9322*
3	9240	*9166*	9253	*9179*	9266	*9192*	9279	*9205*	9292	*9218*	9305	*9231*	9318	*9244*	9331	*9257*	9344	*9270*	9358	*9284*
4	9207	*9128*	9220	*9141*	9233	*9154*	9246	*9167*	9259	*9180*	9272	*9193*	9285	*9206*	9298	*9219*	9311	*9232*	9324	*9245*
5	0,9174	*0,9089*	0,9187	*0,9102*	0,9200	*0,9115*	0,9213	*0,9128*	0,9225	*0,9141*	0,9238	*0,9154*	0,9251	*0,9167*	0,9264	*0,9180*	0,9277	*0,9193*	0,9290	*0,9206*
6	9141	*9051*	9154	*9063*	9167	*9076*	9179	*9089*	9192	*9102*	9205	*9115*	9218	*9128*	9231	*9141*	9244	*9154*	9257	*9166*
7	9108	*9012*	9121	*9025*	9134	*9037*	9147	*9050*	9159	*9063*	9172	*9076*	9185	*9089*	9198	*9102*	9211	*9114*	9224	*9127*
8	9076	*8973*	9088	*8986*	9101	*8998*	9114	*9011*	9127	*9024*	9140	*9037*	9152	*9050*	9165	*9062*	9178	*9075*	9191	*9088*
9	9043	*8934*	9056	*8946*	9069	*8959*	9082	*8972*	9094	*8985*	9107	*8997*	9120	*9010*	9133	*9023*	9145	*9036*	9158	*9048*
10	0,9011	*0,8895*	0,9024	*0,8907*	0,9037	*0,8920*	0,9049	*0,8933*	0,9062	*0,8945*	0,9075	*0,8958*	0,9088	*0,8971*	0,9100	*0,8983*	0,9113	*0,8996*	0,9126	*0,9009*
11	8980	*8855*	8992	*8868*	9005	*8880*	9018	*8893*	9030	*8906*	9043	*8918*	9055	*8931*	9068	*8944*	9081	*8956*	9093	*8969*
12	8948	*8815*	8961	*8828*	8973	*8841*	8986	*8853*	8998	*8866*	9011	*8878*	9024	*8891*	9036	*8904*	9049	*8916*	9061	*8929*
13	8917	*8776*	8929	*8788*	8942	*8801*	8954	*8813*	8967	*8826*	8979	*8838*	8992	*8851*	9005	*8864*	9017	*8876*	9030	*8889*
14	8886	*8736*	8898	*8748*	8911	*8761*	8923	*8773*	8936	*8786*	8948	*8798*	8961	*8811*	8973	*8823*	8986	*8836*	8998	*8848*
15	0,8855	*0,8695*	0,8867	*0,8708*	0,8880	*0,8720*	0,8892	*0,8733*	0,8905	*0,8745*	0,8917	*0,8758*	0,8929	*0,8770*	0,8942	*0,8782*	0,8954	*0,8795*	0,8967	*0,8807*
16	8824	*8655*	8836	*8667*	8849	*8679*	8861	*8692*	8874	*8704*	8886	*8717*	8899	*8729*	8911	*8742*	8923	*8754*	8936	*8766*
17	8793	*8614*	8806	*8626*	8818	*8638*	8831	*8651*	8843	*8663*	8855	*8675*	8868	*8688*	8880	*8700*	8893	*8713*	8905	*8725*
18	8763	*8572*	8776	*8585*	8788	*8597*	8800	*8609*	8813	*8622*	8825	*8634*	8837	*8646*	8850	*8659*	8862	*8671*	8874	*8683*
19	8733	*8530*	8745	*8543*	8758	*8555*	8770	*8567*	8782	*8580*	8795	*8592*	8807	*8604*	8819	*8617*	8832	*8629*	8844	*8641*
20	0,8703	*0,8488*	0,8716	*0,8501*	0,8728	*0,8513*	0,8740	*0,8525*	0,8752	*0,8537*	0,8765	*0,8550*	0,8777	*0,8562*	0,8789	*0,8574*	0,8801	*0,8586*	0,8814	*0,8599*
21	8674	*8446*	8686	*8458*	8698	*8470*	8710	*8482*	8722	*8495*	8735	*8507*	8747	*8519*	8759	*8531*	8771	*8544*	8784	*8556*
22	8644	*8403*	8656	*8415*	8669	*8427*	8681	*8439*	8693	*8451*	8705	*8464*	8717	*8476*	8729	*8488*	8742	*8500*	8754	*8512*
23	8615	*8359*	8627	*8371*	8639	*8384*	8651	*8396*	8663	*8408*	8676	*8420*	8688	*8432*	8700	*8444*	8712	*8456*	8724	*8468*
24	8586	*8315*	8598	*8327*	8610	*8339*	8622	*8352*	8634	*8364*	8646	*8376*	8658	*8388*	8671	*8400*	8683	*8412*	8695	*8424*
25	0,8557	*0,8271*	0,8569	*0,8283*	0,8581	*0,8295*	0,8593	*0,8307*	0,8605	*0,8319*	0,8617	*0,8331*	0,8629	*0,8343*	0,8641	*0,8355*	0,8653	*0,8367*	0,8665	*0,8379*
26	8528	*8226*	8540	*8238*	8552	*8250*	8564	*8262*	8576	*8274*	8588	*8286*	8600	*8298*	8612	*8310*	8624	*8322*	8636	*8334*
27	8500	*8180*	8512	*8192*	8524	*8204*	8536	*8216*	8548	*8228*	8560	*8240*	8572	*8252*	8584	*8264*	8596	*8276*	8608	*8287*
28	8472	*8133*	8483	*8145*	8495	*8157*	8507	*8169*	8519	*8181*	8531	*8193*	8543	*8205*	8555	*8217*	8567	*8229*	8579	*8241*
29	8443	*8086*	8455	*8098*	8467	*8110*	8479	*8122*	8491	*8134*	8503	*8146*	8515	*8158*	8527	*8169*	8539	*8181*	8550	*8193*
30	0,8416	*0,8038*	0,8427	*0,8050*	0,8439	*0,8062*	0,8451	*0,8074*	0,8463	*0,8086*	0,8475	*0,8098*	0,8487	*0,8109*	0,8499	*0,8121*	0,8510	*0,8133*	0,8522	*0,8145*
31	8388	*7990*	8400	*8002*	8411	*8013*	8423	*8025*	8435	*8037*	8447	*8049*	8459	*8061*	8471	*8072*	8482	*8084*	8494	*8096*
32	8360	*7940*	8372	*7952*	8384	*7964*	8396	*7976*	8407	*7987*	8419	*7999*	8431	*8011*	8443	*8023*	8454	*8035*	8466	*8046*
33	8333	*7890*	8345	*7902*	8356	*7914*	8368	*7925*	8380	*7937*	8392	*7949*	8403	*7961*	8415	*7972*	8427	*7984*	8439	*7996*
34	8306	*7839*	8317	*7851*	8329	*7862*	8341	*7874*	8353	*7886*	8364	*7897*	8376	*7909*	8388	*7921*	8399	*7933*	8411	*7944*
35	0,8279	*0,7787*	0,8290	*0,7799*	0,8302	*0,7810*	0,8314	*0,7822*	0,8325	*0,7834*	0,8337	*0,7845*	0,8349	*0,7857*	0,8360	*0,7869*	0,8372	*0,7880*	0,8384	*0,7892*
36	8252	*7734*	8263	*7746*	8275	*7757*	8287	*7769*	8298	*7780*	8310	*7792*	8322	*7804*	8333	*7815*	8345	*7827*	8356	*7839*
37	8225	*7680*	8237	*7692*	8248	*7703*	8260	*7715*	8272	*7726*	8283	*7738*	8295	*7749*	8306	*7761*	8318	*7773*	8329	*7784*
38	8199	*7625*	8210	*7636*	8222	*7648*	8233	*7660*	8245	*7671*	8256	*7683*	8268	*7694*	8280	*7706*	8291	*7717*	8303	*7729*
39	8172	*7569*	8184	*7580*	8195	*7592*	8207	*7603*	8218	*7615*	8230	*7626*	8241	*7638*	8253	*7649*	8264	*7661*	8276	*7672*
40	0,8146	*0,7511*	0,8158	*0,7523*	0,8169	*0,7534*	0,8181	*0,7546*	0,8192	*0,7557*	0,8204	*0,7569*	0,8215	*0,7580*	0,8227	*0,7592*	0,8238	*0,7603*	0,8249	*0,7615*
41	8120	*7453*	8132	*7464*	8143	*7476*	8155	*7487*	8166	*7499*	8177	*7510*	8189	*7522*	8200	*7533*	8212	*7545*	8223	*7556*
42	8094	*7393*	8106	*7405*	8117	*7416*	8129	*7427*	8140	*7439*	8151	*7450*	8163	*7462*	8174	*7473*	8186	*7484*	8197	*7496*

	720		721		722		723		724		725		726		727		728		729	
0	0,9474	*0,9413*	0,9487	*0,9427*	0,9500	*0,9440*	0,9513	*0,9453*	0,9526	*0,9466*	0,9539	*0,9479*	0,9553	*0,9492*	0,9566	*0,9506*	0,9579	*0,9519*	0,9592	*0,9532*
1	9439	*9374*	9452	*9388*	9465	*9401*	9478	*9414*	9491	*9427*	9505	*9440*	9518	*9453*	9531	*9466*	9544	*9479*	9557	*9492*
2	9405	*9336*	9418	*9349*	9431	*9362*	9444	*9375*	9457	*9388*	9470	*9401*	9483	*9414*	9496	*9427*	9509	*9440*	9522	*9453*
3	9371	*9297*	9384	*9310*	9397	*9323*	9410	*9336*	9423	*9349*	9436	*9362*	9449	*9375*	9462	*9388*	9475	*9401*	9488	*9414*
4	9337	*9258*	9350	*9270*	9363	*9283*	9376	*9296*	9388	*9309*	9401	*9322*	9414	*9335*	9427	*9348*	9440	*9361*	9453	*9374*
5	0,9303	*0,9218*	0,9316	*0,9231*	0,9329	*0,9244*	0,9342	*0,9257*	0,9355	*0,9270*	0,9368	*0,9283*	0,9380	*0,9296*	0,9393	*0,9309*	0,9406	*0,9322*	0,9419	*0,9335*
6	9270	*9179*	9282	*9192*	9295	*9205*	9308	*9218*	9321	*9231*	9334	*9244*	9347	*9257*	9360	*9269*	9373	*9282*	9385	*9295*
7	9236	*9140*	9249	*9153*	9262	*9166*	9275	*9179*	9288	*9191*	9301	*9204*	9313	*9217*	9326	*9230*	9339	*9243*	9352	*9255*
8	9203	*9101*	9216	*9113*	9229	*9126*	9242	*9139*	9255	*9152*	9267	*9165*	9280	*9177*	9293	*9190*	9306	*9203*	9319	*9216*
9	9171	*9061*	9184	*9074*	9196	*9087*	9209	*9099*	9222	*9112*	9234	*9125*	9247	*9138*	9260	*9150*	9273	*9163*	9285	*9176*
10	0,9138	*0,9021*	0,9151	*0,9034*	0,9164	*0,9047*	0,9176	*0,9060*	0,9189	*0,9072*	0,9202	*0,9085*	0,9214	*0,9098*	0,9227	*0,9110*	0,9240	*0,9123*	0,9253	*0,9136*
11	9106	*8982*	9119	*8994*	9131	*9007*	9144	*9020*	9157	*9032*	9169	*9045*	9182	*9057*	9195	*9070*	9207	*9083*	9220	*9095*
12	9074	*8942*	9087	*8954*	9099	*8967*	9112	*8979*	9124	*8992*	9137	*9005*	9150	*9017*	9162	*9030*	9175	*9042*	9187	*9055*
13	9042	*8901*	9055	*8914*	9067	*8926*	9080	*8939*	9093	*8951*	9105	*8964*	9118	*8977*	9130	*8989*	9143	*9002*	9155	*9014*
14	9011	*8861*	9023	*8873*	9036	*8886*	9048	*8898*	9061	*8911*	9073	*8923*	9086	*8936*	9098	*8948*	9111	*8961*	9123	*8973*
15	0,8979	*0,8820*	0,8992	*0,8832*	0,9004	*0,8845*	0,9017	*0,8857*	0,9029	*0,8870*	0,9042	*0,8882*	0,9054	*0,8895*	0,9067	*0,8907*	0,9079	*0,8920*	0,9092	*0,8932*
16	8948	*8779*	8961	*8791*	8973	*8804*	8986	*8816*	8998	*8829*	9010	*8841*	9023	*8853*	9035	*8866*	9048	*8878*	9060	*8891*
17	8917	*8737*	8930	*8750*	8942	*8762*	8954	*8775*	8967	*8787*	8979	*8799*	8992	*8812*	9004	*8824*	9016	*8836*	9029	*8849*
18	8887	*8696*	8899	*8708*	8911	*8720*	8924	*8733*	8936	*8745*	8948	*8757*	8961	*8770*	8973	*8782*	8985	*8794*	8998	*8807*
19	8856	*8653*	8868	*8666*	8881	*8678*	8893	*8690*	8905	*8703*	8918	*8715*	8930	*8727*	8942	*8740*	8955	*8752*	8967	*8764*
20	0,8826	*0,8611*	0,8838	*0,8623*	0,8850	*0,8635*	0,8863	*0,8648*	0,8875	*0,8660*	0,8887	*0,8672*	0,8899	*0,8684*	0,8912	*0,8697*	0,8924	*0,8709*	0,8936	*0,8721*
21	8796	*8568*	8808	*8580*	8820	*8592*	8832	*8605*	8845	*8617*	8857	*8629*	8869	*8641*	8881	*8653*	8894	*8666*	8906	*8678*
22	8766	*8525*	8778	*8537*	8790	*8549*	8802	*8561*	8815	*8573*	8827	*8585*	8839	*8598*	8851	*8610*	8863	*8622*	8875	*8634*
23	8736	*8481*	8748	*8493*	8761	*8505*	8773	*8517*	8785	*8529*	8797	*8541*	8809	*8553*	8821	*8566*	8833	*8578*	8845	*8590*
24	8707	*8436*	8719	*8448*	8731	*8460*	8743	*8472*	8755	*8485*	8767	*8497*	8779	*8509*	8791	*8521*	8804	*8533*	8816	*8545*
25	0,8678	*0,8391*	0,8690	*0,8403*	0,8702	*0,8415*	0,8714	*0,8427*	0,8726	*0,8439*	0,8738	*0,8451*	0,8750	*0,8464*	0,8762	*0,8476*	0,8774	*0,8488*	0,8786	*0,8500*
26	8648	*8346*	8660	*8358*	8672	*8370*	8684	*8382*	8696	*8394*	8709	*8406*	8721	*8418*	8733	*8430*	8745	*8442*	8757	*8454*
27	8620	*8299*	8632	*8311*	8644	*8323*	8655	*8335*	8667	*8347*	8679	*8359*	8691	*8371*	8703	*8383*	8715	*8395*	8727	*8407*
28	8591	*8253*	8603	*8265*	8615	*8276*	8627	*8288*	8639	*8300*	8651	*8312*	8662	*8324*	8674	*8336*	8686	*8348*	8698	*8360*
29	8562	*8205*	8574	*8217*	8586	*8229*	8598	*8241*	8610	*8253*	8622	*8265*	8634	*8276*	8646	*8288*	8658	*8300*	8669	*8312*
30	0,8534	*0,8157*	0,8546	*0,8169*	0,8558	*0,8181*	0,8570	*0,8192*	0,8581	*0,8204*	0,8593	*0,8216*	0,8605	*0,8228*	0,8617	*0,8240*	0,8629	*0,8252*	0,8641	*0,8264*
31	8506	*8108*	8518	*8120*	8530	*8132*	8541	*8143*	8553	*8155*	8565	*8167*	8577	*8179*	8589	*8191*	8600	*8202*	8612	*8214*
32	8478	*8058*	8490	*8070*	8502	*8082*	8513	*8093*	8525	*8105*	8537	*8117*	8549	*8129*	8560	*8141*	8572	*8152*	8584	*8164*
33	8450	*8007*	8462	*8019*	8474	*8031*	8485	*8043*	8497	*8054*	8509	*8066*	8521	*8078*	8532	*8090*	8544	*8101*	8556	*8113*
34	8423	*7956*	8434	*7968*	8446	*7979*	8458	*7991*	8469	*8003*	8481	*8014*	8493	*8026*	8505	*8038*	8516	*8050*	8528	*8061*
35	0,8395	*0,7904*	0,8407	*0,7915*	0,8419	*0,7927*	0,8430	*0,7939*	0,8442	*0,7950*	0,8454	*0,7962*	0,8465	*0,7974*	0,8477	*0,7985*	0,8489	*0,7997*	0,8500	*0,8008*
36	8368	*7850*	8380	*7862*	8391	*7873*	8403	*7885*	8415	*7897*	8426	*7908*	8438	*7920*	8449	*7932*	8461	*7943*	8473	*7955*
37	8341	*7796*	8353	*7807*	8364	*7819*	8376	*7831*	8387	*7842*	8399	*7854*	8411	*7865*	8422	*7877*	8434	*7888*	8445	*7900*
38	8314	*7740*	8326	*7752*	8337	*7763*	8349	*7775*	8360	*7787*	8372	*7798*	8383	*7810*	8395	*7821*	8407	*7833*	8418	*7844*
39	8287	*7684*	8299	*7695*	8311	*7707*	8322	*7718*	8334	*7730*	8345	*7741*	8357	*7753*	8368	*7764*	8380	*7776*	8391	*7787*
40	0,8261	*0,7626*	0,8272	*0,7638*	0,8284	*0,7649*	0,8295	*0,7661*	0,8307	*0,7672*	0,8318	*0,7684*	0,8330	*0,7695*	0,8341	*0,7707*	0,8353	*0,7718*	0,8364	*0,7729*
41	8235	*7567*	8246	*7579*	8257	*7590*	8269	*7602*	8280	*7613*	8292	*7625*	8303	*7636*	8315	*7647*	8326	*7659*	8338	*7670*
42	8208	*7507*	8220	*7519*	8231	*7530*	8243	*7542*	8254	*7553*	8265	*7564*	8277	*7576*	8288	*7587*	8300	*7599*	8311	*7610*

Torr	730		731		732		733		734		735		736		737		738		739	
°C	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*
0	0,9605	*0,9545*	0,9618	*0,9558*	0,9632	*0,9571*	0,9645	*0,9584*	0,9658	*0,9598*	0,9671	*0,9611*	0,9684	*0,9624*	0,9697	*0,9637*	0,9711	*0,9650*	0,9724	*0,9663*
1	9570	*9506*	9583	*9519*	9596	*9532*	9609	*9545*	9623	*9558*	9636	*9571*	9649	*9584*	9662	*9597*	9675	*9610*	9688	*9624*
2	9535	*9466*	9548	*9479*	9561	*9492*	9574	*9505*	9588	*9518*	9601	*9531*	9614	*9544*	9627	*9558*	9640	*9571*	9653	*9584*
3	9501	*9427*	9514	*9440*	9527	*9453*	9540	*9466*	9553	*9479*	9566	*9492*	9579	*9505*	9592	*9518*	9605	*9531*	9618	*9544*
4	9466	*9387*	9479	*9400*	9492	*9413*	9505	*9426*	9518	*9439*	9531	*9452*	9544	*9465*	9557	*9478*	9570	*9491*	9583	*9504*
5	0,9432	*0,9348*	0,9445	*0,9361*	0,9458	*0,9373*	0,9471	*0,9386*	0,9484	*0,9399*	0,9497	*0,9412*	0,9510	*0,9425*	0,9523	*0,9438*	0,9536	*0,9451*	0,9548	*0,9464*
6	9398	*9308*	9411	*9321*	9424	*9334*	9437	*9347*	9450	*9360*	9463	*9372*	9476	*9385*	9488	*9398*	9501	*9411*	9514	*9424*
7	9365	*9268*	9378	*9281*	9390	*9294*	9403	*9307*	9416	*9320*	9429	*9332*	9442	*9345*	9454	*9358*	9467	*9371*	9480	*9384*
8	9331	*9228*	9344	*9241*	9357	*9254*	9370	*9267*	9382	*9280*	9395	*9292*	9408	*9305*	9421	*9318*	9434	*9331*	9446	*9344*
9	9298	*9188*	9311	*9201*	9324	*9214*	9336	*9227*	9349	*9239*	9362	*9252*	9375	*9265*	9387	*9278*	9400	*9290*	9413	*9303*
10	0,9265	*0,9148*	0,9278	*0,9161*	0,9291	*0,9174*	0,9303	*0,9186*	0,9316	*0,9199*	0,9329	*0,9212*	0,9341	*0,9225*	0,9354	*0,9237*	0,9367	*0,9250*	0,9379	*0,9263*
11	9233	*9108*	9245	*9121*	9258	*9133*	9270	*9146*	9283	*9159*	9296	*9171*	9308	*9184*	9321	*9197*	9334	*9209*	9346	*9222*
12	9200	*9068*	9213	*9080*	9225	*9093*	9238	*9105*	9251	*9118*	9263	*9131*	9276	*9143*	9288	*9156*	9301	*9168*	9314	*9181*
13	9168	*9027*	9180	*9039*	9193	*9052*	9206	*9064*	9218	*9077*	9231	*9090*	9243	*9102*	9256	*9115*	9268	*9127*	9281	*9140*
14	9136	*8986*	9148	*8998*	9161	*9011*	9173	*9023*	9186	*9036*	9198	*9048*	9211	*9061*	9223	*9073*	9236	*9086*	9248	*9098*
15	0,9104	*0,8945*	0,9117	*0,8957*	0,9129	*0,8970*	0,9141	*0,8982*	0,9154	*0,8994*	0,9166	*0,9007*	0,9179	*0,9019*	0,9191	*0,9032*	0,9204	*0,9044*	0,9216	*0,9057*
16	9073	*8903*	9085	*8916*	9097	*8928*	9110	*8940*	9122	*8953*	9135	*8965*	9147	*8978*	9160	*8990*	9172	*9003*	9184	*9015*
17	9041	*8861*	9054	*8874*	9066	*8886*	9078	*8898*	9091	*8911*	9103	*8923*	9115	*8936*	9128	*8948*	9140	*8960*	9153	*8973*
18	9010	*8819*	9022	*8831*	9035	*8844*	9047	*8856*	9059	*8868*	9072	*8881*	9084	*8893*	9096	*8905*	9109	*8918*	9121	*8930*
19	8979	*8776*	8991	*8789*	9004	*8801*	9016	*8813*	9028	*8826*	9041	*8838*	9053	*8850*	9065	*8863*	9078	*8875*	9090	*8887*
20	0,8948	*0,8734*	0,8961	*0,8746*	0,8973	*0,8758*	0,8985	*0,8770*	0,8997	*0,8783*	0,9010	*0,8795*	0,9022	*0,8807*	0,9034	*0,8819*	0,9047	*0,8832*	0,9059	*0,8844*
21	8918	*8690*	8930	*8702*	8942	*8715*	8955	*8727*	8967	*8739*	8979	*8751*	8991	*8763*	9003	*8776*	9016	*8788*	9028	*8800*
22	8888	*8646*	8900	*8658*	8912	*8671*	8924	*8683*	8936	*8695*	8949	*8707*	8961	*8719*	8973	*8732*	8985	*8744*	8997	*8756*
23	8858	*8602*	8870	*8614*	8882	*8626*	8894	*8638*	8906	*8650*	8918	*8663*	8930	*8675*	8943	*8687*	8955	*8699*	8967	*8711*
24	8828	*8557*	8840	*8569*	8852	*8581*	8864	*8593*	8876	*8605*	8888	*8618*	8900	*8630*	8912	*8642*	8924	*8654*	8937	*8666*
25	0,8798	*0,8512*	0,8810	*0,8524*	0,8822	*0,8536*	0,8834	*0,8548*	0,8846	*0,8560*	0,8858	*0,8572*	0,8870	*0,8584*	0,8882	*0,8596*	0,8894	*0,8608*	0,8907	*0,8620*
26	8769	*8466*	8781	*8478*	8793	*8490*	8805	*8502*	8817	*8514*	8829	*8526*	8841	*8538*	8853	*8550*	8865	*8562*	8877	*8574*
27	8739	*8419*	8751	*8431*	8763	*8443*	8775	*8455*	8787	*8467*	8799	*8479*	8811	*8491*	8823	*8503*	8835	*8515*	8847	*8527*
28	8710	*8372*	8722	*8384*	8734	*8396*	8746	*8408*	8758	*8420*	8770	*8432*	8782	*8444*	8794	*8455*	8806	*8467*	8818	*8479*
29	8681	*8324*	8693	*8336*	8705	*8348*	8717	*8360*	8729	*8372*	8741	*8383*	8753	*8395*	8765	*8407*	8776	*8419*	8788	*8431*
30	0,8653	*0,8275*	0,8664	*0,8287*	0,8676	*0,8299*	0,8688	*0,8311*	0,8700	*0,8323*	0,8712	*0,8335*	0,8724	*0,8347*	0,8736	*0,8358*	0,8747	*0,8370*	0,8759	*0,8382*
31	8624	*8226*	8636	*8238*	8648	*8250*	8660	*8261*	8671	*8273*	8683	*8285*	8695	*8297*	8707	*8309*	8719	*8321*	8730	*8332*
32	8596	*8176*	8608	*8188*	8619	*8199*	8631	*8211*	8643	*8223*	8655	*8235*	8666	*8246*	8678	*8258*	8690	*8270*	8702	*8282*
33	8568	*8125*	8579	*8137*	8591	*8148*	8603	*8160*	8615	*8172*	8626	*8184*	8638	*8195*	8650	*8207*	8662	*8219*	8673	*8230*
34	8540	*8073*	8551	*8085*	8563	*8096*	8575	*8108*	8586	*8120*	8598	*8131*	8610	*8143*	8622	*8155*	8633	*8167*	8645	*8178*
35	0,8512	*0,8020*	0,8524	*0,8032*	0,8535	*0,8043*	0,8547	*0,8055*	0,8559	*0,8067*	0,8570	*0,8078*	0,8582	*0,8090*	0,8594	*0,8102*	0,8605	*0,8113*	0,8617	*0,8125*
36	8484	*7966*	8496	*7978*	8508	*7990*	8519	*8001*	8531	*8013*	8542	*8025*	8554	*8036*	8566	*8048*	8577	*8059*	8589	*8071*
37	8457	*7912*	8468	*7923*	8480	*7935*	8492	*7946*	8503	*7958*	8515	*7970*	8526	*7981*	8538	*7993*	8550	*8004*	8561	*8016*
38	8430	*7856*	8441	*7867*	8453	*7879*	8464	*7890*	8476	*7902*	8487	*7914*	8499	*7925*	8510	*7937*	8522	*7948*	8534	*7960*
39	8403	*7799*	8414	*7810*	8426	*7822*	8437	*7834*	8449	*7845*	8460	*7857*	8472	*7868*	8483	*7880*	8495	*7891*	8506	*7903*
40	0,8376	*0,7741*	0,8387	*0,7752*	0,8399	*0,7764*	0,8410	*0,7775*	0,8422	*0,7787*	0,8433	*0,7798*	0,8445	*0,7810*	0,8456	*0,7821*	0,8467	*0,7833*	0,8479	*0,7844*
41	8349	*7682*	8360	*7693*	8372	*7705*	8383	*7716*	8395	*7728*	8406	*7739*	8418	*7750*	8429	*7762*	8440	*7773*	8452	*7785*
42	8322	*7621*	8334	*7633*	8345	*7644*	8357	*7656*	8368	*7667*	8379	*7678*	8391	*7690*	8402	*7701*	8414	*7713*	8425	*7724*

	740		741		742		743		744		745		746		747		748		749	
0	0,9737	*0,9677*	0,9750	*0,9690*	0,9763	*0,9703*	0,9776	*0,9716*	0,9789	*0,9729*	0,9803	*0,9742*	0,9816	*0,9756*	0,9829	*0,9769*	0,9842	*0,9782*	0,9855	*0,9795*
1	9701	*9637*	9714	*9650*	9727	*9663*	9741	*9676*	9754	*9689*	9767	*9702*	9780	*9715*	9793	*9728*	9806	*9742*	9819	*9755*
2	9666	*9597*	9679	*9610*	9692	*9623*	9705	*9636*	9718	*9649*	9731	*9662*	9744	*9675*	9757	*9688*	9770	*9701*	9783	*9714*
3	9631	*9557*	9644	*9570*	9657	*9583*	9670	*9596*	9683	*9609*	9696	*9622*	9709	*9635*	9722	*9648*	9735	*9661*	9748	*9674*
4	9596	*9517*	9609	*9530*	9622	*9543*	9635	*9556*	9648	*9569*	9661	*9582*	9674	*9595*	9687	*9608*	9700	*9621*	9713	*9634*
5	0,9561	*0,9477*	0,9574	*0,9490*	0,9587	*0,9503*	0,9600	*0,9516*	0,9613	*0,9529*	0,9626	*0,9541*	0,9639	*0,9554*	0,9652	*0,9567*	0,9665	*0,9580*	0,9678	*0,9593*
6	9527	*9437*	9540	*9450*	9553	*9463*	9566	*9475*	9579	*9488*	9591	*9501*	9604	*9514*	9617	*9527*	9630	*9540*	9643	*9553*
7	9493	*9397*	9506	*9409*	9519	*9422*	9531	*9435*	9544	*9448*	9557	*9461*	9570	*9474*	9583	*9486*	9596	*9499*	9608	*9512*
8	9459	*9356*	9472	*9369*	9485	*9382*	9497	*9395*	9510	*9407*	9523	*9420*	9536	*9433*	9549	*9446*	9561	*9459*	9574	*9471*
9	9426	*9316*	9438	*9329*	9451	*9341*	9464	*9354*	9476	*9367*	9489	*9380*	9502	*9392*	9515	*9405*	9527	*9418*	9540	*9430*
10	0,9392	*0,9275*	0,9405	*0,9288*	0,9418	*0,9301*	0,9430	*0,9313*	0,9443	*0,9326*	0,9456	*0,9339*	0,9468	*0,9351*	0,9481	*0,9364*	0,9494	*0,9377*	0,9506	*0,9389*
11	9359	*9235*	9372	*9247*	9384	*9260*	9397	*9272*	9410	*9285*	9422	*9298*	9435	*9310*	9448	*9323*	9460	*9336*	9473	*9348*
12	9326	*9194*	9339	*9206*	9351	*9219*	9364	*9231*	9377	*9244*	9389	*9257*	9402	*9269*	9414	*9282*	9427	*9294*	9440	*9307*
13	9293	*9152*	9306	*9165*	9319	*9178*	9331	*9190*	9344	*9203*	9356	*9215*	9369	*9228*	9381	*9240*	9394	*9253*	9406	*9265*
14	9261	*9111*	9274	*9124*	9286	*9136*	9299	*9149*	9311	*9161*	9324	*9174*	9336	*9186*	9349	*9199*	9361	*9211*	9374	*9224*
15	0,9229	*0,9069*	0,9241	*0,9082*	0,9254	*0,9094*	0,9266	*0,9107*	0,9279	*0,9119*	0,9291	*0,9132*	0,9304	*0,9144*	0,9316	*0,9157*	0,9329	*0,9169*	0,9341	*0,9182*
16	9197	*9027*	9209	*9040*	9222	*9052*	9234	*9065*	9247	*9077*	9259	*9090*	9271	*9102*	9284	*9114*	9296	*9127*	9309	*9139*
17	9165	*8985*	9177	*8997*	9190	*9010*	9202	*9022*	9215	*9035*	9227	*9047*	9239	*9059*	9252	*9072*	9264	*9084*	9277	*9097*
18	9133	*8942*	9146	*8955*	9158	*8967*	9171	*8979*	9183	*8992*	9195	*9004*	9208	*9017*	9220	*9029*	9232	*9041*	9245	*9054*
19	9102	*8899*	9114	*8912*	9127	*8924*	9139	*8936*	9151	*8949*	9164	*8961*	9176	*8973*	9188	*8986*	9201	*8998*	9213	*9010*
20	0,9071	*0,8856*	0,9083	*0,8868*	0,9096	*0,8881*	0,9108	*0,8893*	0,9120	*0,8905*	0,9132	*0,8917*	0,9145	*0,8930*	0,9157	*0,8942*	0,9169	*0,8954*	0,9181	*0,8966*
21	9040	*8812*	9052	*8825*	9065	*8837*	9077	*8849*	9089	*8861*	9101	*8873*	9113	*8886*	9126	*8898*	9138	*8910*	9150	*8922*
22	9009	*8768*	9022	*8780*	9034	*8792*	9046	*8805*	9058	*8817*	9070	*8829*	9082	*8841*	9095	*8853*	9107	*8865*	9119	*8878*
23	8979	*8723*	8991	*8735*	9003	*8748*	9015	*8760*	9027	*8772*	9040	*8784*	9052	*8796*	9064	*8808*	9076	*8820*	9088	*8833*
24	8949	*8678*	8961	*8690*	8973	*8702*	8985	*8714*	8997	*8726*	9009	*8739*	9021	*8751*	9033	*8763*	9045	*8775*	9057	*8787*
25	0,8919	*0,8632*	0,8931	*0,8644*	0,8943	*0,8656*	0,8955	*0,8668*	0,8967	*0,8680*	0,8979	*0,8693*	0,8991	*0,8705*	0,9003	*0,8717*	0,9015	*0,8729*	0,9027	*0,8741*
26	8889	*8586*	8901	*8598*	8913	*8610*	8925	*8622*	8937	*8634*	8949	*8646*	8961	*8658*	8973	*8670*	8985	*8682*	8997	*8694*
27	8859	*8539*	8871	*8551*	8883	*8563*	8895	*8575*	8907	*8587*	8919	*8599*	8931	*8611*	8943	*8623*	8955	*8635*	8967	*8647*
28	8830	*8491*	8841	*8503*	8853	*8515*	8865	*8527*	8877	*8539*	8889	*8551*	8901	*8563*	8913	*8575*	8925	*8587*	8937	*8599*
29	8800	*8443*	8812	*8455*	8824	*8467*	8836	*8479*	8848	*8491*	8860	*8502*	8872	*8514*	8883	*8526*	8895	*8538*	8907	*8550*
30	0,8771	*0,8394*	0,8783	*0,8406*	0,8795	*0,8418*	0,8807	*0,8429*	0,8819	*0,8441*	0,8830	*0,8453*	0,8842	*0,8465*	0,8854	*0,8477*	0,8866	*0,8489*	0,8878	*0,8501*
31	8742	*8344*	8754	*8356*	8766	*8368*	8778	*8380*	8789	*8391*	8801	*8403*	8813	*8415*	8825	*8427*	8837	*8439*	8849	*8450*
32	8714	*8294*	8725	*8305*	8737	*8317*	8749	*8329*	8761	*8341*	8772	*8352*	8784	*8364*	8796	*8376*	8808	*8388*	8820	*8400*
33	8685	*8242*	8697	*8254*	8708	*8266*	8720	*8277*	8732	*8289*	8744	*8301*	8755	*8313*	8767	*8324*	8779	*8336*	8791	*8348*
34	8657	*8190*	8668	*8202*	8680	*8213*	8692	*8225*	8703	*8237*	8715	*8248*	8727	*8260*	8739	*8272*	8750	*8284*	8762	*8295*
35	0,8629	*0,8137*	0,8640	*0,8148*	0,8652	*0,8160*	0,8663	*0,8172*	0,8675	*0,8183*	0,8687	*0,8195*	0,8698	*0,8207*	0,8710	*0,8218*	0,8722	*0,8230*	0,8733	*0,8242*
36	8601	*8083*	8612	*8094*	8624	*8106*	8635	*8117*	8647	*8129*	8659	*8141*	8670	*8152*	8682	*8164*	8694	*8176*	8705	*8187*
37	8573	*8027*	8584	*8039*	8596	*8051*	8608	*8062*	8619	*8074*	8631	*8085*	8642	*8097*	8654	*8109*	8665	*8120*	8677	*8132*
38	8545	*7971*	8557	*7983*	8568	*7994*	8580	*8006*	8591	*8018*	8603	*8029*	8614	*8041*	8626	*8052*	8638	*8064*	8649	*8075*
39	8518	*7914*	8529	*7926*	8541	*7937*	8552	*7949*	8564	*7960*	8575	*7972*	8587	*7983*	8598	*7995*	8610	*8006*	8621	*8018*
40	0,8490	*0,7856*	0,8502	*0,7867*	0,8513	*0,7879*	0,8525	*0,7890*	0,8536	*0,7902*	0,8548	*0,7913*	0,8559	*0,7925*	0,8571	*0,7936*	0,8582	*0,7947*	0,8594	*0,7959*
41	8463	*7796*	8475	*7808*	8486	*7819*	8498	*7830*	8509	*7842*	8521	*7853*	8532	*7865*	8543	*7876*	8555	*7888*	8566	*7899*
42	8436	*7735*	8448	*7747*	8459	*7758*	8471	*7770*	8482	*7781*	8493	*7792*	8505	*7804*	8516	*7815*	8528	*7827*	8539	*7838*

Torr	750		751		752		753		754		755		756		757		758		759	
°C	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*
0	0,9868	*0,9808*	0,9882	*0,9821*	0,9895	*0,9834*	0,9908	*0,9848*	0,9921	*0,9861*	0,9934	*0,9874*	0,9947	*0,9887*	0,9961	*0,9900*	0,9974	*0,9913*	0,9987	*0,9927*
1	9832	*9768*	9845	*9781*	9859	*9794*	9872	*9807*	9885	*9820*	9898	*9833*	9911	*9846*	9924	*9860*	9937	*9873*	9950	*9886*
2	9797	*9727*	9810	*9740*	9823	*9753*	9836	*9767*	9849	*9780*	9862	*9793*	9875	*9806*	9888	*9819*	9901	*9832*	9914	*9845*
3	9761	*9687*	9774	*9700*	9787	*9713*	9800	*9726*	9813	*9739*	9826	*9752*	9839	*9765*	9852	*9778*	9865	*9791*	9878	*9804*
4	9726	*9647*	9739	*9660*	9752	*9672*	9765	*9685*	9778	*9698*	9790	*9711*	9803	*9724*	9816	*9737*	9829	*9750*	9842	*9763*
5	0,9691	*0,9606*	0,9704	*0,9619*	0,9716	*0,9632*	0,9729	*0,9645*	0,9742	*0,9658*	0,9755	*0,9671*	0,9768	*0,9684*	0,9781	*0,9697*	0,9794	*0,9709*	0,9807	*0,9722*
6	9656	*9566*	9669	*9578*	9682	*9591*	9694	*9604*	9707	*9617*	9720	*9630*	9733	*9643*	9746	*9656*	9759	*9669*	9772	*9681*
7	9621	*9525*	9634	*9538*	9647	*9551*	9660	*9563*	9673	*9576*	9685	*9589*	9698	*9602*	9711	*9615*	9724	*9627*	9737	*9640*
8	9587	*9484*	9600	*9497*	9613	*9510*	9625	*9522*	9638	*9535*	9651	*9548*	9664	*9561*	9676	*9574*	9689	*9586*	9702	*9599*
9	9553	*9443*	9566	*9456*	9578	*9469*	9591	*9481*	9604	*9494*	9617	*9507*	9629	*9520*	9642	*9532*	9655	*9545*	9668	*9558*
10	0,9519	*0,9402*	0,9532	*0,9415*	0,9544	*0,9428*	0,9557	*0,9440*	0,9570	*0,9453*	0,9583	*0,9466*	0,9595	*0,9478*	0,9608	*0,9491*	0,9621	*0,9504*	0,9633	*0,9516*
11	9485	*9361*	9498	*9374*	9511	*9386*	9523	*9399*	9536	*9412*	9549	*9424*	9561	*9437*	9574	*9450*	9587	*9462*	9599	*9475*
12	9452	*9320*	9465	*9332*	9477	*9345*	9490	*9357*	9503	*9370*	9515	*9383*	9528	*9395*	9540	*9408*	9553	*9420*	9566	*9433*
13	9419	*9278*	9432	*9291*	9444	*9303*	9457	*9316*	9469	*9328*	9482	*9341*	9494	*9353*	9507	*9366*	9520	*9378*	9532	*9391*
14	9386	*9236*	9399	*9249*	9411	*9261*	9424	*9274*	9436	*9286*	9449	*9299*	9461	*9311*	9474	*9324*	9486	*9336*	9499	*9349*
15	0,9354	*0,9194*	0,9366	*0,9206*	0,9378	*0,9219*	0,9391	*0,9231*	0,9403	*0,9244*	0,9416	*0,9256*	0,9428	*0,9269*	0,9441	*0,9281*	0,9453	*0,9294*	0,9466	*0,9306*
16	9321	*9152*	9334	*9164*	9346	*9176*	9358	*9189*	9371	*9201*	9383	*9214*	9396	*9226*	9408	*9239*	9421	*9251*	9433	*9263*
17	9289	*9109*	9301	*9121*	9314	*9134*	9326	*9146*	9338	*9158*	9351	*9171*	9363	*9183*	9376	*9196*	9388	*9208*	9400	*9220*
18	9257	*9066*	9269	*9078*	9282	*9091*	9294	*9103*	9306	*9115*	9319	*9128*	9331	*9140*	9343	*9152*	9356	*9165*	9368	*9177*
19	9225	*9022*	9237	*9035*	9250	*9047*	9262	*9059*	9274	*9072*	9287	*9084*	9299	*9096*	9311	*9109*	9324	*9121*	9336	*9133*
20	0,9194	*0,8979*	0,9206	*0,8991*	0,9218	*0,9003*	0,9230	*0,9015*	0,9243	*0,9028*	0,9255	*0,9040*	0,9267	*0,9052*	0,9279	*0,9064*	0,9292	*0,9077*	0,9304	*0,9089*
21	9162	*8934*	9175	*8947*	9187	*8959*	9199	*8971*	9211	*8983*	9223	*8996*	9236	*9008*	9248	*9020*	9260	*9032*	9272	*9044*
22	9131	*8890*	9143	*8902*	9156	*8914*	9168	*8926*	9180	*8938*	9192	*8951*	9204	*8963*	9216	*8975*	9229	*8987*	9241	*8999*
23	9100	*8845*	9112	*8857*	9125	*8869*	9137	*8881*	9149	*8893*	9161	*8905*	9173	*8917*	9185	*8930*	9197	*8942*	9209	*8954*
24	9070	*8799*	9082	*8811*	9094	*8823*	9106	*8835*	9118	*8847*	9130	*8859*	9142	*8872*	9154	*8884*	9166	*8896*	9178	*8908*
25	0,9039	*0,8753*	0,9051	*0,8765*	0,9063	*0,8777*	0,9075	*0,8789*	0,9087	*0,8801*	0,9099	*0,8813*	0,9111	*0,8825*	0,9123	*0,8837*	0,9136	*0,8849*	0,9148	*0,8861*
26	9009	*8706*	9021	*8718*	9033	*8730*	9045	*8742*	9057	*8754*	9069	*8766*	9081	*8778*	9093	*8790*	9105	*8802*	9117	*8814*
27	8979	*8659*	8991	*8671*	9003	*8683*	9015	*8695*	9027	*8706*	9039	*8718*	9051	*8730*	9063	*8742*	9074	*8754*	9086	*8766*
28	8949	*8611*	8961	*8623*	8973	*8634*	8985	*8646*	8997	*8658*	9008	*8670*	9020	*8682*	9032	*8694*	9044	*8706*	9056	*8718*
29	8919	*8562*	8931	*8574*	8943	*8586*	8955	*8598*	8967	*8609*	8979	*8621*	8991	*8633*	9002	*8645*	9014	*8657*	9026	*8669*
30	0,8890	*0,8512*	0,8902	*0,8524*	0,8913	*0,8536*	0,8925	*0,8548*	0,8937	*0,8560*	0,8949	*0,8572*	0,8961	*0,8584*	0,8973	*0,8595*	0,8984	*0,8607*	0,8996	*0,8619*
31	8860	*8462*	8872	*8474*	8884	*8486*	8896	*8498*	8908	*8510*	8919	*8521*	8931	*8533*	8943	*8545*	8955	*8557*	8967	*8569*
32	8831	*8411*	8843	*8423*	8855	*8435*	8867	*8447*	8878	*8458*	8890	*8470*	8902	*8482*	8914	*8494*	8925	*8506*	8937	*8517*
33	8802	*8360*	8814	*8371*	8826	*8383*	8838	*8395*	8849	*8407*	8861	*8418*	8873	*8430*	8885	*8442*	8896	*8453*	8908	*8465*
34	8774	*8307*	8785	*8319*	8797	*8330*	8809	*8342*	8820	*8354*	8832	*8365*	8844	*8377*	8856	*8389*	8867	*8400*	8879	*8412*
35	0,8745	*0,8253*	0,8757	*0,8265*	0,8768	*0,8277*	0,8780	*0,8288*	0,8792	*0,8300*	0,8803	*0,8312*	0,8815	*0,8323*	0,8827	*0,8335*	0,8838	*0,8347*	0,8850	*0,8358*
36	8717	*8199*	8728	*8210*	8740	*8222*	8752	*8234*	8763	*8245*	8775	*8257*	8786	*8269*	8798	*8280*	8810	*8292*	8821	*8303*
37	8689	*8143*	8700	*8155*	8712	*8167*	8723	*8178*	8735	*8190*	8747	*8201*	8758	*8213*	8770	*8224*	8781	*8236*	8793	*8248*
38	8661	*8087*	8672	*8098*	8684	*8110*	8695	*8121*	8707	*8133*	8718	*8145*	8730	*8156*	8741	*8168*	8753	*8179*	8765	*8191*
39	8633	*8029*	8644	*8041*	8656	*8052*	8667	*8064*	8679	*8075*	8690	*8087*	8702	*8098*	8713	*8110*	8725	*8121*	8736	*8133*
40	0,8605	*0,7970*	0,8617	*0,7982*	0,8628	*0,7993*	0,8640	*0,8005*	0,8651	*0,8016*	0,8663	*0,8028*	0,8674	*0,8039*	0,8685	*0,8051*	0,8697	*0,8062*	0,8708	*0,8074*
41	8578	*7910*	8589	*7922*	8601	*7933*	8612	*7945*	8623	*7956*	8635	*7968*	8646	*7979*	8658	*7991*	8669	*8002*	8681	*8013*
42	8550	*7849*	8562	*7861*	8573	*7872*	8585	*7884*	8596	*7895*	8607	*7906*	8619	*7918*	8630	*7929*	8642	*7941*	8653	*7952*

	760		761		762		763		764		765		766		767		768		769	
0	1,0000	*0,9940*	1,0013	*0,9953*	1,0026	*0,9966*	1,0039	*0,9979*	1,0053	*0,9992*	1,0066	*1,0006*	1,0079	*1,0019*	1,0092	*1,0032*	1,0105	*1,0045*	1,0118	*1,0058*
1	0,9963	*9899*	0,9977	*9912*	0,9990	*9925*	0003	*9938*	0016	*9951*	0029	*0,9964*	0042	*0,9978*	0055	*0,9991*	0068	*0004*	0081	*0017*
2	9927	*9858*	9940	*9871*	9953	*9884*	0,9966	*9897*	0,9979	*9910*	0,9992	*9923*	0006	*9936*	0019	*9949*	0032	*0,9962*	0045	*0,9976*
3	9891	*9817*	9904	*9830*	9917	*9843*	9930	*9856*	9943	*9869*	9956	*9882*	0,9969	*9895*	0,9982	*9908*	0,9995	*9921*	0008	*9934*
4	9855	*9776*	9868	*9789*	9881	*9802*	9894	*9815*	9907	*9828*	9920	*9841*	9933	*9854*	9946	*9867*	9959	*9880*	0,9972	*9893*
5	0,9820	*0,9735*	0,9833	*0,9748*	0,9846	*0,9761*	0,9859	*0,9774*	0,9871	*0,9787*	0,9884	*0,9800*	0,9897	*0,9813*	0,9910	*0,9826*	0,9923	*0,9839*	0,9936	*0,9852*
6	9785	*9694*	9797	*9707*	9810	*9720*	9823	*9733*	9836	*9746*	9849	*9759*	9862	*9772*	9875	*9784*	9888	*9797*	9900	*9810*
7	9750	*9653*	9762	*9666*	9775	*9679*	9788	*9692*	9801	*9704*	9814	*9717*	9827	*9730*	9839	*9743*	9852	*9756*	9865	*9769*
8	9715	*9612*	9728	*9625*	9740	*9638*	9753	*9650*	9766	*9663*	9779	*9676*	9791	*9689*	9804	*9701*	9817	*9714*	9830	*9727*
9	9680	*9571*	9693	*9583*	9706	*9596*	9718	*9609*	9731	*9622*	9744	*9634*	9757	*9647*	9769	*9660*	9782	*9673*	9795	*9685*
10	0,9646	*0,9529*	0,9659	*0,9542*	0,9671	*0,9554*	0,9684	*0,9567*	0,9697	*0,9580*	0,9709	*0,9593*	0,9722	*0,9605*	0,9735	*0,9618*	0,9748	*0,9631*	0,9760	*0,9643*
11	9612	*9487*	9625	*9500*	9637	*9513*	9650	*9525*	9663	*9538*	9675	*9551*	9688	*9563*	9700	*9576*	9713	*9589*	9726	*9601*
12	9578	*9446*	9591	*9458*	9603	*9471*	9616	*9483*	9629	*9496*	9641	*9509*	9654	*9521*	9666	*9534*	9679	*9546*	9692	*9559*
13	9545	*9404*	9557	*9416*	9570	*9429*	9582	*9441*	9595	*9454*	9607	*9466*	9620	*9479*	9633	*9491*	9645	*9504*	9658	*9517*
14	9511	*9361*	9524	*9374*	9536	*9386*	9549	*9399*	9561	*9411*	9574	*9424*	9586	*9436*	9599	*9449*	9611	*9461*	9624	*9474*
15	0,9478	*0,9319*	0,9491	*0,9331*	0,9503	*0,9344*	0,9516	*0,9356*	0,9528	*0,9369*	0,9541	*0,9381*	0,9553	*0,9394*	0,9566	*0,9406*	0,9578	*0,9419*	0,9590	*0,9431*
16	9445	*9276*	9458	*9288*	9470	*9301*	9483	*9313*	9495	*9326*	9508	*9338*	9520	*9350*	9532	*9363*	9545	*9375*	9557	*9388*
17	9413	*9233*	9425	*9245*	9438	*9258*	9450	*9270*	9462	*9282*	9475	*9295*	9487	*9307*	9499	*9319*	9512	*9332*	9524	*9344*
18	9380	*9189*	9393	*9202*	9405	*9214*	9417	*9226*	9430	*9239*	9442	*9251*	9454	*9263*	9467	*9276*	9479	*9288*	9491	*9300*
19	9348	*9145*	9360	*9158*	9373	*9170*	9385	*9182*	9397	*9195*	9410	*9207*	9422	*9219*	9434	*9232*	9447	*9244*	9459	*9256*
20	0,9316	*0,9101*	0,9328	*0,9114*	0,9341	*0,9126*	0,9353	*0,9138*	0,9365	*0,9150*	0,9377	*0,9163*	0,9390	*0,9175*	0,9402	*0,9187*	0,9414	*0,9199*	0,9427	*0,9212*
21	9284	*9057*	9297	*9069*	9309	*9081*	9321	*9093*	9333	*9105*	9346	*9118*	9358	*9130*	9370	*9142*	9382	*9154*	9394	*9167*
22	9253	*9012*	9265	*9024*	9277	*9036*	9289	*9048*	9302	*9060*	9314	*9072*	9326	*9085*	9338	*9097*	9350	*9109*	9362	*9121*
23	9222	*8966*	9234	*8978*	9246	*8990*	9258	*9002*	9270	*9015*	9282	*9027*	9294	*9039*	9307	*9051*	9319	*9063*	9331	*9075*
24	9191	*8920*	9203	*8932*	9215	*8944*	9227	*8956*	9239	*8968*	9251	*8980*	9263	*8992*	9275	*9005*	9287	*9017*	9299	*9029*
25	0,9160	*0,8873*	0,9172	*0,8885*	0,9184	*0,8897*	0,9196	*0,8909*	0,9208	*0,8922*	0,9220	*0,8934*	0,9232	*0,8946*	0,9244	*0,8958*	0,9256	*0,8970*	0,9268	*0,8982*
26	9129	*8826*	9141	*8838*	9153	*8850*	9165	*8862*	9177	*8874*	9189	*8886*	9201	*8898*	9213	*8910*	9225	*8922*	9237	*8934*
27	9098	*8778*	9110	*8790*	9122	*8802*	9134	*8814*	9146	*8826*	9158	*8838*	9170	*8850*	9182	*8862*	9194	*8874*	9206	*8886*
28	9068	*8730*	9080	*8742*	9092	*8754*	9104	*8766*	9116	*8778*	9128	*8790*	9140	*8801*	9152	*8813*	9164	*8825*	9176	*8837*
29	9038	*8681*	9050	*8693*	9062	*8705*	9074	*8716*	9086	*8728*	9098	*8740*	9109	*8752*	9121	*8764*	9133	*8776*	9145	*8788*
30	0,9008	*0,8631*	0,9020	*0,8643*	0,9032	*0,8655*	0,9044	*0,8667*	0,9056	*0,8678*	0,9067	*0,8690*	0,9079	*0,8702*	0,9091	*0,8714*	0,9103	*0,8726*	0,9115	*0,8738*
31	8979	*8580*	8990	*8592*	9002	*8604*	9014	*8616*	9026	*8628*	9038	*8640*	9049	*8651*	9061	*8663*	9073	*8675*	9085	*8687*
32	8949	*8529*	8961	*8541*	8973	*8553*	8984	*8564*	8996	*8576*	9008	*8588*	9020	*8600*	9031	*8612*	9043	*8623*	9055	*8635*
33	8920	*8477*	8931	*8489*	8943	*8500*	8955	*8512*	8967	*8524*	8978	*8536*	8990	*8547*	9002	*8559*	9014	*8571*	9025	*8583*
34	8891	*8424*	8902	*8436*	8914	*8447*	8926	*8459*	8937	*8471*	8949	*8482*	8961	*8494*	8973	*8506*	8984	*8517*	8996	*8529*
35	0,8862	*0,8370*	0,8873	*0,8382*	0,8885	*0,8393*	0,8897	*0,8405*	0,8908	*0,8417*	0,8920	*0,8428*	0,8932	*0,8440*	0,8943	*0,8452*	0,8955	*0,8463*	0,8967	*0,8475*
36	8833	*8315*	8845	*8327*	8856	*8338*	8868	*8350*	8879	*8362*	8891	*8373*	8903	*8385*	8914	*8396*	8926	*8408*	8938	*8420*
37	8804	*8259*	8816	*8271*	8828	*8282*	8839	*8294*	8851	*8306*	8862	*8317*	8874	*8329*	8886	*8340*	8897	*8352*	8909	*8363*
38	8776	*8202*	8788	*8214*	8799	*8225*	8811	*8237*	8822	*8248*	8834	*8260*	8845	*8272*	8857	*8283*	8868	*8295*	8880	*8306*
39	8748	*8144*	8759	*8156*	8771	*8167*	8782	*8179*	8794	*8190*	8805	*8202*	8817	*8213*	8828	*8225*	8840	*8236*	8852	*8248*
40	0,8720	*0,8085*	0,8731	*0,8097*	0,8743	*0,8108*	0,8754	*0,8120*	0,8766	*0,8131*	0,8777	*0,8143*	0,8789	*0,8154*	0,8800	*0,8165*	0,8812	*0,8177*	0,8823	*0,8188*
41	8692	*8025*	8704	*8036*	8715	*8048*	8726	*8059*	8738	*8071*	8749	*8082*	8761	*8093*	8772	*8105*	8784	*8116*	8795	*8128*
42	8664	*7963*	8676	*7975*	8687	*7986*	8699	*7998*	8710	*8009*	8721	*8020*	8733	*8032*	8744	*8043*	8756	*8055*	8767	*8066*

Torr	770		771		772		773		774		775		776		777		778		779	
°C	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*	trock.	*feucht*
0	1,0132	*1,0071*	1,0145	*1,0084*	1,0158	*1,0098*	1,0171	*1,0111*	1,0184	*1,0124*	1,0197	*1,0137*	1,0211	*1,0150*	1,0224	*1,0163*	1,0237	*1,0177*	1,0250	*1,0190*
1	0095	*0030*	0108	*0043*	0121	*0056*	0134	*0069*	0147	*0082*	0160	*0096*	0173	*0109*	0186	*0122*	0199	*0135*	0213	*0148*
2	0058	*0,9989*	0071	*0002*	0084	*0015*	0097	*0028*	0110	*0041*	0123	*0054*	0136	*0067*	0149	*0080*	0162	*0093*	0175	*0106*
3	0021	*9947*	0034	*0,9960*	0047	*0,9973*	0060	*0,9986*	0073	*0,9999*	0086	*0012*	0099	*0025*	0112	*0038*	0125	*0051*	0138	*0064*
4	0,9985	*9906*	0,9998	*9919*	0011	*9932*	0024	*9945*	0037	*9958*	0050	*0,9971*	0063	*0,9984*	0076	*0,9997*	0089	*0010*	0102	*0023*
5	0,9949	*0,9864*	0,9962	*0,9877*	0,9975	*0,9890*	0,9988	*0,9903*	1,0001	*0,9916*	1,0014	*0,9929*	1,0027	*0,9942*	1,0039	*0,9955*	1,0052	*0,9968*	1,0065	*0,9981*
6	9913	*9823*	9926	*9836*	9939	*9849*	9952	*9862*	0,9965	*9874*	0,9978	*9887*	0,9991	*9900*	0003	*9913*	0016	*9926*	0029	*9939*
7	9878	*9781*	9891	*9794*	9903	*9807*	9916	*9820*	9929	*9833*	9942	*9846*	9955	*9858*	0,9968	*9871*	0,9980	*9884*	0,9993	*9897*
8	9843	*9740*	9855	*9753*	9868	*9765*	9881	*9778*	9894	*9791*	9907	*9804*	9919	*9816*	9932	*9829*	9945	*9842*	9958	*9855*
9	9808	*9698*	9820	*9711*	9833	*9723*	9846	*9736*	9859	*9749*	9871	*9762*	9884	*9774*	9897	*9787*	9910	*9800*	9922	*9813*
10	0,9773	*0,9656*	0,9786	*0,9669*	0,9798	*0,9681*	0,9811	*0,9694*	0,9824	*0,9707*	0,9836	*0,9719*	0,9849	*0,9732*	0,9862	*0,9745*	0,9874	*0,9758*	0,9887	*0,9770*
11	9738	*9614*	9751	*9627*	9764	*9639*	9776	*9652*	9789	*9665*	9802	*9677*	9814	*9690*	9827	*9702*	9840	*9715*	9852	*9728*
12	9704	*9572*	9717	*9584*	9729	*9597*	9742	*9609*	9755	*9622*	9767	*9635*	9780	*9647*	9792	*9660*	9805	*9672*	9818	*9685*
13	9670	*9529*	9683	*9542*	9695	*9554*	9708	*9567*	9720	*9579*	9733	*9592*	9746	*9605*	9758	*9617*	9771	*9630*	9783	*9642*
14	9636	*9486*	9649	*9499*	9661	*9511*	9674	*9524*	9687	*9537*	9699	*9549*	9712	*9562*	9724	*9574*	9737	*9587*	9749	*9599*
15	0,9603	*0,9443*	0,9615	*0,9456*	0,9628	*0,9468*	0,9640	*0,9481*	0,9653	*0,9493*	0,9665	*0,9506*	0,9678	*0,9518*	0,9690	*0,9531*	0,9703	*0,9543*	0,9715	*0,9556*
16	9570	*9400*	9582	*9413*	9595	*9425*	9607	*9437*	9619	*9450*	9632	*9462*	9644	*9475*	9657	*9487*	9669	*9500*	9682	*9512*
17	9537	*9357*	9549	*9369*	9561	*9381*	9574	*9394*	9586	*9406*	9599	*9419*	9611	*9431*	9623	*9443*	9636	*9456*	9648	*9468*
18	9504	*9313*	9516	*9325*	9528	*9337*	9541	*9350*	9553	*9362*	9565	*9374*	9578	*9387*	9590	*9399*	9603	*9411*	9615	*9424*
19	9471	*9268*	9483	*9281*	9496	*9293*	9508	*9305*	9520	*9318*	9533	*9330*	9545	*9342*	9557	*9355*	9570	*9367*	9582	*9379*
20	0,9439	*0,9224*	0,9451	*0,9236*	0,9463	*0,9248*	0,9476	*0,9261*	0,9488	*0,9273*	0,9500	*0,9285*	0,9512	*0,9297*	0,9525	*0,9310*	0,9537	*0,9322*	0,9549	*0,9334*
21	9407	*9179*	9419	*9191*	9431	*9203*	9443	*9215*	9455	*9228*	9468	*9240*	9480	*9252*	9492	*9264*	9504	*9277*	9517	*9289*
22	9375	*9133*	9387	*9145*	9399	*9158*	9411	*9170*	9423	*9182*	9436	*9194*	9448	*9206*	9460	*9219*	9472	*9231*	9484	*9243*
23	9343	*9087*	9355	*9099*	9367	*9112*	9379	*9124*	9391	*9136*	9404	*9148*	9416	*9160*	9428	*9172*	9440	*9184*	9452	*9197*
24	9311	*9041*	9324	*9053*	9336	*9065*	9348	*9077*	9360	*9089*	9372	*9101*	9384	*9113*	9396	*9125*	9408	*9138*	9420	*9150*
25	0,9280	*0,8994*	0,9292	*0,9006*	0,9304	*0,9018*	0,9316	*0,9030*	0,9328	*0,9042*	0,9340	*0,9054*	0,9352	*0,9066*	0,9364	*0,9078*	0,9377	*0,9090*	0,9389	*0,9102*
26	9249	*8946*	9261	*8958*	9273	*8970*	9285	*8982*	9297	*8994*	9309	*9006*	9321	*9018*	9333	*9030*	9345	*9042*	9357	*9054*
27	9218	*8898*	9230	*8910*	9242	*8922*	9254	*8934*	9266	*8946*	9278	*8958*	9290	*8970*	9302	*8982*	9314	*8994*	9326	*9006*
28	9187	*8849*	9199	*8861*	9211	*8873*	9223	*8885*	9235	*8897*	9247	*8909*	9259	*8921*	9271	*8933*	9283	*8945*	9295	*8957*
29	9157	*8800*	9169	*8812*	9181	*8824*	9193	*8835*	9205	*8847*	9216	*8859*	9228	*8871*	9240	*8883*	9252	*8895*	9264	*8907*
30	0,9127	*0,8750*	0,9139	*0,8761*	0,9150	*0,8773*	0,9162	*0,8785*	0,9174	*0,8797*	0,9186	*0,8809*	0,9198	*0,8821*	0,9210	*0,8832*	0,9222	*0,8844*	0,9233	*0,8856*
31	9097	*8699*	9108	*8710*	9120	*8722*	9132	*8734*	9144	*8746*	9156	*8758*	9168	*8769*	9179	*8781*	9191	*8793*	9203	*8805*
32	9067	*8647*	9079	*8659*	9090	*8670*	9102	*8682*	9114	*8694*	9126	*8706*	9137	*8717*	9149	*8729*	9161	*8741*	9173	*8753*
33	9037	*8594*	9049	*8606*	9061	*8618*	9072	*8629*	9084	*8641*	9096	*8653*	9108	*8665*	9119	*8676*	9131	*8688*	9143	*8700*
34	9008	*8541*	9019	*8553*	9031	*8564*	9043	*8576*	9054	*8588*	9066	*8599*	9078	*8611*	9089	*8623*	9101	*8634*	9113	*8646*
35	0,8978	*0,8487*	0,8990	*0,8498*	0,9002	*0,8510*	0,9013	*0,8522*	0,9025	*0,8533*	0,9037	*0,8545*	0,9048	*0,8557*	0,9060	*0,8568*	0,9072	*0,8580*	0,9083	*0,8591*
36	8949	*8431*	8961	*8443*	8972	*8455*	8984	*8466*	8996	*8478*	9007	*8489*	9019	*8501*	9031	*8513*	9042	*8524*	9054	*8536*
37	8920	*8375*	8932	*8387*	8943	*8398*	8955	*8410*	8967	*8421*	8978	*8433*	8990	*8445*	9001	*8456*	9013	*8468*	9025	*8479*
38	8892	*8318*	8903	*8329*	8915	*8341*	8926	*8352*	8938	*8364*	8949	*8375*	8961	*8387*	8972	*8399*	8984	*8410*	8995	*8422*
39	8863	*8259*	8875	*8271*	8886	*8282*	8898	*8294*	8909	*8305*	8921	*8317*	8932	*8328*	8944	*8340*	8955	*8351*	8967	*8363*
40	0,8835	*0,8200*	0,8846	*0,8211*	0,8858	*0,8223*	0,8869	*0,8234*	0,8881	*0,8246*	0,8892	*0,8257*	0,8903	*0,8269*	0,8915	*0,8280*	0,8926	*0,8292*	0,8938	*0,8303*
41	8806	*8139*	8818	*8151*	8829	*8162*	8841	*8174*	8852	*8185*	8864	*8196*	8875	*8208*	8887	*8219*	8898	*8231*	8909	*8242*
42	8778	*8077*	8790	*8089*	8801	*8100*	8813	*8112*	8824	*8123*	8835	*8134*	8847	*8146*	8858	*8157*	8870	*8169*	8881	*8180*

	780		781		782		783		784		785		786		787		788		789	
0	1,0263	*1,0203*	1,0276	*1,0216*	1,0289	*1,0229*	1,0303	*1,0242*	1,0316	*1,0256*	1,0329	*1,0269*	1,0342	*1,0282*	1,0355	*1,0295*	1,0368	*1,0308*	1,0382	*1,0321*
1	0226	*0161*	0239	*0174*	0252	*0187*	0265	*0200*	0278	*0213*	0291	*0227*	0304	*0240*	0317	*0253*	0331	*0266*	0344	*0279*
2	0188	*0119*	0201	*0132*	0214	*0145*	0228	*0158*	0241	*0171*	0254	*0185*	0267	*0198*	0280	*0211*	0293	*0224*	0306	*0237*
3	0151	*0077*	0164	*0090*	0177	*0103*	0190	*0116*	0203	*0129*	0216	*0142*	0229	*0155*	0242	*0169*	0256	*0182*	0269	*0195*
4	0115	*0036*	0128	*0049*	0141	*0061*	0154	*0074*	0167	*0087*	0180	*0100*	0192	*0113*	0205	*0126*	0218	*0139*	0231	*0152*
5	1,0078	*0,9994*	1,0091	*1,0007*	1,0104	*1,0020*	1,0117	*1,0032*	1,0130	*1,0045*	1,0143	*1,0058*	1,0156	*1,0071*	1,0169	*1,0084*	1,0182	*1,0097*	1,0195	*1,0110*
6	0042	*9952*	0055	*0,9965*	0068	*0,9977*	0081	*0,9990*	0094	*0003*	0106	*0016*	0119	*0029*	0132	*0042*	0145	*0055*	0158	*0068*
7	0006	*9910*	0019	*9923*	0032	*9935*	0045	*9948*	0057	*0,9961*	0070	*0,9974*	0083	*0,9987*	0096	*0000*	0109	*0012*	0122	*0025*
8	0,9970	*9868*	0,9983	*9880*	0,9996	*9893*	0009	*9906*	0022	*9919*	0034	*9932*	0047	*9944*	0060	*0,9957*	0073	*0,9970*	0085	*0,9983*
9	9935	*9825*	9948	*9838*	9960	*9851*	0,9973	*9864*	0,9986	*9876*	0,9999	*9889*	0011	*9902*	0024	*9915*	0037	*9927*	0050	*9940*
10	0,9900	*0,9783*	0,9913	*0,9796*	0,9925	*0,9808*	0,9938	*0,9821*	0,9951	*0,9834*	0,9963	*0,9846*	0,9976	*0,9859*	0,9989	*0,9872*	1,0001	*0,9884*	1,0014	*0,9897*
11	9865	*9740*	9878	*9753*	9890	*9766*	9903	*9778*	9916	*9791*	9928	*9804*	9941	*9816*	9953	*9829*	0,9966	*9842*	0,9979	*9854*
12	9830	*9698*	9843	*9710*	9855	*9723*	9868	*9735*	9881	*9748*	9893	*9761*	9906	*9773*	9918	*9786*	9931	*9799*	9944	*9811*
13	9796	*9655*	9808	*9667*	9821	*9680*	9833	*9692*	9846	*9705*	9859	*9718*	9871	*9730*	9884	*9743*	9896	*9755*	9909	*9768*
14	9762	*9612*	9774	*9624*	9787	*9637*	9799	*9649*	9812	*9662*	9824	*9674*	9837	*9687*	9849	*9699*	9862	*9712*	9874	*9724*
15	0,9728	*0,9568*	0,9740	*0,9581*	0,9753	*0,9593*	0,9765	*0,9606*	0,9778	*0,9618*	0,9790	*0,9631*	0,9802	*0,9643*	0,9815	*0,9655*	0,9827	*0,9668*	0,9840	*0,9680*
16	9694	*9524*	9706	*9537*	9719	*9549*	9731	*9562*	9744	*9574*	9756	*9587*	9768	*9599*	9781	*9611*	9793	*9624*	9806	*9636*
17	9660	*9480*	9673	*9493*	9685	*9505*	9698	*9518*	9710	*9530*	9722	*9542*	9735	*9555*	9747	*9567*	9760	*9580*	9772	*9592*
18	9627	*9436*	9640	*9449*	9652	*9461*	9664	*9473*	9677	*9486*	9689	*9498*	9701	*9510*	9714	*9523*	9726	*9535*	9738	*9547*
19	9594	*9391*	9606	*9404*	9619	*9416*	9631	*9428*	9643	*9441*	9656	*9453*	9668	*9465*	9680	*9478*	9693	*9490*	9705	*9502*
20	0,9561	*0,9346*	0,9574	*0,9359*	0,9586	*0,9371*	0,9598	*0,9383*	0,9610	*0,9395*	0,9623	*0,9408*	0,9635	*0,9420*	0,9647	*0,9432*	0,9659	*0,9444*	0,9672	*0,9457*
21	9529	*9301*	9541	*9313*	9553	*9325*	9565	*9338*	9578	*9350*	9590	*9362*	9602	*9374*	9614	*9386*	9627	*9399*	9639	*9411*
22	9496	*9255*	9509	*9267*	9521	*9279*	9533	*9292*	9545	*9304*	9557	*9316*	9569	*9328*	9582	*9340*	9594	*9352*	9606	*9365*
23	9464	*9209*	9476	*9221*	9489	*9233*	9501	*9245*	9513	*9257*	9525	*9269*	9537	*9281*	9549	*9294*	9561	*9306*	9573	*9318*
24	9432	*9162*	9444	*9174*	9457	*9186*	9469	*9198*	9481	*9210*	9493	*9222*	9505	*9234*	9517	*9246*	9529	*9258*	9541	*9271*
25	0,9401	*0,9114*	0,9413	*0,9126*	0,9425	*0,9138*	0,9437	*0,9150*	0,9449	*0,9163*	0,9461	*0,9175*	0,9473	*0,9187*	0,9485	*0,9199*	0,9497	*0,9211*	0,9509	*0,9223*
26	9369	*9066*	9381	*9078*	9393	*9090*	9405	*9102*	9417	*9114*	9429	*9126*	9441	*9138*	9453	*9150*	9465	*9162*	9477	*9174*
27	9338	*9018*	9350	*9030*	9362	*9042*	9374	*9054*	9386	*9066*	9398	*9078*	9410	*9090*	9422	*9102*	9434	*9114*	9446	*9126*
28	9307	*8969*	9319	*8980*	9331	*8992*	9343	*9004*	9355	*9016*	9366	*9028*	9378	*9040*	9390	*9052*	9402	*9064*	9414	*9076*
29	9276	*8919*	9288	*8931*	9300	*8942*	9312	*8954*	9323	*8966*	9335	*8978*	9347	*8990*	9359	*9002*	9371	*9014*	9383	*9026*
30	0,9245	*0,8868*	0,9257	*0,8880*	0,9269	*0,8892*	0,9281	*0,8904*	0,9293	*0,8915*	0,9305	*0,8927*	0,9316	*0,8939*	0,9328	*0,8951*	0,9340	*0,8963*	0,9352	*0,8975*
31	9215	*8817*	9227	*8829*	9238	*8840*	9250	*8852*	9262	*8864*	9274	*8876*	9286	*8888*	9297	*8899*	9309	*8911*	9321	*8923*
32	9185	*8765*	9196	*8776*	9208	*8788*	9220	*8800*	9232	*8812*	9243	*8823*	9255	*8835*	9267	*8847*	9279	*8859*	9291	*8871*
33	9154	*8712*	9166	*8723*	9178	*8735*	9190	*8747*	9201	*8759*	9213	*8770*	9225	*8782*	9237	*8794*	9248	*8806*	9260	*8817*
34	9125	*8658*	9136	*8670*	9148	*8681*	9160	*8693*	9171	*8705*	9183	*8716*	9195	*8728*	9206	*8740*	9218	*8751*	9230	*8763*
35	0,9095	*0,8603*	0,9107	*0,8615*	0,9118	*0,8626*	0,9130	*0,8638*	0,9142	*0,8650*	0,9153	*0,8661*	0,9165	*0,8673*	0,9177	*0,8685*	0,9188	*0,8696*	0,9200	*0,8708*
36	9065	*8548*	9077	*8559*	9089	*8571*	9100	*8582*	9112	*8594*	9124	*8606*	9135	*8617*	9147	*8629*	9158	*8640*	9170	*8652*
37	9036	*8491*	9048	*8502*	9059	*8514*	9071	*8526*	9082	*8537*	9094	*8549*	9106	*8560*	9117	*8572*	9129	*8584*	9140	*8595*
38	9007	*8433*	9019	*8445*	9030	*8456*	9042	*8468*	9053	*8479*	9065	*8491*	9076	*8503*	9088	*8514*	9099	*8526*	9111	*8537*
39	8978	*8374*	8990	*8386*	9001	*8398*	9013	*8409*	9024	*8421*	9036	*8432*	9047	*8444*	9059	*8455*	9070	*8467*	9082	*8478*
40	0,8949	*0,8315*	0,8961	*0,8326*	0,8972	*0,8338*	0,8984	*0,8349*	0,8995	*0,8361*	0,9007	*0,8372*	0,9018	*0,8383*	0,9030	*0,8395*	0,9041	*0,8406*	0,9053	*0,8418*
41	8921	*8254*	8932	*8265*	8944	*8276*	8955	*8288*	8967	*8299*	8978	*8311*	8989	*8322*	9001	*8334*	9012	*8345*	9024	*8357*
42	8892	*8191*	8904	*8203*	8915	*8214*	8927	*8226*	8938	*8237*	8949	*8248*	8961	*8260*	8972	*8271*	8984	*8283*	8995	*8294*

Vielfache von Atomgewichten der biologisch-medizinisch wichtigsten Elemente (und Gruppen)

Diese Tabelle basiert auf den 1957 international festgelegten Atomgewichten. Bei der Berechnung der Vielfachen wurden diese als exakte Zahlen behandelt.

Ordnungszahl *Z*	Symbol		Einer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
			Zehner										
1	H	Wasserstoff Hydrogenium	0	0,000	1,008	2,016	3,024	4,032	5,040	6,048	7,056	8,064	9,072
			10	10,080	11,088	12,096	13,104	14,112	15,120	16,128	17,136	18,144	19,152
			20	20,160	21,168	22,176	23,184	24,192	25,200	26,208	27,216	28,224	29,232
			30	30,240	31,248	32,256	33,264	34,272	35,280	36,288	37,296	38,304	39,312
			40	40,320	41,328	42,336	43,344	44,352	45,360	46,368	47,376	48,384	49,392
			50	50,400	51,408	52,416	53,424	54,432	55,440	56,448	57,456	58,464	59,472
			60	60,480	61,488	62,496	63,504	64,512	65,520	66,528	67,536	68,544	69,552
			70	70,560	71,568	72,576	73,584	74,592	75,600	76,608	77,616	78,624	79,632
			80	80,640	81,648	82,656	83,664	84,672	85,680	86,688	87,696	88,704	89,712
			90	90,720	91,728	92,736	93,744	94,752	95,760	96,768	97,776	98,784	99,792
			100	100,800	101,808	102,816	103,824	104,832	105,840	106,848	107,856	108,864	109,872
			110	110,880	111,888	112,896	113,904	114,912	115,920	116,928	117,936	118,944	119,952
			120	120,960	121,968	122,976	123,984	124,992	126,000	127,008	128,016	129,024	130,032
			130	131,040	132,048	133,056	134,064	135,072	136,080	137,088	138,096	139,104	140,112
			140	141,120	142,128	143,136	144,144	145,152	146,160	147,168	148,176	149,184	150,192
			150	151,200	152,208	153,216	154,224	155,232	156,240	157,248	158,256	159,264	160,272
			160	161,280	162,288	163,296	164,304	165,312	166,320	167,328	168,336	169,344	170,352
			170	171,360	172,368	173,376	174,384	175,392	176,400	177,408	178,416	179,424	180,432
			180	181,440	182,448	183,456	184,464	185,472	186,480	187,488	188,496	189,504	190,512
			190	191,520	192,528	193,536	194,544	195,552	196,560	197,568	198,576	199,584	200,592
6	C	Kohlenstoff Carboneum	0	00,000	12,011	24,022	36,033	48,044	60,055	72,066	84,077	96,088	108,099
			10	120,110	132,121	144,132	156,143	168,154	180,165	192,176	204,187	216,198	228,209
			20	240,220	252,231	264,242	276,253	288,264	300,275	312,286	324,297	336,308	348,319
			30	360,330	372,341	384,352	396,363	408,374	420,385	432,396	444,407	456,418	468,429
			40	480,440	492,451	504,462	516,473	528,484	540,495	552,506	564,517	576,528	588,539
			50	600,550	612,561	624,572	636,583	648,594	660,605	672,616	684,627	696,638	708,649
			60	720,660	732,671	744,682	756,693	768,704	780,715	792,726	804,737	816,748	828,759
			70	840,770	852,781	864,792	876,803	888,814	900,825	912,836	924,847	936,858	948,869
			80	960,880	972,891	984,902	996,913	1008,924	1020,935	1032,946	1044,957	1056,968	1068,979
			90	1080,990	1093,001	1105,012	1117,023	1129,034	1141,045	1153,056	1165,067	1177,078	1189,089
7	N	Stickstoff Nitrogenium	0	00,000	14,008	28,016	42,024	56,032	70,040	84,048	98,056	112,064	126,072
			10	140,080	154,088	168,096	182,104	196,112	210,120	224,128	238,136	252,144	266,152
			20	280,160	294,168	308,176	322,184	336,192	350,200	364,208	378,216	392,224	406,232
			30	420,240	434,248	448,256	462,264	476,272	490,280	504,288	518,296	532,304	546,312
			40	560,320	574,328	588,336	602,344	616,352	630,360	644,368	658,376	672,384	686,392
8	O	Sauerstoff Oxygenium	0	00,0	16,**0**	32,**0**	48,**0**	64,**0**	80,**0**	96,**0**	112,**0**	128,**0**	144,**0**
			10	160,**0**	176,**0**	192,**0**	208,**0**	224,**0**	240,**0**	256,**0**	272,**0**	288,**0**	304,**0**
			20	320,**0**	336,**0**	352,**0**	368,**0**	384,**0**	400,**0**	416,**0**	432,**0**	448,**0**	464,**0**
			30	480,**0**	496,**0**	512,**0**	528,**0**	544,**0**	560,**0**	576,**0**	592,**0**	608,**0**	624,**0**
			40	640,**0**	656,**0**	672,**0**	688,**0**	704,**0**	720,**0**	736,**0**	752,**0**	768,**0**	784,**0**
9	F	Fluor	0	00,00	19,00	38,00	57,00	76,00	95,00	114,00	133,00	152,00	171,00
11	Na	Natrium, Sodium	0	00,000	22,991	45,982	68,973	91,964	114,955	137,946	160,937	183,928	206,919
12	Mg	Magnesium	0	00,00	24,32	48,64	72,96	97,28	121,60	145,92	170,24	194,56	218,88
13	Al	Aluminium	0	00,00	26,98	53,96	80,94	107,92	134,90	161,88	188,86	215,84	242,82
14	Si	Silicium	0	00,00	28,09	56,18	84,27	112,36	140,45	168,54	196,63	224,72	252,81
15	P	Phosphor	0	00,000	30,975	61,950	92,925	123,900	154,875	185,850	216,825	247,800	278,775
			10	309,750	340,725	371,700	402,675	433,650	464,625	495,600	526,575	557,550	588,525
16	S	Schwefel, Sulfur	0	00,000	32,066	64,132	96,198	128,264	160,330	192,396	224,462	256,528	288,594
			10	320,660	352,726	384,792	416,858	448,924	480,990	513,056	545,122	577,188	609,254
17	Cl	Chlor	0	00,000	35,457	70,914	106,371	141,828	177,285	212,742	248,199	283,656	319,113
19	K	Kalium, Potassium	0	00,000	39,100	78,200	117,300	156,400	195,500	234,600	273,700	312,800	351,900
20	Ca	Calcium	0	00,00	40,08	80,16	120,24	160,32	200,40	240,48	280,56	320,64	360,72
25	Mn	Mangan	0	00,00	54,94	109,88	164,82	219,76	274,70	329,64	384,58	439,52	494,46
26	Fe	Eisen, Ferrum	0	00,00	55,85	111,70	167,55	223,40	279,25	335,10	390,95	446,80	502,65
27	Co	Cobalt	0	00,00	58,94	117,88	176,82	235,76	294,70	353,64	412,58	471,52	530,46
29	Cu	Kupfer, Cuprum	0	00,00	63,54	127,08	190,62	254,16	317,70	381,24	444,78	508,32	571,86
30	Zn	Zink	0	00,00	65,38	130,76	196,14	261,52	326,90	392,28	457,66	523,04	588,42
33	As	Arsen	0	00,00	74,91	149,82	224,73	299,64	374,55	449,46	524,37	599,28	674,19
35	Br	Brom	0	00,000	79,916	159,832	239,748	319,664	399,580	479,496	559,412	639,328	719,244
53	I	Jod	0	000,00	126,91	253,82	380,73	507,64	634,55	761,46	888,37	1015,28	1142,19
56	Ba	Barium	0	000,00	137,36	274,72	412,08	549,44	686,80	824,16	961,52	1098,88	1236,24
80	Hg	Quecksilber	0	000,00	200,61	401,22	601,83	802,44	1003,05	1203,66	1404,27	1604,88	1805,49
	H_2O	Wasser ($\frac{1}{2}H_2O$ = 9,008)	0	00,000	18,016	36,032	54,048	72,064	90,080	108,096	126,112	144,128	162,144
			10	180,160	198,176	216,192	234,208	252,224	270,240	288,256	306,272	324,288	342,304
	CH_2	Methylen	0	00,000	14,027	28,054	42,081	56,108	70,135	84,162	98,189	112,216	126,243
			10	140,270	154,297	168,324	182,351	196,378	210,405	224,432	238,459	252,486	266,513
			20	280,540	294,567	308,594	322,621	336,648	350,675	364,702	378,729	392,756	406,783
			30	420,810	434,837	448,864	462,891	476,918	490,945	504,972	518,999	533,026	547,053
			40	561,080	575,107	589,134	603,161	617,188	631,215	645,242	659,269	673,296	687,323
	CH_3	Methyl	0	00,000	15,035	30,070	45,105	60,140	75,175	90,210	105,245	120,280	135,315
			10	150,350	165,385	180,420	195,455	210,490	225,525	240,560	255,595	270,630	285,665
			20	300,700	315,735	330,770	345,805	360,840	375,875	390,910	405,945	420,980	436,015

Acetanilid (Antifebrin)	$C_6H_5NHCOCH_3$	135,17
Acetylcholinchlorid	$[CH_3COOCH_2CH_2N(CH_3)_3]Cl$	181,67
Acetylphenetidin (Phenacetin)	$C_6H_4(NHCOCH_3)(OC_2H_5)$-1,4	179,22
Acetylsalicylsäure	$C_6H_4(COOH)(OCOCH_3)$-1,2	180,16
Aconitin	$C_{34}H_{49}O_{11}N$	647,77
Adrenalin-(Epinephrin-) hydrochlorid	$C_6H_3[CH(OH)CH_2NHCH_3][OH]_2 . HCl$-1,3,4	219,68
Allylisothiocyanat (Nitrogen Mustard)	$CH_2{:}CHCH_2NCS$	99,16
Aminophyllin	$[N(CH_3)CON(CH_3)C{:}CCO\ N{:}CHNH]_2 . [H_2NCH_2CH_2NH_2] + 2H_2O$	456,48
Aminopyrin (Dimethyl-aminoantipyrin, Aminophenazon)	$N(C_6H_5)N(CH_3)C(CH_3){:}C[N(CH_3)_2]CO$	231,30
Amphetamin	$C_6H_5CH_2CH(NH_2)CH_3$	135,21
Amylnitrit	$(CH_3)_2CHCH_2CH_2ONO$	117,15
Antifebrin siehe Acetanilid		
Antimon-Kalium-Tartrat (Brechweinstein)	$[KOOC(CHOH)_2\ COOSbO] + \frac{1}{2}H_2O$	333,94
Antipyrin	$N(C_6H_5)N(CH_3)C(CH_3){:}CHCO$	188,23
Apomorphinhydrochlorid	$[C_{17}H_{17}O_2N \cdot HCl] + \frac{1}{2}H_2O$	312,80
Äther	$(C_2H_5)_2O$	74,12
Äthylalkohol	C_2H_5OH	46,07
Äthylmorphinhydrochlorid	$[C_{19}H_{23}O_3N] . HCl + 2H_2O$	385,90
N-Äthylpiperidin	$CH_2CH_2CH_2CH_2CH_2NC_2H_5$	113,21
Atropin	$C_{17}H_{23}O_3N$	289,38
Barbital (Diäthyl-barbitursäure)	$NHCONHCOC(C_2H_5)_2CO$	184,20
Barbital-Natrium	$NHC(ONa){:}NCOC(C_2H_5)_2CO$	206,18
Bromoform	$CHBr_3$	252,77
Butacainsulfat	$[H_2NC_6H_4COO(CH_2)_3N(C_4H_9)_2$-1,4$]_2 . H_2SO_4$	710,99
Calciumgluconat	$[[CH_2OH(CHOH)_4COO]_2Ca] + H_2O$	448,40
-glycerophosphat	$[C_3H_5(OH)_2OPO_3Ca] + H_2O$	228,16
-lactat	$[[CH_3CH(OH)COO]_2Ca] + 5H_2O$	308,31
-mandelat	$[C_6H_5CH(OH)COO]_2Ca$	342,37
Campher	$C(CH_3)CH_2CH_2CHC(CH_3)_2\ CH_2CO$	152,24
N-Carbamylarsanilsäure	$C_6H_4[AsO(OH)_2][NHCONH_2]$-1,4	260,08
Carbromal	$(C_2H_5)_2CBrCONHCONH_2$	237,11
Chinacrin (Quinacrine)	$C_{23}H_{30}ClON_3$	399,97
Chinidin	$C_{20}H_{24}O_2N_2$	324,43
Chinin	$[C_{20}H_{24}O_2N_2] + 3H_2O$	378,48
Chloralhydrat (Chloral)	$CCl_3CH(OH)_2$	165,42
Chloramphenicol	$CH(OH)(C_6H_4$-p-$NO_2)\cdot CH(NHCOCHCl_2)\cdot CH_2OH$	323,15
Chlorochin (Chloro-quine)	$C_9H_5N[Cl][NHCH(CH_3)\cdot(CH_2)_3\cdot N(C_2H_5)_2]$-7,4	319,89
Chloroform	$CHCl_3$	119,39
Cholesterin	$C_{27}H_{45}OH$	386,67
Cinchophen	$CH{:}CH\cdot CH{:}CH\cdot C{:}C\cdot C(COOH){:}CH\cdot C(C_6H_5){:}N$	249,27
Cocain	$C_{17}H_{21}O_4N$	303,36
Codein	$[C_{18}H_{21}O_3N] + H_2O$	317,39
Coffein	$[N(CH_3)CON(CH_3)C{:}CCO\ N{:}CHN(CH_3)] + H_2O$	212,22
Colchicin	$C_{22}H_{25}O_6N$	399,45
Creatinin	$CH_3NC(:NH)NHCOCH_2$	113,12
Cresol	$CH_3C_6H_4OH$	108,14
Cumarin	$CH{:}CHCH{:}CHC{:}C\cdot O\cdot CO\cdot CH{:}CH$	146,15
Cyclopropan	$CH_2CH_2CH_2$	42,08
Dextrose (D-Glucose)	$[CH_2(OH)\cdot CH(OH)\cdot CH(OH)\cdot (HO)CH\cdot CH(OH)\cdot CHO] + H_2O$	198,18
Diäthylbarbitursäure (Diäthylmalonylharnstoff) siehe Barbital		
Diäthylstilböstrol siehe Stilböstrol		
Digitonin	$C_{56}H_{90}O_{29}$	1215,33
Digitoxin	$C_{41}H_{64}O_{13}$	764,96
Dihydromorphinon	$C_{17}H_{19}O_3N$	285,35
Dihydrostreptomycinhydrochlorid	$C_{21}H_{41}O_{12}N_7 . 3HCl$	693,01
-sulfat	$(C_{21}H_{41}O_{12}N_7)_2 . 3H_2SO_4$	1461,48
Dijodoxychinolin	$CI{:}CHCI{:}C(OH)C{:}CCH{:}CHCH{:}N$	396,97
Dimercaptopropanol (BAL)	$CH_2(SH)CH(SH)CH_2OH$	124,23
m-Dinitrobenzol	$C_6H_4(NO_2)_2$-1,3	168,11
Dioxan	$OCH_2CH_2OCH_2CH_2$	88,11
Diphenylhydantoin	$(C_6H_5)_2CNHCONHCO$	252,28
Emetinhydrochlorid	$C_{29}H_{40}O_4N_2 . 2HCl$	553,59
Ephedrinhydrochlorid	$C_6H_5CH(OH)CH(NHCH_3)CH_3 . HCl$	201,70
Ergonovin	$C_{19}H_{23}O_2N_3$	325,42
Ergotamin	$C_{33}H_{35}N_5O_5$	581,68
-tartrat	$(C_{33}H_{35}N_5O_5)_2 . H_2C_4H_4O_6$	1313,46
Ergotoxin	$C_{35}H_{41}O_6N_5$	627,75
Eucalyptol	$(CH_3)_2CCHCH_2CH_2C(O)(CH_3)\cdot CH_2CH_2$	154,25
Eucatropin	$C_6H_5CH(OH)COOCHCH_2C(CH_3)_2N(CH_3)CH(CH_3)CH_2$	291,40
Formaldehyd	$HCHO$	30,03
GIRARDS Reagens	$[(CH_3)_3NCH_2CONHNH_2]Cl$	167,65
Glycerin	$HOCH_2CH(OH)CH_2OH$	92,10
Harnsäure	$NH\cdot CO\cdot NH\cdot C{:}C\cdot CO\ \ NH\cdot CO\cdot NH$	168,12
Harnstoff	$CO(NH_2)_2$	60,06
Histamin	$N{:}CHNHCH{:}CCH_2CH_2NH_2$	111,15
Homatropin	$C_{16}H_{21}O_3N$	275,35
Hyoscyamin	$C_{17}H_{23}O_3N$	289,38
Jodoform	CHI_3	393,75
Lanatosid C	$C_{49}H_{76}O_{20}$	985,15
Mandelsäure	$C_6H_5CH(OH)COOH$	152,15
Menthol	$(CH_3)_2CHCHCH(OH)CH_2CH(CH_3)CH_2CH_2$	156,27
Meperidin	$C_6H_5\cdot C(COOC_2H_5)\cdot CH_2CH_2N(CH_3)CH_2CH_2$	247,34
Methylalkohol	CH_3OH	32,04
Methylenblau	$[C_{16}H_{18}ClN_3S] + 3H_2O$	373,92
Milchsäure	$CH_3CH(OH)COOH$	90,08
Morphium	$[C_{17}H_{19}O_3N] + H_2O$	303,36
Natriumlactat	$CH_3CH(OH)COONa$	112,06
Neostigminbromid	$C_6H_4[N(CH_3)_3Br][OCON(CH_3)_2]$-1,3	303,22
Nicäthamid	$CH{:}CHCH{:}NCH{:}CCON(C_2H_5)_2$	178,24
Ouabain (Strophanthin-g)	$[C_{29}H_{44}O_{12}] + 8H_2O$	728,80
Papaverin	$C_{20}H_{21}O_4N$	339,40
Penicillin-G-Natrium	$C_{16}H_{17}N_2NaO_4S$	356,39
Pentobarbital	$NHCONHCOC[CH(CH_3)C_3H_7][C_2H_5]CO$	226,28
Phenacetin siehe Acetylphenetidin		
Phenobarbital	$NHCONHCOC(C_6H_5)(C_2H_5)CO$	232,24
-Natrium	$NHC(ONa){:}NCOC(C_6H_5)(C_2H_5)CO$	254,23
Physostigmin	$C_{15}H_{21}O_2N_3$	275,36
Picrotoxin	$C_{30}H_{34}O_{13}$	602,60
Pilocarpin	$C_{11}H_{16}O_2N_2$	208,27
Piperocain	$C_6H_5COO(CH_2)_2N\cdot(CH_2)_4\cdot CH(CH_3)$	261,37
Procainhydrochlorid	$C_6H_4[COOCH_2CH_2N(C_2H_5)_2][NH_2]\cdot HCl$-1,4	272,78
Resorcin	$C_6H_4(OH)_2$-1,3	110,11
Rochellesalz (Kalium-Natrium-Tartrat)	$[CH(OH)(COOK)\cdot CH(OH)(COONa)] + 4H_2O$	282,23
Rutin	$[C_{27}H_{30}O_{16}] + 3H_2O$	664,59
Salicylsäure	$C_6H_4(COOH)(OH)$-1,2	138,13
Santo-nin	$CH{:}CH\cdot CO\cdot C(CH_3){:}C\cdot C(CH_3)\cdot CH_2\cdot CH_2\cdot CH\cdot CH\cdot O\cdot CO\cdot CH\cdot CH_3$	246,31
Scopolamin	$C_{17}H_{21}O_4N$	303,36
Stilböstrol	p-$HOC_6H_4(C_2H_5)C{:}C(C_2H_5)C_6H_4OH$-$p'$	268,36
Streptomycinhydrochlorid	$C_{21}H_{39}O_{12}N_7 . 3HCl$	690,99
-sulfat	$(C_{21}H_{39}O_{12}N_7)_2 . 3H_2SO_4$	1457,44
Strophanthin-g siehe Ouabain		
Strychnin	$C_{21}H_{22}O_2N_2$	334,42
Sulfadiazin	p-$NH_2\cdot C_6H_4\cdot SO_2NHC{:}N\cdot CH{:}CH\cdot CH{:}N$	250,29
Sulfamerazin	p-$NH_2\cdot C_6H_4\cdot SO_2NHC{:}N\cdot CH{:}CH\cdot C(CH_3){:}N$	264,32
Sulfanilamid	p-$NH_2\cdot C_6H_4\cdot SO_2NH_2$	172,21
Sulfapyridin	p-$NH_2\cdot C_6H_4\cdot SO_2NHC{:}N\cdot CH{:}CH\cdot CH{:}CH$	249,30
Sulfathiazol	p-$NH_2\cdot C_6H_4\cdot SO_2NHC{:}N\cdot CH{:}CH\cdot S$	255,33
Theobromin	$NH\cdot CO\cdot N(CH_3)\cdot C{:}C{:}CO\ \ N{:}CH\cdot NCH_3$	180,17
Theophyllin	$N(CH_3)\cdot CO\cdot N(CH_3)\cdot C{:}C\cdot CO\ \ N{:}CH\cdot NH\cdot H_2O$	198,19
Tryparsamid	$[p$-$NH_2COCH_2NH\cdot C_6H_4\cdot AsO(OH)ONa] + \frac{1}{2}H_2O$	305,09
Tubocurarinchlorid	$[C_{38}H_{44}O_6N_2]Cl_2 + 5H_2O$	785,78
Undecylensäure	$CH_2{:}CH\cdot(CH_2)_8\cdot COOH$	184,28
Urethan	$H_2NCOOC_2H_5$	89,10

Umrechnungsfaktoren zwischen Gramm, Mol, Grammäquivalent usw. verschiedener Verbindungen siehe auch S. 287–294

1. Umrechnungsfaktoren für Verbindungen

Umzurechnen			Faktor	$\log_{10}$	Umzurechnen			Faktor	$\log_{10}$
Aceton		in Acetessigsäure	1,76	0,2455	Acetessigsäure		in Aceton	0,57	0,7559–1
Aceton		in β-Hydroxybuttersäure	1,79	0,2529	β-Hydroxybuttersäure		in Aceton	0,56	0,7482–1
	Ca	in CaO	1,4	0,1461		CaO	in Ca	0,71	0,8513–1
	Cl	in NaCl	1,65	0,2175		NaCl	in Cl	0,607	0,7832–1
	K	in K_2O	1,21	0,0828		K_2O	in K	0,83	0,9191–1
	Mg	in MgO	1,66	0,2201		MgO	in Mg	0,603	0,7803–1
	Na	in NaCl	2,54	0,4048		NaCl	in Na	0,39	0,5911–1
	Na	in Na_2O	1,35	0,1303		Na_2O	in Na	0,74	0,8692–1
	P	in P_2O_5	2,29	0,3598		P_2O_5	in P	0,44	0,6435–1
	P	in H_3PO_4	3,16	0,4997		H_3PO_4	in P	0,316	0,4997–1
	S	in SO_3	2,55	0,4065		SO_3	in S	0,40	0,6021–1
	S	in H_2SO_4	3,06	0,4857		H_2SO_4	in S	0,33	0,5185–1
Stickstoff									
Protein-N		in Protein	6,25	0,7959	Protein		in Protein-N	0,16	0,2041–1
Ammoniak-N		in Ammoniak	1,21	0,0828	Ammoniak		in Ammoniak-N	0,82	0,9138–1
Creatin-N		in Creatin	3,12	0,4942	Creatin		in Creatin-N	0,32	0,5051–1
Creatinin-N		in Creatinin	2,7	0,4314	Creatinin		in Creatinin-N	0,37	0,5682–1
Harnstoff-N		in Harnstoff	2,14	0,3304	Harnstoff		in Harnstoff-N	0,47	0,6721–1
Harnsäure-N		in Harnsäure	3,0	0,4771	Harnsäure		in Harnsäure-N	0,33	0,5185–1
Lipoide									
Total-Lipoidphosphor*		in Phosphatide	23,5	1,3711					
Neutralfett-C		in Neutralfett	1,32	0,1206	Neutralfett		in Neutralfett-C	0,757	0,8791–1
Total-Lipoid-C*		in Total-Lipoide	1,3	0,1139	Total-Lipoide*		in Total-Lipoid-C	0,769	0,8859–1
Lipoid-P*		in Lecithin	2,6	0,4150	Lecithin*		in Lipoid-P	0,384	0,5843–1

2. Umrechnung von mg/100 ml in Millimol und umgekehrt

$$\text{mmol/l} = \frac{10 \times \text{mg/100 ml}}{\text{Molekulargewicht}} = \frac{10\,000 \times \text{g/100 ml}}{\text{Molekulargewicht}}$$

$$\text{mg/100 ml} = \frac{\text{mmol} \times \text{Molekulargewicht}}{10}$$

3. Umrechnung von ml-Gase/100 ml in Millimol je Liter

$$\text{mmol/l} = \frac{\text{ml/100 ml}}{2{,}24} \qquad (2{,}24 = \text{Millimolar-Volumen})$$

$$\text{ml/100 ml} = 2{,}24 \times \text{mmol/l}$$

4. Umrechnung von mg/100 ml in Millival je Liter und umgekehrt

$$\text{mval/l} = \frac{10 \times \text{mg/100 ml} \times \text{Wertigkeit}}{\text{Molekulargewicht}}$$

$$\text{mg/100 ml} = \frac{\text{mval/l} \times \text{Molekulargewicht}}{10 \times \text{Wertigkeit}}$$

5. n/1000 = 0,001 n = 1 ml 0,1 n je 100 ml = 1 ml n je Liter = 1 mval je Liter = 1 mmol je Liter/Wertigkeit = Äquivalentgewicht in Milligramm je Liter

* Lipoide = Phospholipide (Phosphatide) + Steroide. Vgl. S. 350–354.

Name	Molekulargewicht	Wasserstoffäquivalent	Gramm in 1 ml 0,1 n-Lösung	Mantisse des Äquivalentgewichtes[1] $\log_{10}$
Ammoniak	17,03	NH_3	0,001703	2311
Ammoniumchlorid	53,50	NH_4Cl	0,005350	7284
Ammoniumhydroxyd	35,05	NH_4OH	0,003505	5447
Ammoniumnitrat	80,05	NH_4NO_3	0,008005	9034
Ammoniumsulfat	132,15	$^1/_2(NH_4)_2SO_4$	0,006607	8200
Ammoniumthiocyanat	76,13	NH_4CNS	0,007613	8816
Äpfelsäure	134,09	$^1/_2C_4H_6O_5$	0,006705	8264
Bariumcarbonat	197,37	$^1/_2BaCO_3$	0,009869	9943
Bariumchlorid	244,31	$^1/_2[BaCl_2+2H_2O]$	0,012215	0869
Bariumhydroxyd	315,50	$^1/_2[Ba(OH)_2+8H_2O]$	0,015775	1980
Bariumoxyd	153,36	$^1/_2BaO$	0,007668	8847
Bernsteinsäure	118,09	$^1/_2C_4H_6O_4$	0,005905	7713
Bleicarbonat	267,22	$^1/_2PbCO_3$	0,013361	1258
Bleioxyd	223,21	$^1/_2PbO$	0,011161	0477
Borax siehe Natriumtetraboratdekahydrat				
Borsäure, Ortho-	61,84	$^1/_3H_3BO_3$	0,002061	3141
Brom	159,83	$^1/_2Br_2$	0,007992	9026
Bromwasserstoff	80,92	HBr	0,008092	9080
Calciumcarbonat	100,09	$^1/_2CaCO_3$	0,005005	6994
Calciumchlorid	110,99	$^1/_2CaCl_2$	0,005550	7443
Calciumchloridhexahydrat	219,09	$^1/_2[CaCl_2+6H_2O]$	0,010955	0396
Calciumhydroxyd	74,10	$^1/_2Ca(OH)_2$	0,003705	5688
Calciumoxyd	56,08	$^1/_2CaO$	0,002804	4478
Chlor	70,91	$^1/_2Cl_2$	0,003546	5497
Citronensäure	210,15	$^1/_3[C_6H_8O_7+H_2O]$	0,007005	8454
Cyanwasserstoff	27,03	HCN	0,002703	4319
Essigsäure	60,05	CH_3COOH	0,006005	7786
Jod	253,82	$^1/_2I_2$	0,012691	1035
Jodwasserstoff	127,92	HI	0,012792	1070
Kaliumbicarbonat	100,12	$KHCO_3$	0,010012	0005_{208}
Kaliumbichromat	294,22	$^1/_6K_2Cr_2O_7$	0,004904	6906
Kaliumbitartrat	188,18	$C_4H_5O_6K$	0,018818	2746
Kaliumcarbonat	138,21	$^1/_2K_2CO_3$	0,006911	8396
Kaliumchlorid	74,56	KCl	0,007456	8726
Kaliumcyanid	65,12	KCN	0,006512	8137
Kaliumhydroxyd	56,11	KOH	0,005611	7491
Kaliumoxyd	94,20	$^1/_2K_2O$	0,004710	6730
Kaliumpermanganat für CO-Bestimmung	158,04	$^1/_5KMnO_4$	0,003161	4998
Kaliumpermanganat für Mn-Bestimmung	158,04	$^1/_5KMnO_4$	0,005268	7217
Kaliumtartrat	226,28	$^1/_2C_4H_4O_6K_2$	0,011314	0536
Kaliumtetroxalat	254,20	$^1/_3[KH_3(C_2O_4)_2+2H_2O]$	0,008473	9281
Kohlenstoffdioxyd	44,01	$^1/_2CO_2$	0,002201	3426
Kupferoxyd	79,54	$^1/_2CuO$	0,003977	5996
Kupfersulfat	249,69	$^1/_2[CuSO_4+5H_2O]$	0,012484	0964
Magnesiumcarbonat	84,33	$^1/_2MgCO_3$	0,004217	6250
Magnesiumchlorid	95,23	$^1/_2MgCl_2$	0,004762	6778
Magnesiumchloridhexahydrat	203,33	$^1/_2[MgCl_2+6H_2O]$	0,010167	0071_{928}
Magnesiumoxyd	40,32	$^1/_2MgO$	0,002016	3045
Mangansulfat	151,01	$^1/_2MnSO_4$	0,007550	8779
Milchsäure	90,08	$CH_3{\cdot}CHOH{\cdot}COOH$	0,009008	9546
Natriumbicarbonat	84,01	$NaHCO_3$	0,008401	9244
Natriumcarbonat	105,99	$^1/_2Na_2CO_3$	0,005300	7243
Natriumchlorid	58,45	$NaCl$	0,005845	7668
Natriumhydroxyd	40,00	$NaOH$	0,004000	6021
Natriumoxyd	61,98	$^1/_2Na_2O$	0,003099	4913
Natriumphosphat, sec. (Dinatriumphosphat)	178,00	$^1/_2[Na_2HPO_4+2H_2O]$	0,008900	9494
Natriumphosphat, tert. (Trinatriumphosphat)	380,14	$^1/_3[Na_3PO_4+12H_2O]$	0,012671	1028
Natriumsulfid	78,05	$^1/_2Na_2S$	0,003902	5913
Natriumtetraborat	201,26	$^1/_2Na_2B_4O_7$	0,010063	0027_{275}
Natriumtetraboratdekahydrat (Borax)	381,42	$^1/_2[Na_2B_4O_7+10H_2O]$	0,019071	2804
Oxalsäure	90,04	$^1/_2HOOC{\cdot}COOH$	0,004502	6534
Oxalsäuredihydrat	126,07	$^1/_2[HOOC{\cdot}COOH+2H_2O]$	0,006304	7996
Phosphorsäure	98,00	$^1/_3H_3PO_4$	0,003267	5141
Quecksilber(II)chlorid (Sublimat)	271,52	$^1/_2HgCl_2$	0,013576	1328
Salpetersäure	63,02	HNO_3	0,006302	7994
Salpetrige Säure	47,02	HNO_2	0,004702	6723
Salzsäure	36,47	HCl	0,003647	5619
Silbernitrat	169,89	$AgNO_3$	0,016989	2302
Schwefelsäure	98,08	$^1/_2H_2SO_4$	0,004904	6906
Schwefeltrioxyd	80,07	$^1/_2SO_3$	0,004003	6024
Weinsäure	150,09	$^1/_2C_4H_6O_6$	0,007505	8754
Zinksulfat	287,56	$^1/_2[ZnSO_4+7H_2O]$	0,014378	1577

1) Logarithmen siehe S. 10.

Wenn nicht anders vermerkt, sind Stamm- und Pufferlösungen mit destilliertem und CO_2-freiem Wasser anzusetzen. Es sollten nur Standardreagenzien gebraucht werden. Die Molarität einer Lösung, die mit Reagenzien von zweifelhafter Reinheit oder zweifelhaftem Hydrationsgrad bereitet würde, muß durch Titrierung geprüft werden. Die Mengen x und y der Stammlösungen, die genommen werden müssen, um verschiedene pH-Werte zu erhalten, sind in der Tabelle auf S. 278 angegeben.

Nr.	Name	pH-Bereich	Stammlösungen		Zusammensetzung der Pufferlösung
			A	B	
1	Aconitinsäure[1] (Gomori)	2,5–5,7	0,5 mol Aconitinsäure (87,1 g/l)	0,2 n-NaOH	10 ml A + x ml B auf 100 ml
2	Barbital-Natrium[2] (Michaelis)	6,8–9,6	0,1 mol Barbital-Natrium (20,6 g/l)	0,1 n-HCl	x ml A + (100 — x) ml B
3	Barbital-Natrium-Acetat[3] (Michaelis)	2,6–9,4	$^1/_7$ mol Natriumacetat in $^1/_7$ mol Barbital-Natrium (19,43 g $C_2H_3O_2 \cdot 3\,H_2O$ + 29,43 g Barbital-Natrium in 1 Liter)	0,1 n-HCl	50 ml A + x ml B + 20 ml 8,5%-NaCl-Lösung, auf 250 ml
4	Bernsteinsäure[1] (Gomori)	3,8–6,0	0,2 mol Bernsteinsäure (23,62 g/l)	0,2 n-NaOH	25 ml A + x ml B auf 100 ml
5	Borax-Bernsteinsäure[4] (Kolthoff)	3,0–5,8	0,05 mol Borax (19,1 g/l)	0,05 mol Bernsteinsäure (5,9 g/l)	x ml A + (100 — x) ml B
6	Boraxphosphat[4, 5] (Kolthoff)	5,8–9,2	0,05 mol Borax (19,1 g/l)	0,1 mol Monokaliumphosphat (13,6 g KH_2PO_4 pro Liter)	x ml A + (100 — x) ml B
7	Borsäure[6] (Clark und Lubs)	7,8–10,0	0,1 mol Borsäure in 0,1 mol KCl (6,2 g H_3BO_3 + 7,46 g KCl pro Liter)	0,1 n-NaOH	50 ml A + x ml B auf 100 ml
8	Cacodylat[1, 7] (Plumel)	5,0–7,4	0,2 mol Natriumcacodylat [42,8 g $Na(CH_3)_2AsO_2 \cdot 3\,H_2O$ pro Liter]	0,2 n-HCl	25 ml A + x ml B auf 100 ml
9	Carbonat-Bicarbonat[1, 8] (Delory und King)	9,2–10,7	0,2 mol wasserfreies Natriumcarbonat (21,2 g/l)	0,2 mol Natriumbicarbonat (16,8 g/l)	x ml A + y ml B auf 100 ml
10	Citrat I[9, 10] (Sørensen)	2,2–4,8	0,1 mol Dinatriumcitrat (21,0 g Citronensäure [$1H_2O$] in 200 ml 1 n-NaOH gelöst und auf 1 Liter aufgefüllt)	0,1 n-HCl	x ml A + (100 — x) ml B
11	Citrat II[9, 10] (Sørensen)	5,0–6,8	Wie Nr. 10	0,1 n-NaOH	x ml A + (100 — x) ml B
12	Citrat-Phosphat-Borat[11] (Teorell und Stenhagen)	2,0–12,0	Citronensäure- und Phosphorsäurelösungen (etwa 100 ml, die je 100 ml 1 n-NaOH entsprechen, werden mit 3,54 g Borsäure krist. und 343 ml 1 n-NaOH versetzt und auf 1 Liter aufgefüllt)	0,1 n-HCl	20 ml A + x ml B auf 100 ml
13	Citronensäure-Phosphat[12] (McIlvaine)	2,2–8,0	0,1 mol Citronensäure (21,0 g $C_6H_8O_7 \cdot 1H_2O$ pro Liter)	0,2 mol Dinatriumphosphat (35,6 g $Na_2HPO_4 \cdot 2\,H_2O$ pro Liter)	x ml A + (100 — x) ml B
14	Dimethylglutarat[13] (Stafford, Watson und Rand)	3,2–7,6	0,1 mol ββ-Dimethylglutarsäure (16,02 g/l)	0,2 n-NaOH	a) 100 ml A + x ml B auf 1000 ml b) 100 ml A + x ml B + 5,845 g NaCl auf 1000 ml (△ 0,1 mol NaCl)
15	Essigsäure[1, 14] (Walpole)	3,6–5,6	0,2 mol Essigsäure (12,0 g/l)	0,2 mol Natriumacetat (16,4 g $C_2H_3O_2Na$ oder 27,2 g $C_2H_3O_2Na \cdot 3\,H_2O$ pro Liter)	x ml A + y ml B auf 100 ml
16	Glycin I[9, 10] (Sørensen)	1,2–3,6	0,1 mol Glycin in 0,1 n-NaCl (7,5 g Glycin + 5,85 g NaCl in 1 Liter)	0,1 n-HCl	x ml A + (100 — x) ml B
17	Glycin II[9, 10] (Sørensen)	8,4–13,0	Wie Nr. 16	0,1 n-NaOH	x ml A + (100 — x) ml B
18	Kaliumchlorid-Salzsäure[6] (Clark und Lubs)	1,0–2,2	0,2 n-KCl (14,9 g/l)	0,2 n-HCl	25 ml A + x ml B auf 100 ml
19	Phosphat[10, 15] (Sørensen)	5,0–8,2	$^1/_{15}$ mol Monokaliumphosphat (9,08 g KH_2PO_4 pro Liter)	$^1/_{15}$ mol Dinatriumphosphat (11,88 g $Na_2HPO_4 \cdot 2\,H_2O$ pro Liter)	x ml A + (100 — x) ml B
20	Phthalat I[6] (Clark und Lubs)	2,2–3,8	0,1 mol Kaliumbiphthalat (20,4 g $KHC_8H_4O_4$ pro Liter)	0,1 n-HCl	50 ml A + x ml B auf 100 ml
21	Phthalat II[6] (Clark und Lubs)	4,0–6,2	Wie Nr. 20	0,1 n-NaOH	50 ml A + x ml B auf 100 ml
22	Piperazin[16] (Smith und Smith)	4,8–7,0 8,8–11,0	1 mol Piperazindihydrochlorid (159,1 g/l)	1 n-NaOH	1000 ml A + x ml B
23	Piperazin (Meerwasser)[16] (Smith und Smith)	5,4–9,8	0,01 mol Piperazindihydrochlorid in filtriertem Meerwasser (pH 8,0) (1,591 g/l)	1 n-NaOH	1000 ml A + x ml B
24	Piperazin-Glycylglycin[16] (Smith und Smith)	4,4–10,8	0,01 mol Piperazindihydrochlorid in 0,01 mol Glycylglycin (1,591 g Piperazin · 2 HCl + 1,321 g Glycylglycin in 1 Liter)	1 n-NaOH	1000 ml A + x ml B
25	Tris[1, 17] (Gomori)	7,2–9,0	0,2 mol Tris [24,2 g Tris-(hydroxymethyl)aminomethan pro Liter]	0,2 n-HCl	25 ml A + x ml B auf 100 ml
26	Trismaleat[1, 17] (Gomori)	5,2–8,6	0,2 mol Trismaleat [24,2 g Tris(hydroxymethyl)aminomethan + 23,2 g Maleinsäure oder 19,6 g Maleinanhydrid in 1 Liter]	0,2 n-NaOH	25 ml A + x ml B auf 100 ml

Literatur. *1)* Gomori, G., in: Colowick und Kaplan (Hrsg.), *Methods in Enzymology*, Bd. I, New York (1955), S. 138. *2)* Michaelis, L., *J. biol. Chem.*, **87**, 33 (1930). *3)* Michaelis, L., *Biochem. Z.*, **234**, 139 (1931). *4)* Kolthoff, I. M., *J. biol. Chem.*, **63**, 135 (1925). *5)* Kolthoff, I. M., *Säure-Basen-Indicatoren*, Berlin (1932), S. 257. *6)* Clark und Lubs, *J. Bact.*, **2**, 1 (1917). *7)* Plumel, M., *Bull. Soc. Chim. biol. (Paris)*, **30**, 129 (1948). *8)* Delory und King, *Biochem. J.*, **39**, 245 (1945). *9)* Sørensen, S. P. L., *Biochem. Z.*, **21**, 131 (1909). *10)* Sørensen, S. P. L., *Ergebn. Physiol.*, **12**, 393 (1912). *11)* Teorell und Stenhagen, *Biochem. Z.*, **299**, 416 (1938). *12)* McIlvaine, T. C., *J. biol. Chem.*, **49**, 183 (1921). *13)* Stafford et al., *Biochim. biophys. Acta*, **18**, 319 (1955); Krebs, H. A., unveröffentlicht (1957). *14)* Walpole, G. S., *J. chem. Soc.*, **105**, 2501 (1914). *15)* Sørensen, S. P. L., *Biochem. Z.*, **22**, 352 (1909). *16)* Smith und Smith, *Biol. Bull.*, **96**, 233 (1949). *17)* Gomori, G., *Proc. Soc. exp. Biol. (N. Y.)*, **68**, 354 (1948).

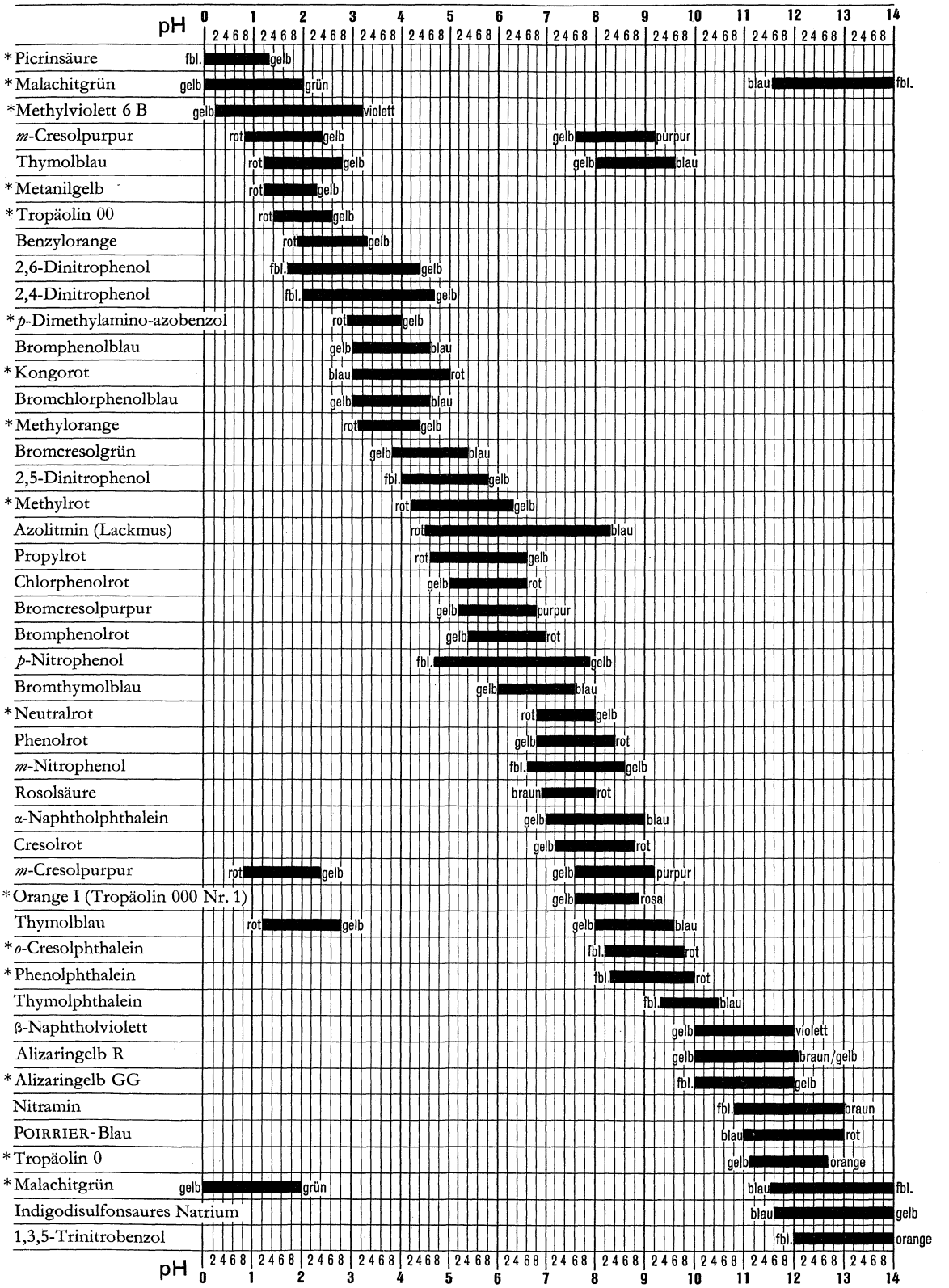
Pufferlösungen (Schluß)

Angegeben sind die Milliliter der Stammlösungen, die gemäß den Angaben auf S. 277 nötig sind, um eine Lösung mit dem gewünschten pH zu erhalten

pH	1 (23° C)	3 (23° C)	4 (23° C)	5 (18° C)	6 (18° C)	7 (20° C)	8 (23° C)	10 (*)	11 (18° C)	12 (20° C)	13 (21° C)	14/a (21° C)	14/b (21° C)	15 (23° C)	16 (18° C)	18 (20° C)	20 (20° C)	21 (20° C)	22 (25° C)	23 (25° C)	24 (25° C)	25 (23° C)	26 (23° C)	pH
1,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	48,50	—	—	—	—	—	—	—	1,0
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15,0	32,25	—	—	—	—	—	—	—	2
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	28,7	20,75	—	—	—	—	—	—	—	4
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	38,2	13,15	—	—	—	—	—	—	—	6
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	45,7	8,40	—	—	—	—	—	—	—	8
2,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	73,30	—	—	—	—	52,3	5,30	—	—	—	—	—	—	—	2,0
2	—	—	—	—	—	—	—	33,0	—	67,85	98,00	—	—	—	58,3	3,35	46,70	—	—	—	—	—	—	2
4	—	—	—	—	—	—	—	34,6	—	63,85	93,80	—	—	—	64,5	—	39,60	—	—	—	—	—	—	4
6	9,0	160,5	—	—	—	—	—	36,4	—	60,80	89,10	—	—	—	70,2	—	32,95	—	—	—	—	—	—	6
8	12,3	157,5	—	—	—	—	—	38,4	—	58,45	84,15	—	—	—	75,6	—	26,42	—	—	—	—	—	—	8
3,0	16,0	154,0	—	1,4	—	—	—	40,5	—	56,50	79,45	—	—	—	80,8	—	20,32	—	—	—	—	—	—	3,0
2	20,0	150,0	—	3,5	—	—	—	42,8	—	54,95	75,30	8,3	15,7		85,6	—	14,70	—	—	—	—	—	—	2
4	24,0	146,0	—	6,0	—	—	—	46,0	—	53,70	71,50	14,7	22,1	x y	90,3	—	9,90	—	—	—	—	—	—	4
6	28,0	140,0	—	9,5	—	—	—	48,5	—	52,65	67,80	22,0	27,9	46,3 3,7	94,5	—	5,97	—	—	—	—	—	—	6
8	32,0	133,5	7,5	13,7	—	—	—	52,0	—	51,55	64,50	27,4	33,3	44,0 6,0	—	—	2,63	—	—	—	—	—	—	8
4,0	36,0	125,5	10,0	17,8	—	—	—	55,8	—	50,50	61,45	33,3	37,4	41,0 9,0	—	—	—	0,40	—	—	—	—	—	4,0
2	39,8	117,5	13,3	22,2	—	—	—	61,2	—	49,45	58,60	36,8	40,9	36,8 13,2	—		—	3,70	—	—	—	—	—	2
4	43,3	109,5	16,7	26,2	—	—	—	67,8	—	48,35	55,90	39,8	43,6	30,5 19,5	—	**19**	—	7,50	—	—	0,07	—	—	4
6	46,8	101,5	20,0	30,0	—	—	—	76,6	—	47,26	53,25	41,7	46,2	25,5 24,5	—	(18° C)	—	12,15	—	—	0,54	—	—	6
8	50,0	94,5	23,5	33,5	—	—	—	88,2	—	46,22	50,70	43,9	48,9	20,0 30,0	—		—	17,70	70,0	—	1,20	—	—	8
5,0	52,8	88,0	26,7	36,8	—	—	23,5	—	96,3	45,18	48,50	46,2	52,0	14,8 35,2	—	98,8	—	23,85	111,0	—	2,20	—	—	5,0
2	55,3	82,5	30,3	39,5	—	—	22,5	—	85,0	44,05	46,40	49,0	54,3	10,5 39,5	—	98,0	—	29,95	174,0	—	3,20	—	3,5	2
4	58,0	78,0	34,2	42,1	—	—	21,5	—	76,5	42,94	44,25	52,0	59,2	8,8 41,2	—	96,7	—	35,45	258,0	0,88	4,19	—	5,4	4
6	61,3	75,0	37,5	44,3	—	—	19,6	—	69,3	41,80	42,00	55,8	64,6	4,8 45,2	—	94,8	—	39,85	355,0	2,00	5,38	—	7,8	6
8	—	72,5	40,7	46,0	7,9	—	17,4	—	63,3	40,61	39,55	59,7	69,7	—	—	91,9	—	43,00	466,0	3,53	6,51	—	10,3	8
6,0		71,0	43,5	—	12,3	—	14,8	—	59,5	39,42	36,85	65,0	74,6	—	—	87,7	—	45,45	581,0	4,93	7,45	—	13,0	6,0
2	**2**	69,5	—	—	17,0	—	11,9	—	56,7	38,09	33,90	70,5	79,5	—	—	81,5	—	47,00	690,0	6,15	8,27	—	15,8	2
4	(23° C)	68,5	—	—	23,0	—	9,2	—	54,5	36,74	30,75	75,5	84,2	—	—	73,2	—	—	780,0	7,18	8,99	—	18,5	4
6		66,5	—	—	28,8	—	6,7	—	53,0	35,36	27,25	84,7	88,1	—	—	62,7	—	—	850,0	7,97	9,53	—	21,3	6
8	52,2	64,0	—	—	34,2	—	4,7	—	51,8	33,92	22,75	88,0	91,5	—	—	50,8	—	—	900,0	8,54	9,99	—	22,5	8
7,0	53,6	60,5	—	—	39,0	—	3,2	—	—	32,65	18,15	90,4	93,6	—	—	39,2	—	—	936,0	8,95	10,45	—	24,0	7,0
2	55,4	56,5	—	—	43,4	—	2,1	—	—	31,45	13,05	92,1	95,1	—	—	28,5	—	—	936,0	9,23	10,91	22,1	25,5	2
4	58,1	50,5	—	—	46,4	—	1,4	—	—	30,35	9,15	93,2	96,0	—	—	19,6	—	—	936,0	9,47	11,52	20,7	27,0	4
6	61,5	43,0	—	—	49,2	—	—	—	—	29,43	6,35	94,0	97,0	—	—	13,2	—	—	936,0	9,65	12,31	19,2	29,0	6
8	66,2	34,5	—	—	52,0	2,61	—	—	—	28,68	4,30	—	—	—	—	8,6	—	—	936,0	9,83	13,29	16,3	31,8	8
8,0	71,6	26,0	—	—	55,0	3,97	—	—	—	28,02	2,75	—	—	—	**17**	5,5	—	—	936,0	10,01	14,45	13,4	34,5	8,0
2	76,9	18,5	—	—	57,6	5,90		—	—	27,45	—	—	—	—	(18° C)	3,3	—	—	936,0	10,27	15,71	11,0	37,5	2
4	82,3	13,0	—	—	62,0	8,50	**9**	—	—	26,90	—	—	—	—	96,5	—	—	—	936,0	10,65	16,97	8,3	40,5	4
6	87,1	9,0	—	—	68,0	12,00	(23° C)	—	—	26,10	—	—	—	—	94,8	—	—	—	936,0	11,13	18,25	6,1	43,3	6
8	90,8	6,0	—	—	75,2	16,30	x y	—	—	24,90	—	—	—	—	92,1	—	—	—	1079,0	11,76	19,50	4,1	—	8
9,0	93,6	4,0	—	—	86,8	21,30	2,0 23,0	—	—	23,75	—	—	—	—	88,5	—	—	—	1121,0	12,62	20,64	2,5	—	9,0
2	95,2	2,0	—	—	100,0	26,70	4,8 20,3	—	—	22,38	—	—	—	—	84,2	—	—	—	1179,0	13,62	21,85	—	—	2
4	97,4	1,0	—	—	—	32,00	8,0 17,0	—	—	21,12	—	—	—	—	79,0	—	—	—	1252,0	14,88	23,13	—	—	4
6	98,5	—	—	—	—	36,85	11,0 14,0	—	—	19,94	—	—	—	—	73,2	—	—	—	1346,0	16,42	24,51	—	—	6
8	—	—	—	—	—	40,80		—	—	18,81	—	—	—	—	67,7	—	—	—	1456,0	18,65	25,87	—	—	8
10,0	—	—	—	—	—	43,90	13,8 11,3	—	—	17,92	—	—	—	—	63,0	—	—	—	1566,0	—	27,17	—	—	10,0
2	—	—	—	—	—	—	16,5 8,5	—	—	16,97	—	—	—	—	59,0	—	—	—	1666,0	—	28,32	—	—	2
4	—	—	—	—	—	—	19,3 5,8	—	—	16,36	—	—	—	—	56,1	—	—	—	1762,0	—	29,37	—	—	4
6	—	—	—	—	—	—	21,3 3,8	—	—	15,95	—	—	—	—	53,7	—	—	—	1844,0	—	30,42	—	—	6
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15,40	—	—	—	—	52,2	—	—	—	1905,0	—	31,53	—	—	8
11,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	14,52	—	—	—	—	51,0	—	—	—	1952,0	—	—	—	—	11,0
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	13,20	—	—	—	—	50,3	—	—	—	—	—	—	—	—	2
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	11,23	—	—	—	—	49,7	—	—	—	—	—	—	—	—	4
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	8,40	—	—	—	—	48,8	—	—	—	—	—	—	—	—	6
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4,70	—	—	—	—	47,8	—	—	—	—	—	—	—	—	8
12,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,40	—	—	—	—	46,2	—	—	—	—	—	—	—	—	12,0
2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	43,6	—	—	—	—	—	—	—	—	2
4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	40,0	—	—	—	—	—	—	—	—	4
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	33,4	—	—	—	—	—	—	—	—	6
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	24,2	—	—	—	—	—	—	—	—	8
13,0	* pH-Änderung mit Temperatur kann vernachlässigt werden.							—	—	—	—	—	—	—	7,5	—	—	—	—	—	—	—	—	13,0

Farbstoffindikatoren

Nach einer Zusammenstellung der Eidgenössischen Materialprüfungs- und Versuchsanstalt, St. Gallen (Prof. Dr. A. ENGELER)



* Erhältlich bei J. R. Geigy A.G., Basel 16.

Spezifische Gewichte $\left(\frac{20°\,C}{4°}\right)$ von wässerigen Lösungen[1]

Salpetersäure

Spez. Gew.	°Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% HNO_3	n
1,0036	0,5	10,04	1	0,159
1,0091	1,3	20,18	2	0,320
1,0146	2,1	30,44	3	0,483
1,0201	2,9	40,80	4	0,647
1,0256	3,6	51,28	5	0,814
1,0312	4,4	61,87	6	0,982
1,0369	5,2	72,58	7	1,15
1,0427	5,9	83,42	8	1,32
1,0485	6,7	94,37	9	1,50
1,0543	7,5	105,4	10	1,67
1,0602	8,2	116,6	11	1,85
1,0661	9,0	127,9	12	2,03
1,0721	9,8	139,4	13	2,21
1,0781	10,5	150,9	14	2,39
1,0842	11,3	162,6	15	2,58
1,0903	12,0	174,4	16	2,77
1,0964	12,8	186,4	17	2,96
1,1026	13,5	198,5	18	3,15
1,1088	14,2	210,7	19	3,34
1,1150	15,0	223,0	20	3,54
1,1213	15,7	235,5	21	3,74
1,1276	16,4	248,1	22	3,94
1,1340	17,1	260,8	23	4,13
1,1404	17,9	273,7	24	4,34
1,1469	18,6	286,7	25	4,55
1,1534	19,4	299,9	26	4,76
1,1600	20,0	313,2	27	4,97
1,1666	20,7	326,6	28	5,18
1,1733	21,4	340,3	29	5,40
1,1800	22,1	354,0	30	5,62
1,1867	22,8	367,9	31	5,84
1,1934	23,5	381,9	32	6,06
1,2002	24,2	396,1	33	6,29
1,2071	24,9	410,4	34	6,51
1,2140	25,6	424,9	35	6,74
1,2205	26,2	439,4	36	6,97
1,2270	26,8	454,0	37	7,20
1,2335	27,5	468,7	38	7,44
1,2399	28,1	483,6	39	7,67
1,2463	28,7	498,5	40	7,91
1,2527	29,3	513,6	41	8,15
1,2591	29,8	528,8	42	8,39
1,2655	30,4	544,2	43	8,64
1,2719	31,0	559,6	44	8,88
1,2783	31,6	575,2	45	9,13
1,2847	32,1	591,0	46	9,38
1,2911	32,7	606,8	47	9,63
1,2975	33,2	622,8	48	9,88
1,3040	33,8	639,0	49	10,1
1,3100	34,3	655,0	50	10,4
1,3160	34,8	671,2	51	10,7
1,3219	35,3	687,4	52	10,9
1,3278	35,8	703,7	53	11,1
1,3336	36,3	720,1	54	11,4
1,3393	36,7	736,6	55	11,7
1,3449	37,2	753,1	56	12,0
1,3505	37,6	769,8	57	12,2
1,3560	38,1	786,5	58	12,5
1,3614	38,5	803,2	59	12,7
1,3667	38,9	820,0	60	13,0
1,3719	39,3	836,9	61	13,3
1,3769	39,7	853,7	62	13,5
1,3818	40,1	870,5	63	13,8
1,3866	40,4	887,4	64	14,1
1,3913	40,8	904,3	65	14,4
1,3959	41,1	921,3	66	14,6
1,4004	41,5	938,3	67	14,9
1,4048	41,8	955,3	68	15,2
1,4091	42,1	972,3	69	15,4
1,4134	42,4	989,4	70	15,7
1,4176	42,7	1006	71	16,0
1,4218	43,0	1024	72	16,3
1,4258	43,3	1041	73	16,5
1,4298	43,6	1058	74	16,8
1,4337	43,9	1075	75	17,1
1,4375	44,1	1093	76	17,3
1,4413	44,4	1110	77	17,6
1,4450	44,7	1127	78	17,9
1,4486	44,9	1144	79	18,2
1,4521	45,1	1162	80	18,4
1,4555	45,4	1179	81	18,7
1,4589	45,6	1196	82	19,0
1,4622	45,8	1214	83	19,3
1,4655	46,1	1231	84	19,5
1,4686	46,3	1248	85	19,8
1,4716	46,5	1266	86	20,1
1,4745	46,7	1283	87	20,4
1,4773	46,8	1300	88	20,6
1,4800	47,0	1317	89	20,9
1,4826	47,2	1334	90	21,2
1,4850	47,4	1351	91	21,4
1,4873	47,5	1368	92	21,7
1,4892	47,6	1385	93	22,0
1,4912	47,8	1402	94	22,3
1,4932	47,9	1419	95	22,5
1,4952	48,0	1435	96	22,8
1,4974	48,2	1452	97	23,0
1,5008	48,4	1471	98	23,3
1,5056	48,7	1491	99	23,7
1,5129	49,2	1513	100	24,0

Schwefelsäure

Spez. Gew.	°Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% H_2SO_4	n
1,0051	0,7	10,05	1	0,205
1,0118	1,7	20,24	2	0,413
1,0184	2,6	30,55	3	0,623
1,0250	3,5	41,00	4	0,836
1,0317	4,5	51,59	5	1,05
1,0385	5,4	62,31	6	1,27
1,0453	6,3	73,17	7	1,49
1,0522	7,2	84,18	8	1,72
1,0591	8,1	95,32	9	1,94
1,0661	9,0	106,6	10	2,17
1,0731	9,9	118,0	11	2,41
1,0802	10,8	129,6	12	2,64
1,0874	11,7	141,4	13	2,88
1,0947	12,5	153,3	14	3,13
1,1020	13,4	165,3	15	3,37
1,1094	14,3	177,5	16	3,62
1,1168	15,2	189,9	17	3,87
1,1243	16,0	202,4	18	4,13
1,1318	16,9	215,0	19	4,38
1,1394	17,7	227,9	20	4,65
1,1471	18,6	240,9	21	4,91
1,1548	19,4	254,1	22	5,18
1,1626	20,3	267,4	23	5,45
1,1704	21,1	280,9	24	5,73
1,1783	21,9	294,6	25	6,01
1,1862	22,8	308,4	26	6,29
1,1942	23,6	322,4	27	6,57
1,2023	24,4	336,6	28	6,86
1,2104	25,2	351,0	29	7,16
1,2185	26,0	365,6	30	7,46
1,2267	26,8	380,3	31	7,76
1,2349	27,6	395,2	32	8,06
1,2432	28,4	410,3	33	8,37
1,2515	29,1	425,5	34	8,68
1,2599	29,9	441,0	35	8,99
1,2684	30,7	456,6	36	9,31
1,2769	31,4	472,5	37	9,64
1,2855	32,2	488,5	38	9,96
1,2941	33,0	504,7	39	10,3
1,3028	33,7	521,1	40	10,6
1,3116	34,5	537,8	41	11,0
1,3205	35,2	554,6	42	11,3
1,3294	35,9	571,6	43	11,7
1,3384	36,7	588,9	44	12,0
1,3476	37,4	606,4	45	12,4
1,3569	38,1	624,2	46	12,7
1,3663	38,9	642,2	47	13,1
1,3758	39,6	660,4	48	13,5
1,3854	40,3	678,8	49	13,8
1,3951	41,1	697,6	50	14,2
1,4049	41,8	716,5	51	14,6
1,4148	42,5	735,7	52	15,0
1,4248	43,2	755,1	53	15,4
1,4350	44,0	774,9	54	15,8
1,4453	44,7	794,9	55	16,2
1,4557	45,4	815,2	56	16,6
1,4662	46,1	835,7	57	17,0
1,4768	46,8	856,5	58	17,5
1,4875	47,5	877,6	59	17,9
1,4983	48,2	899,0	60	18,3
1,5091	48,9	920,6	61	18,8
1,5200	49,6	942,4	62	19,2
1,5310	50,3	964,5	63	19,7
1,5421	51,0	986,9	64	20,1
1,5533	51,7	1010	65	20,6
1,5646	52,3	1033	66	21,1
1,5760	53,0	1056	67	21,5
1,5874	53,7	1079	68	22,0
1,5989	54,3	1103	69	22,5
1,6105	55,0	1127	70	23,0
1,6221	55,6	1152	71	23,5
1,6338	56,3	1176	72	24,0
1,6456	56,9	1201	73	24,5
1,6574	57,5	1226	74	25,0
1,6692	58,1	1252	75	25,5
1,6810	58,7	1278	76	26,1
1,6927	59,3	1303	77	26,6
1,7043	59,9	1329	78	27,1
1,7158	60,5	1355	79	27,6
1,7272	61,1	1382	80	28,2
1,7383	61,6	1408	81	28,7
1,7491	62,1	1434	82	29,2
1,7594	62,6	1460	83	29,8
1,7693	63,0	1486	84	30,3
1,7786	63,5	1512	85	30,8
1,7872	63,9	1537	86	31,3
1,7951	64,2	1562	87	31,9
1,8022	64,5	1586	88	32,3
1,8087	64,8	1610	89	32,8
1,8144	65,1	1633	90	33,3
1,8195	65,3	1656	91	33,8
1,8240	65,5	1678	92	34,2
1,8279	65,7	1700	93	34,7
1,8312	65,8	1721	94	35,1
1,8337	65,9	1742	95	35,5
1,8355	66,0	1762	96	35,9
1,8364	66,0	1781	97	36,3
1,8361	66,0	1799	98	36,7
1,8342	65,9	1816	99	37,0
1,8305	65,8	1831	100	37,3

1) Nach LANGE, N. A. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry*, Sandusky (1956); und HODGMAN et al. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry and Physics, 1958/59*, 40. Aufl., Cleveland (1958).

Spezifische Gewichte $\left(\frac{20°}{4°}\text{C}\right)$ von wässerigen Lösungen[1]

Essigsäure

Spez. Gew.	° Baumé (NBS-Skala)	Gramm p. Liter	% $C_2H_4O_2$
0,9982	...	....	0
0,9996	...	9,996	1
1,0012	0,2	20,02	2
1,0025	0,4	30,08	3
1,0040	0,6	40,16	4
1,0055	0,8	50,28	5
1,0069	1,0	60,41	6
1,0083	1,2	70,58	7
1,0097	1,4	80,78	8
1,0111	1,6	91,00	9
1,0125	1,8	101,3	10
1,0139	2,0	111,5	11
1,0154	2,2	121,8	12
1,0168	2,4	132,2	13
1,0182	2,6	142,5	14
1,0195	2,8	152,9	15
1,0209	3,0	163,3	16
1,0223	3,2	173,8	17
1,0236	3,3	184,2	18
1,0250	3,5	194,8	19
1,0263	3,7	205,3	20
1,0276	3,9	215,8	21
1,0288	4,1	226,3	22
1,0301	4,2	236,9	23
1,0313	4,4	247,5	24
1,0326	4,6	258,2	25
1,0338	4,7	268,8	26
1,0349	4,9	279,4	27
1,0361	5,1	290,1	28
1,0372	5,2	300,8	29
1,0384	5,4	311,5	30
1,0395	5,5	322,2	31
1,0406	5,7	333,0	32
1,0417	5,8	343,8	33
1,0428	6,0	354,6	34
1,0438	6,1	365,3	35
1,0449	6,2	376,2	36
1,0459	6,4	387,0	37
1,0469	6,5	397,8	38
1,0479	6,6	408,7	39
1,0488	6,8	419,5	40
1,0498	6,9	430,4	41
1,0507	7,0	441,3	42
1,0516	7,1	452,2	43
1,0525	7,2	463,1	44
1,0534	7,4	474,0	45
1,0542	7,5	484,9	46
1,0551	7,6	495,9	47
1,0559	7,7	506,8	48
1,0567	7,8	517,8	49
1,0575	7,9	528,8	50
1,0582	8,0	539,7	51
1,0590	8,1	550,7	52
1,0597	8,2	561,6	53
1,0604	8,3	572,6	54
1,0611	8,4	583,6	55
1,0618	8,4	594,6	56
1,0624	8,5	605,6	57
1,0631	8,6	616,6	58
1,0637	8,7	627,6	59
1,0642	8,8	638,5	60
1,0648	8,8	649,5	61
1,0653	8,9	660,5	62
1,0658	9,0	671,5	63
1,0662	9,0	682,4	64
1,0666	9,1	693,3	65
1,0671	9,1	704,3	66
1,0675	9,2	715,2	67
1,0678	9,2	726,1	68
1,0682	9,3	737,1	69
1,0685	9,3	748,0	70
1,0687	9,3	758,8	71
1,0690	9,4	769,7	72
1,0693	9,4	780,6	73
1,0694	9,4	791,4	74
1,0696	9,4	802,2	75
1,0698	9,5	813,0	76
1,0699	9,5	823,8	77
1,0700	9,5	834,6	78
1,0700	9,5	845,3	79
1,0700	9,5	856,0	80
1,0699	9,5	866,6	81
1,0698	9,5	877,2	82
1,0696	9,4	887,8	83
1,0693	9,4	898,2	84
1,0689	9,4	908,6	85
1,0685	9,3	918,9	86
1,0680	9,2	929,2	87
1,0675	9,2	939,4	88
1,0668	9,1	949,5	89
1,0661	9,0	959,5	90
1,0652	8,9	969,3	91
1,0643	8,8	979,2	92
1,0632	8,6	988,8	93
1,0619	8,5	998,2	94
1,0605	8,3	1007	95
1,0588	8,1	1016	96
1,0570	7,8	1025	97
1,0549	7,6	1034	98
1,0524	7,2	1042	99
1,0498	6,9	1050	100

Salzsäure

Spez. Gewicht	° Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% HCl	n
1,0032	0,5	10,03	1	0,275
1,0082	1,2	20,16	2	0,553
1,0181	2,6	40,72	4	1,12
1,0279	3,9	61,67	6	1,69
1,0376	5,3	83,01	8	2,28
1,0474	6,6	104,7	10	2,87
1,0574	7,9	126,9	12	3,48
1,0675	9,2	149,5	14	4,10
1,0776	10,4	172,4	16	4,73
1,0878	11,7	195,8	18	5,37
1,0980	12,9	219,6	20	6,02
1,1083	14,2	243,8	22	6,69
1,1187	15,4	268,5	24	7,36
1,1290	16,6	293,5	26	8,05
1,1392	17,7	319,0	28	8,75
1,1493	18,8	344,8	30	9,46
1,1593	19,9	371,0	32	10,2
1,1691	21,0	397,5	34	10,9
1,1789	22,0	424,4	36	11,6
1,1885	23,0	451,6	38	12,4
1,1980	24,0	479,2	40	13,1

Phosphorsäure

Spez. Gewicht	° Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% H_3PO_4	Gramm pro Liter	% P_2O_5
1,0038	0,6	10,04	1	7,271	0,7244
1,0092	1,3	20,18	2	14,62	1,449
1,0200	2,8	40,80	4	29,56	2,898
1,0309	4,3	61,85	6	44,81	4,346
1,0420	5,8	83,36	8	60,39	5,795
1,0532	7,3	105,3	10	76,29	7,244
1,0647	8,8	127,8	12	92,55	8,693
1,0764	10,3	150,7	14	109,2	10,14
1,0884	11,8	174,1	16	126,1	11,59
1,1008	13,3	198,1	18	143,5	13,04
1,1134	14,8	222,7	20	161,3	14,49
1,1263	16,3	247,8	22	179,5	15,94
1,1395	17,8	273,5	24	198,1	17,39
1,1529	19,2	299,8	26	217,1	18,83
1,1665	20,7	326,6	28	236,6	20,28
1,1805	22,2	354,2	30	256,5	21,73
1,216	25,8	425,6	35	308,3	25,35
1,254	29,4	501,6	40	363,4	28,98
1,293	32,9	581,9	45	421,5	32,60
1,335	36,4	667,5	50	483,5	36,22
1,379	39,9	758,5	55	549,4	39,84
1,426	43,3	855,6	60	619,8	43,46
1,475	46,7	958,8	65	694,5	47,09
1,526	50,0	1068	70	773,8	50,71
1,579	53,2	1184	75	857,9	54,33
1,633	56,2	1306	80	946,4	57,95
1,689	59,2	1436	85	1040	61,57
1,746	62,0	1571	90	1138	65,20
1,770	63,1	1628	92	1180	66,64
1,794	64,2	1686	94	1222	68,09
1,819	65,3	1746	96	1265	69,54
1,844	66,4	1807	98	1309	70,99
1,870	67,5	1870	100	1355	72,44

Natriumthiosulfat

Spez. Gewicht	° Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% $Na_2S_2O_3$	Gramm pro Liter	% $Na_2S_2O_3 + 5H_2O$
1,0065	0,9	10,07	1	15,80	1,570
1,0148	2,1	20,30	2	31,86	3,139
1,0315	4,4	41,26	4	64,77	6,279
1,0483	6,7	62,90	6	98,73	9,418
1,0654	8,9	85,23	8	133,8	12,56
1,0827	11,1	108,3	10	170,0	15,70
1,1003	13,2	132,0	12	207,3	18,84
1,1182	15,3	156,5	14	245,7	21,98
1,1365	17,4	181,8	16	285,4	25,12
1,1551	19,5	207,9	18	326,4	28,25
1,1740	21,5	234,8	20	368,6	31,39
1,1932	23,5	262,5	22	412,1	34,53
1,2128	25,4	291,1	24	456,9	37,67
1,2328	27,4	320,5	26	503,1	40,81
1,2532	29,3	350,9	28	550,8	43,95
1,2739	31,2	382,2	30	599,9	47,09
1,3273	35,8	464,6	35	729,2	54,94
1,3827	40,1	553,1	40	868,2	62,79

Eisen(III)chlorid

Spez. Gewicht	° Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% $FeCl_3$
1,007	1,0	10,07	1
1,015	2,1	20,30	2
1,032	4,5	41,28	4
1,049	6,8	62,94	6
1,067	9,1	85,36	8
1,085	11,4	108,5	10
1,104	13,7	132,5	12
1,123	15,9	157,2	14
1,142	18,0	182,7	16
1,162	20,2	209,2	18
1,182	22,3	236,4	20
1,234	27,5	308,5	25
1,291	32,7	387,3	30
1,353	37,8	473,6	35
1,418	42,7	567,2	40
1,485	47,4	668,3	45
1,551	51,5	775,5	50

1) Nach LANGE, N. A. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry*, Sandusky (1956); und HODGMAN et al. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry and Physics, 1958/59*, 40. Aufl., Cleveland (1958).

Spezifische Gewichte $\left(\frac{20°}{4°}\,\mathrm{C}\right)$ von wässerigen Lösungen[1]

Bariumchlorid

Spez. Gewicht	°Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% $BaCl_2$	Gramm pro Liter	% $BaCl_2 . 2H_2O$
1,0159	2,3	20,32	2	23,83	2,346
1,0341	4,8	41,36	4	48,52	4,692
1,0528	7,3	63,17	6	74,10	7,038
1,0721	9,8	85,77	8	100,6	9,384
1,0921	12,2	109,2	10	128,1	11,73
1,1128	14,7	133,5	12	156,6	14,08
1,1342	17,2	158,8	14	186,3	16,42
1,1564	19,6	185,0	16	217,0	18,77
1,1793	22,0	212,3	18	249,0	21,11
1,2031	24,5	240,6	20	282,2	23,46
1,2277	26,9	270,1	22	316,8	25,81
1,2531	29,3	300,7	24	352,8	28,15
1,2793	31,7	332,6	26	390,2	30,50

Calciumchlorid

Spez. Gewicht	°Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% $CaCl_2$	Gramm pro Liter	% $CaCl_2 . 6H_2O$
1,0148	2,1	20,30	2	40,06	3,948
1,0316	4,4	41,26	4	81,46	7,896
1,0486	6,7	62,92	6	124,2	11,84
1,0659	9,0	85,27	8	168,3	15,79
1,0835	11,2	108,4	10	213,9	19,74
1,1015	13,4	132,2	12	260,9	23,69
1,1198	15,5	156,8	14	309,5	27,64
1,1386	17,7	182,2	16	359,6	31,58
1,1578	19,8	208,4	18	411,4	35,53
1,1775	21,9	235,5	20	465,9	39,48
1,2284	27,0	307,1	25	606,2	49,35
1,2816	31,9	384,5	30	759,0	59,22
1,3373	36,6	468,1	35	923,9	69,09
1,3957	41,1	558,3	40	1102,0	78,96

Natriumchlorid

Spez. Gewicht	°Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% NaCl
1,0053	0,8	10,05	1
1,0125	1,8	20,25	2
1,0268	3,8	41,07	4
1,0413	5,8	62,48	6
1,0559	7,7	84,47	8
1,0707	9,6	107,1	10
1,0857	11,5	130,3	12
1,1009	13,3	154,1	14
1,1162	15,1	178,6	16
1,1319	16,9	203,7	18
1,1478	18,7	229,6	20
1,1640	20,4	256,1	22
1,1804	22,2	283,3	24
1,1972	23,9	311,3	26

Natriumsulfat

Spez. Gewicht	°Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% Na_2SO_4	Gramm pro Liter	% $Na_2SO_4 . 10H_2O$
1,0073	1,1	10,07	1	22,85	2,268
1,0164	2,3	20,33	2	46,11	4,536
1,0348	4,9	41,39	4	93,88	9,073
1,0535	7,4	63,21	6	143,4	13,61
1,0724	9,8	85,79	8	194,6	18,15
1,0915	12,2	109,2	10	247,6	22,68
1,1109	14,5	133,3	12	302,4	27,22
1,1306	16,8	158,3	14	359,0	31,75
1,1506	19,0	184,1	16	417,6	36,29
1,1709	21,2	210,8	18	478,1	40,83
1,1915	23,3	238,3	20	540,5	45,36
1,2124	25,4	266,7	22	605,0	49,90
1,2336	27,5	296,1	24	671,5	54,44

Umrechnung von Aräometer- (Hydrometer-) Skalen[1]

m = Dichtegrad der Aräometerskalen
ϱ = Dichte
T = Normaltemperatur der Aräometerskalen

Skala	T °C	$\varrho > 1$	$\varrho < 1$
Balling	17,5	$\varrho = \frac{200}{200-m}$	$\varrho = \frac{200}{200+m}$
Baumé (rationell) (in Deutschland gebräuchlich)	15	$\varrho = \frac{144{,}3}{144{,}3-m}$	$\varrho = \frac{144{,}3}{144{,}3+m}$
Baumé (National Bureau of Standards)[2] (in Amerika gebräuchlich)	15,56 (60 °F)	$\varrho = \frac{145}{145-m}$	$\varrho = \frac{140}{130+m}$
Baumé (Holland)	12,5	$\varrho = \frac{144}{144-m}$	$\varrho = \frac{144}{145+m}$
Baumé (Gerlach)	17,5	$\varrho = \frac{146{,}3}{146{,}3-m}$	$\varrho = \frac{146{,}3}{146{,}3+m}$
Beck	12,5	$\varrho = \frac{170}{170-m}$	$\varrho = \frac{170}{170+m}$
Brix	15,625	$\varrho = \frac{400}{400-m}$	$\varrho = \frac{400}{400+m}$
Cartier	12,5	$\varrho = \frac{136{,}8}{126{,}1-m}$	$\varrho = \frac{136{,}8}{126{,}1+m}$
Stoppani	15,625	$\varrho = \frac{166}{166-m}$	$\varrho = \frac{166}{166+m}$
Twaddell[2] (England)	15,56 (60 °F)	$\varrho = 1 + \frac{m}{200}$	nicht gebräuchlich

Dichte größer als 1

Dichte	°Baumé (NBS-Skala)	Twaddell	Dichte	°Baumé (NBS-Skala)	Twaddell	Dichte	°Baumé (NBS-Skala)	Twaddell
1,00	0,00	0	1,35	37,59	70	1,70	59,71	140
1,01	1,44	2	1,36	38,38	72	1,71	60,20	142
1,02	2,84	4	1,37	39,16	74	1,72	60,70	144
1,03	4,22	6	1,38	39,93	76	1,73	61,18	146
1,04	5,58	8	1,39	40,68	78	1,74	61,67	148
1,05	6,91	10	1,40	41,43	80	1,75	62,14	150
1,06	8,21	12	1,41	42,16	82	1,76	62,61	152
1,07	9,49	14	1,42	42,89	84	1,77	63,08	154
1,08	10,74	16	1,43	43,60	86	1,78	63,54	156
1,09	11,97	18	1,44	44,31	88	1,79	63,99	158
1,10	13,18	20	1,45	45,00	90	1,80	64,44	160
1,11	14,37	22	1,46	45,68	92	1,81	64,89	162
1,12	15,54	24	1,47	46,36	94	1,82	65,31	164
1,13	16,68	26	1,48	47,03	96	1,83	65,77	166
1,14	17,81	28	1,49	47,68	98	1,84	66,20	168
1,15	18,91	30	1,50	48,33	100	1,85	66,62	170
1,16	20,00	32	1,51	48,97	102	1,86	67,04	172
1,17	21,07	34	1,52	49,60	104	1,87	67,46	174
1,18	22,12	36	1,53	50,23	106	1,88	67,87	176
1,19	23,15	38	1,54	50,84	108	1,89	68,28	178
1,20	24,17	40	1,55	51,45	110	1,90	68,68	180
1,21	25,16	42	1,56	52,05	112	1,91	69,08	182
1,22	26,15	44	1,57	52,64	114	1,92	69,48	184
1,23	27,11	46	1,58	53,23	116	1,93	69,87	186
1,24	28,06	48	1,59	53,80	118	1,94	70,26	188
1,25	29,00	50	1,60	54,38	120	1,95	70,64	190
1,26	29,92	52	1,61	54,94	122	1,96	71,02	192
1,27	30,83	54	1,62	55,49	124	1,97	71,40	194
1,28	31,72	56	1,63	56,04	126	1,98	71,77	196
1,29	32,60	58	1,64	56,58	128	1,99	72,14	198
1,30	33,46	60	1,65	57,12	130	2,00	72,50	200
1,31	34,31	62	1,66	57,65	132			
1,32	35,15	64	1,67	58,17	134			
1,33	35,98	66	1,68	58,69	136			
1,34	36,79	68	1,69	59,20	138			

1) Nach Lange, N. A. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry*, Sandusky (1956); und Hodgman et al. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry and Physics, 1958/59*, 40. Aufl., Cleveland (1958). 2) Siehe nebenstehende Tabelle.

Natriumhydroxyd $\left(\frac{20°}{4°}\text{C}\right)$

Spez. Gewicht	° Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% NaOH	Spez. Gewicht	° Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% NaOH
1,0095	1,4	10,10	1	1,2411	28,2	273,0	22
1,0207	2,9	20,41	2	1,2629	30,2	303,1	24
1,0318	4,5	30,95	3	1,2848	32,1	334,0	26
1,0428	6,0	41,71	4	1,3064	34,0	365,8	28
1,0538	7,4	52,69	5	1,3279	35,8	398,4	30
1,0648	8,8	63,89	6	1,3490	37,5	431,7	32
1,0758	10,2	75,31	7	1,3696	39,1	465,7	34
1,0869	11,6	86,95	8	1,3900	40,7	500,4	36
1,0979	12,9	98,81	9	1,4101	42,2	535,8	38
1,1089	14,2	110,9	10	1,4300	43,6	572,0	40
1,1309	16,8	135,7	12	1,4494	45,0	608,7	42
1,1530	19,2	161,4	14	1,4685	46,3	646,1	44
1,1751	21,6	188,0	16	1,4873	47,5	684,2	46
1,1972	23,9	215,5	18	1,5065	48,8	723,1	48
1,2191	26,1	243,8	20	1,5253	49,9	762,7	50

Ammoniak $\left(\frac{20°}{4°}\text{C}\right)$

Spez. Gewicht	° Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% NH_3
0,9939	10,9	9,939	1
0,9895	11,5	19,79	2
0,9811	12,7	39,24	4
0,9730	13,9	58,38	6
0,9651	15,1	77,21	8
0,9575	16,2	95,75	10
0,9501	17,3	114,0	12
0,9430	18,5	132,0	14
0,9362	19,5	149,8	16
0,9295	20,6	167,3	18
0,9229	21,7	184,6	20
0,9164	22,8	201,6	22
0,9101	23,8	218,4	24
0,9040	24,9	235,0	26
0,8980	25,9	251,4	28
0,8920	27,0	267,6	30

Kaliumhydroxyd $\left(\frac{15°}{4°}\text{C}\right)$

Spez. Gewicht	° Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% KOH	Spez. Gewicht	° Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% KOH	Spez. Gewicht	° Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% KOH
1,0083	1,2	10,08	1	1,1984	24,0	251,7	21	1,4103	42,2	578,2	41
1,0175	2,5	20,35	2	1,2083	25,0	265,8	22	1,4215	43,0	597,0	42
1,0267	3,8	30,80	3	1,2184	26,0	280,2	23	1,4329	43,8	616,1	43
1,0359	5,0	41,44	4	1,2285	27,0	294,8	24	1,4443	44,6	635,5	44
1,0452	6,3	52,26	5	1,2387	27,9	309,7	25	1,4558	45,4	655,1	45
1,0544	7,5	63,26	6	1,2489	28,9	324,7	26	1,4673	46,2	675,0	46
1,0637	8,7	74,46	7	1,2592	29,8	340,0	27	1,4790	47,0	695,1	47
1,0730	9,9	85,84	8	1,2695	30,8	355,5	28	1,4907	47,7	715,5	48
1,0824	11,0	97,42	9	1,2800	31,7	371,2	29	1,5025	48,5	736,2	49
1,0918	12,2	109,2	10	1,2905	32,6	387,2	30	1,5143	49,2	757,2	50
1,1013	13,3	121,1	11	1,3010	33,6	403,3	31	1,5262	50,0	778,4	51
1,1108	14,5	133,3	12	1,3117	34,5	419,7	32	1,5382	50,7	799,9	52
1,1203	15,6	145,6	13	1,3224	35,4	436,4	33				
1,1299	16,7	158,2	14	1,3331	36,2	453,3	34				
1,1396	17,8	170,9	15	1,3440	37,1	470,4	35				
1,1493	18,8	183,9	16	1,3549	38,0	487,8	36				
1,1590	19,9	197,0	17	1,3659	38,8	505,4	37				
1,1688	20,9	210,4	18	1,3769	39,7	523,2	38				
1,1786	22,0	223,9	19	1,3879	40,5	541,3	39				
1,1884	23,0	237,7	20	1,3991	41,4	559,6	40				

Saccharose (Rohrzucker) $\left(\frac{20°}{4°}\text{C}\right)$

Spez. Gewicht	° Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% $C_{12}H_{22}O_{11}$	Spez. Gewicht	° Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% $C_{12}H_{22}O_{11}$	Spez. Gewicht	° Baumé (NBS-Skala)	Gramm pro Liter	% $C_{12}H_{22}O_{11}$
0,9982	...	.....	0	1,1270	16,3	338,1	30	1,2865	32,3	771,9	60
1,0021	0,3	10,02	1	1,1318	16,9	350,8	31	1,2924	32,8	788,3	61
1,0060	0,9	20,12	2	1,1366	17,5	363,7	32	1,2983	33,3	804,9	62
1,0099	1,4	30,30	3	1,1415	18,0	376,7	33	1,3043	33,8	821,7	63
1,0139	2,0	40,56	4	1,1463	18,6	389,8	34	1,3103	34,3	838,6	64
1,0179	2,5	50,89	5	1,1513	19,1	402,9	35	1,3163	34,8	855,6	65
1,0219	3,1	61,31	6	1,1562	19,6	416,2	36	1,3224	35,4	872,8	66
1,0259	3,6	71,81	7	1,1612	20,1	429,7	37	1,3286	35,9	890,1	67
1,0299	4,1	82,40	8	1,1663	20,7	443,2	38	1,3347	36,4	907,6	68
1,0340	4,7	93,06	9	1,1713	21,2	456,8	39	1,3409	36,9	925,2	69
1,0381	5,3	103,8	10	1,1764	21,7	470,6	40	1,3472	37,4	943,0	70
1,0423	5,8	114,7	11	1,1816	22,3	484,5	41	1,3535	37,9	961,0	71
1,0465	6,4	125,6	12	1,1868	22,8	498,4	42	1,3598	38,4	979,0	72
1,0507	7,0	136,6	13	1,1920	23,3	512,6	43	1,3661	38,9	997,3	73
1,0549	7,5	147,7	14	1,1972	23,9	526,8	44	1,3725	39,4	1016	74
1,0592	8,1	158,9	15	1,2025	24,4	541,1	45	1,3790	39,9	1034	75
1,0635	8,7	170,2	16	1,2079	25,0	555,6	46	1,3854	40,4	1053	76
1,0678	9,2	181,5	17	1,2132	25,5	570,2	47	1,3920	40,9	1072	77
1,0721	9,8	193,0	18	1,2186	26,0	584,9	48	1,3985	41,4	1091	78
1,0765	10,3	204,5	19	1,2241	26,5	599,8	49	1,4051	41,8	1110	79
1,0810	10,8	216,2	20	1,2296	27,1	614,8	50	1,4117	42,2	1129	80
1,0854	11,4	227,9	21	1,2351	27,6	629,9	51	1,4184	42,7	1149	81
1,0899	12,0	239,8	22	1,2406	28,1	645,1	52	1,4251	43,2	1169	82
1,0944	12,5	251,7	23	1,2462	28,7	660,5	53	1,4318	43,7	1188	83
1,0990	13,1	263,8	24	1,2519	29,2	676,0	54	1,4386	44,2	1208	84
1,1036	13,6	275,9	25	1,2575	29,7	691,6	55	1,4454	44,7	1229	85
1,1082	14,2	288,1	26	1,2632	30,3	707,4	56	1,4522	45,2	1249	86
1,1128	14,7	300,5	27	1,2690	30,8	723,3	57	1,4591	45,6	1269	87
1,1175	15,3	312,9	28	1,2748	31,3	739,4	58	1,4660	46,1	1290	88
1,1222	15,8	325,4	29	1,2806	31,8	755,6	59	1,4730	46,6	1311	89

1) Nach LANGE, N. A. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry*, Sandusky (1956); und HODGMAN et al. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry and Physics, 1958/59*, 40. Aufl., Cleveland (1958).

Spezifische Gewichte von wässerigen Lösungen[1]

Glycerin $\left(\frac{20°}{4°}\mathrm{C}\right)$

Spez. Gewicht	°Baumé	Gramm pro Liter	% $C_3H_8O_3$	Spez. Gewicht	°Baumé	Gramm pro Liter	% $C_3H_8O_3$	Spez. Gewicht	°Baumé	Gramm pro Liter	% $C_3H_8O_3$
				1,08600	11,5	380,1	35	1,18125	22,2	826,6	70
1,00060	0,1	10,01	1	1,08865	11,8	391,9	36	1,18395	22,5	840,4	71
1,00300	0,4	20,06	2	1,09135	12,1	403,8	37	1,18670	22,8	854,1	72
1,00540	0,8	30,16	3	1,09400	12,5	415,8	38	1,18940	23,1	868,0	73
1,00780	1,1	40,31	4	1,09665	12,8	427,8	39	1,19215	23,3	881,9	74
1,01015	1,5	50,51	5	1,09930	13,1	439,8	40	1,19485	23,6	895,8	75
1,01255	1,8	60,75	6	1,10200	13,4	451,9	41	1,19760	23,9	909,8	76
1,01495	2,1	71,04	7	1,10470	13,8	464,1	42	1,20030	24,2	923,8	77
1,01730	2,5	81,38	8	1,10740	14,1	476,2	43	1,20305	24,4	938,0	78
1,01970	2,8	91,77	9	1,11010	14,4	488,5	44	1,20575	24,7	952,1	79
1,02210	3,1	102,2	10	1,11280	14,7	500,8	45	1,20850	25,0	966,3	80
1,02455	3,5	112,7	11	1,11550	15,0	513,1	46	1,21115	25,2	980,6	81
1,02705	3,8	123,3	12	1,11820	15,3	525,6	47	1,21380	25,5	994,9	82
1,02955	4,1	133,8	13	1,12090	15,6	538,0	48	1,21650	25,8	1009	83
1,03200	4,5	144,5	14	1,12360	16,0	550,6	49	1,21915	26,0	1024	84
1,03450	4,8	155,2	15	1,12630	16,3	563,2	50	1,22180	26,3	1038	85
1,03695	5,2	165,9	16	1,12905	16,6	575,8	51	1,22445	26,5	1053	86
1,03945	5,5	176,7	17	1,13180	16,9	588,5	52	1,22710	26,8	1067	87
1,04195	5,8	187,6	18	1,13455	17,2	601,2	53	1,22975	27,1	1082	88
1,04440	6,2	198,5	19	1,13730	17,5	614,0	54	1,23245	27,3	1096	89
1,04690	6,5	209,4	20	1,14005	17,8	626,9	55	1,23510	27,6	1111	90
1,04950	6,8	220,4	21	1,14280	18,1	639,8	56	1,23770	27,8	1126	91
1,05205	7,2	231,4	22	1,14555	18,4	652,8	57	1,24035	28,1	1141	92
1,05465	7,5	242,5	23	1,14830	18,7	665,8	58	1,24300	28,3	1156	93
1,05720	7,8	253,7	24	1,15105	19,0	678,9	59	1,24560	28,6	1171	94
1,05980	8,2	264,9	25	1,15380	19,3	692,0	60	1,24825	28,8	1186	95
1,06240	8,5	276,2	26	1,15655	19,6	705,2	61	1,25080	29,1	1201	96
1,06495	8,8	287,5	27	1,15930	19,9	718,4	62	1,25335	29,3	1216	97
1,06755	9,2	298,9	28	1,16205	20,2	731,7	63	1,25590	29,5	1231	98
1,07010	9,5	310,3	29	1,16475	20,5	745,1	64	1,25850	29,8	1246	99
1,07270	9,8	321,8	30	1,16750	20,8	758,6	65	1,26108	30,0	1261	100
1,07535	10,2	333,3	31	1,17025	21,0	772,0	66				
1,07800	10,5	345,0	32	1,17300	21,3	785,5	67				
1,08070	10,8	356,6	33	1,17575	21,6	799,1	68				
1,08335	11,2	368,3	34	1,17850	21,9	812,8	69				

Äthylalkohol $\left(\frac{15{,}56°}{15{,}56°}\mathrm{C}\right)$

Spez. Gewicht	Vol.%	Gew.%	Gramm pro 100 ml	Spez. Gewicht	Vol.%	Gew.%	Gramm pro 100 ml	Spez. Gewicht	Vol.%	Gew.%	Gramm pro 100 ml
1,00000	0,00	0,00	0,00	0,99487	3,50	2,80	2,78	0,99021	7,00	5,61	5,56
0,99984	0,10	0,08	0,08	0,99473	3,60	2,88	2,86	0,99009	7,10	5,69	5,64
0,99968	0,20	0,16	0,16	0,99459	3,70	2,96	2,94	0,98996	7,20	5,77	5,72
0,99953	0,30	0,24	0,24	0,99445	3,80	3,04	3,02	0,98984	7,30	5,86	5,80
0,99937	0,40	0,32	0,32	0,99431	3,90	3,12	3,10	0,98971	7,40	5,94	5,88
0,99923	0,50	0,40	0,40	0,99417	4,00	3,20	3,18	0,98959	7,50	6,02	5,96
0,99907	0,60	0,48	0,48	0,99403	4,10	3,28	3,26	0,98947	7,60	6,10	6,04
0,99892	0,70	0,56	0,56	0,99390	4,20	3,36	3,34	0,98934	7,70	6,18	6,11
0,99877	0,80	0,64	0,64	0,99376	4,30	3,44	3,42	0,98922	7,80	6,26	6,19
0,99861	0,90	0,71	0,71	0,99363	4,40	3,52	3,50	0,98909	7,90	6,34	6,27
0,99849	1,00	0,79	0,79	0,99349	4,50	3,60	3,58	0,98897	8,00	6,42	6,35
0,99834	1,10	0,87	0,87	0,99335	4,60	3,68	3,66	0,98885	8,10	6,50	6,43
0,99819	1,20	0,95	0,95	0,99322	4,70	3,76	3,74	0,98873	8,20	6,58	6,51
0,99805	1,30	1,03	1,03	0,99308	4,80	3,84	3,81	0,98861	8,30	6,67	6,59
0,99790	1,40	1,11	1,11	0,99295	4,90	3,92	3,89	0,98849	8,40	6,75	6,67
0,99775	1,50	1,19	1,19	0,99281	5,00	4,00	3,97	0,98837	8,50	6,83	6,75
0,99760	1,60	1,27	1,27	0,99268	5,10	4,08	4,05	0,98825	8,60	6,91	6,83
0,99745	1,70	1,35	1,35	0,99255	5,20	4,16	4,13	0,98813	8,70	6,99	6,91
0,99731	1,80	1,43	1,43	0,99241	5,30	4,24	4,21	0,98801	8,80	7,07	6,99
0,99716	1,90	1,51	1,51	0,99228	5,40	4,32	4,29	0,98789	8,90	7,15	7,07
0,99701	2,00	1,59	1,59	0,99215	5,50	4,40	4,37	0,98777	9,00	7,23	7,14
0,99687	2,10	1,67	1,66	0,99202	5,60	4,48	4,44	0,98765	9,10	7,31	7,22
0,99672	2,20	1,75	1,74	0,99189	5,70	4,56	4,52	0,98754	9,20	7,39	7,30
0,99658	2,30	1,83	1,82	0,99175	5,80	4,64	4,60	0,98742	9,30	7,48	7,38
0,99643	2,40	1,91	1,90	0,99162	5,90	4,72	4,68	0,98730	9,40	7,56	7,46
0,99629	2,50	1,99	1,98	0,99149	6,00	4,80	4,76	0,98719	9,50	7,64	7,54
0,99615	2,60	2,07	2,06	0,99136	6,10	4,88	4,84	0,98707	9,60	7,72	7,62
0,99600	2,70	2,15	2,14	0,99123	6,20	4,96	4,92	0,98695	9,70	7,80	7,70
0,99586	2,80	2,23	2,22	0,99111	6,30	5,05	5,00	0,98683	9,80	7,88	7,78
0,99571	2,90	2,31	2,30	0,99098	6,40	5,13	5,08	0,98672	9,90	7,96	7,85
0,99557	3,00	2,39	2,38	0,99085	6,50	5,21	5,16	0,98660	10,00	8,04	7,93
0,99543	3,10	2,47	2,46	0,99072	6,60	5,29	5,24	0,98649	10,10	8,12	8,01
0,99529	3,20	2,55	2,54	0,99059	6,70	5,37	5,32	0,98637	10,20	8,20	8,09
0,99515	3,30	2,64	2,62	0,99047	6,80	5,45	5,40	0,98626	10,30	8,29	8,17
0,99501	3,40	2,72	2,70	0,99034	6,90	5,53	5,48	0,98614	10,40	8,37	8,25

1) Nach LANGE, N. A. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry*, Sandusky (1956); und HODGMAN et al. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry and Physics, 1958/59*, 40. Aufl., Cleveland (1958).

Äthylalkohol $\left(\frac{15{,}56°}{15{,}56°}\,C\right)$ (Fortsetzung)

Spez. Gewicht	Vol.%	Gew.%	Gramm pro 100 ml	Spez. Gewicht	Vol.%	Gew.%	Gramm pro 100 ml	Spez. Gewicht	Vol.%	Gew.%	Gramm pro 100 ml
0,98603	10,50	8,45	8,33	0,97808	18,00	14,60	14,28	0,97044	25,50	20,85	20,24
0,98592	10,60	8,53	8,41	0,97798	18,10	14,68	14,36	0,97033	25,60	20,93	20,32
0,98580	10,70	8,61	8,49	0,97788	18,20	14,77	14,44	0,97023	25,70	21,02	20,40
0,98569	10,80	8,70	8,57	0,97778	18,30	14,85	14,52	0,97012	25,80	21,10	20,47
0,98557	10,90	8,78	8,65	0,97768	18,40	14,94	14,60	0,97001	25,90	21,19	20,55
0,98546	11,00	8,86	8,73	0,97758	18,50	15,02	14,68	0,96991	26,00	21,27	20,63
0,98535	11,10	8,94	8,81	0,97748	18,60	15,10	14,76	0,96980	26,10	21,35	20,71
0,98524	11,20	9,02	8,89	0,97738	18,70	15,18	14,84	0,96969	26,20	21,44	20,79
0,98513	11,30	9,11	8,97	0,97728	18,80	15,27	14,92	0,96959	26,30	21,52	20,87
0,98502	11,40	9,19	9,05	0,97718	18,90	15,38	15,00	0,96949	26,40	21,61	20,95
0,98491	11,50	9,27	9,13	0,97708	19,00	15,43	15,08	0,96937	26,50	21,69	21,03
0,98479	11,60	9,35	9,21	0,97698	19,10	15,51	15,15	0,96926	26,60	21,77	21,11
0,98468	11,70	9,43	9,29	0,97688	19,20	15,59	15,23	0,96915	26,70	21,86	21,19
0,98457	11,80	9,51	9,36	0,97678	19,30	15,68	15,31	0,96905	26,80	21,94	21,27
0,98446	11,90	9,59	9,44	0,97668	19,40	15,76	15,39	0,96894	26,90	22,03	21,35
0,98435	12,00	9,67	9,52	0,97658	19,50	15,84	15,47	0,96883	27,00	22,11	21,43
0,98424	12,10	9,75	9,60	0,97648	19,60	15,93	15,55	0,96872	27,10	22,20	21,51
0,98413	12,20	9,83	9,68	0,97638	19,70	16,01	15,63	0,96861	27,20	22,28	21,59
0,98402	12,30	9,92	9,76	0,97628	19,80	16,09	15,71	0,96850	27,30	22,37	21,67
0,98391	12,40	10,00	9,84	0,97618	19,90	16,18	15,79	0,96839	27,40	22,45	21,75
0,98381	12,50	10,08	9,92	0,97608	20,00	16,26	15,87	0,96828	27,50	22,54	21,83
0,98370	12,60	10,16	10,00	0,97598	20,10	16,34	15,95	0,96816	27,60	22,62	21,90
0,98359	12,70	10,24	10,07	0,97588	20,20	16,42	16,03	0,96805	27,70	22,71	21,98
0,98348	12,80	10,33	10,15	0,97578	20,30	16,51	16,10	0,96794	27,80	22,79	22,06
0,98337	12,90	10,41	10,23	0,97568	20,40	16,59	16,18	0,96783	27,90	22,88	22,14
0,98326	13,00	10,49	10,31	0,97558	20,50	16,67	16,26	0,96772	28,00	22,96	22,22
0,98315	13,10	10,57	10,39	0,97547	20,60	16,75	16,34	0,96761	28,10	23,04	22,30
0,98305	13,20	10,65	10,47	0,97537	20,70	16,84	16,42	0,96749	28,20	23,13	22,38
0,98294	13,30	10,74	10,55	0,97527	20,80	16,92	16,50	0,96738	28,30	23,21	22,45
0,98283	13,40	10,82	10,63	0,97517	20,90	17,01	16,58	0,96726	28,40	23,30	22,53
0,98273	13,50	10,90	10,71	0,97507	21,00	17,09	16,66	0,96715	28,50	23,38	22,61
0,98262	13,60	10,98	10,79	0,97497	21,10	17,17	16,74	0,96704	28,60	23,47	22,69
0,98251	13,70	11,06	10,87	0,97487	21,20	17,26	16,82	0,96692	28,70	23,55	22,77
0,98240	13,80	11,15	10,95	0,97477	21,30	17,34	16,90	0,96681	28,80	23,64	22,85
0,98230	13,90	11,23	11,03	0,97467	21,40	17,43	16,98	0,96669	28,90	23,72	22,93
0,98219	14,00	11,31	11,11	0,97457	21,50	17,51	17,06	0,96658	29,00	23,81	23,01
0,98209	14,10	11,39	11,19	0,97446	21,60	17,59	17,14	0,96646	29,10	23,89	23,09
0,98198	14,20	11,47	11,27	0,97436	21,70	17,67	17,22	0,96635	29,20	23,98	23,17
0,98188	14,30	11,56	11,35	0,97426	21,80	17,76	17,30	0,96623	29,30	24,06	23,25
0,98177	14,40	11,64	11,43	0,97416	21,90	17,84	17,38	0,96611	29,40	24,15	23,33
0,98167	14,50	11,72	11,51	0,97406	22,00	17,92	17,46	0,96600	29,50	24,23	23,41
0,98156	14,60	11,80	11,59	0,97396	22,10	18,00	17,54	0,96587	29,60	24,32	23,49
0,98146	14,70	11,88	11,67	0,97386	22,20	18,09	17,62	0,96576	29,70	24,40	23,57
0,98135	14,80	11,97	11,75	0,97375	22,30	18,17	17,70	0,96564	29,80	24,49	23,65
0,98125	14,90	12,05	11,82	0,97365	22,40	18,26	17,78	0,96553	29,90	24,57	23,73
0,98114	15,00	12,13	11,90	0,97355	22,50	18,34	17,86	0,96541	30,00	24,66	23,81
0,98104	15,10	12,21	11,98	0,97345	22,60	18,42	17,94	0,96529	30,10	24,74	23,89
0,98093	15,20	12,29	12,06	0,97335	22,70	18,51	18,02	0,96517	30,20	24,83	23,97
0,98083	15,30	12,38	12,14	0,97324	22,80	18,59	18,10	0,96505	30,30	24,91	24,04
0,98073	15,40	12,46	12,22	0,97314	22,90	18,68	18,18	0,96493	30,40	25,00	24,12
0,98063	15,50	12,54	12,30	0,97304	23,00	18,76	18,26	0,96481	30,50	25,08	24,20
0,98052	15,60	12,62	12,37	0,97294	23,10	18,84	18,33	0,96469	30,60	25,17	24,28
0,98042	15,70	12,70	12,45	0,97283	23,20	18,92	18,41	0,96457	30,70	25,25	24,36
0,98032	15,80	12,79	12,53	0,97273	23,30	19,01	18,49	0,96445	30,80	25,34	24,44
0,98021	15,90	12,87	12,61	0,97263	23,40	19,09	18,57	0,96433	30,90	25,42	24,52
0,98011	16,00	12,95	12,69	0,97253	23,50	19,17	18,65	0,96421	31,00	25,51	24,60
0,98001	16,10	13,03	12,77	0,97242	23,60	19,25	18,73	0,96409	31,10	25,60	24,68
0,97991	16,20	13,12	12,85	0,97232	23,70	19,34	18,81	0,96396	31,20	25,68	24,76
0,97980	16,30	13,20	12,93	0,97222	23,80	19,42	18,88	0,96384	31,30	25,77	24,84
0,97970	16,40	13,29	13,01	0,97211	23,90	19,51	18,96	0,96372	31,40	25,85	24,92
0,97960	16,50	13,37	13,09	0,97201	24,00	19,59	19,04	0,96360	31,50	25,94	25,00
0,97950	16,60	13,45	13,17	0,97191	24,10	19,67	19,12	0,96347	31,60	26,03	25,08
0,97940	16,70	13,53	13,25	0,97180	24,20	19,76	19,20	0,96335	31,70	26,11	25,16
0,97929	16,80	13,62	13,33	0,97170	24,30	19,84	19,28	0,96323	31,80	26,20	25,24
0,97917	16,90	13,70	13,41	0,97159	24,40	19,93	19,36	0,96310	31,90	26,28	25,32
0,97909	17,00	13,78	13,49	0,97149	24,50	20,01	19,44	0,96298	32,00	26,37	25,40
0,97899	17,10	13,86	13,57	0,97139	24,60	20,09	19,52	0,96285	32,10	26,46	25,48
0,97889	17,20	13,94	13,65	0,97128	24,70	20,18	19,60	0,96273	32,20	26,54	25,56
0,97879	17,30	14,03	13,73	0,97118	24,80	20,26	19,68	0,96260	32,30	26,63	25,64
0,97869	17,40	14,11	13,81	0,97107	24,90	20,35	19,76	0,96248	32,40	26,71	25,71
0,97859	17,50	14,19	13,89	0,97097	25,00	20,43	19,84	0,96235	32,50	26,80	25,79
0,97848	17,60	14,27	13,96	0,97086	25,10	20,51	19,92	0,96222	32,60	26,89	25,87
0,97838	17,70	14,35	14,04	0,97076	25,20	20,60	20,00	0,96210	32,70	26,97	25,95
0,97828	17,80	14,44	14,12	0,97065	25,30	20,68	20,08	0,96197	32,80	27,06	26,03
0,97818	17,90	14,52	14,20	0,97055	25,40	20,77	20,16	0,96185	32,90	27,14	26,11

1) Nach LANGE, N. A. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry*, Sandusky (1956); und HODGMAN et al. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry and Physics, 1958/59*, 40. Aufl., Cleveland (1958).

Äthylalkohol $\left(\frac{15{,}56°}{15{,}56°}\text{C}\right)$ (Schluß)

Spez. Gewicht	Vol.%	Gew.%	Gramm pro 100 ml	Spez. Gewicht	Vol.%	Gew.%	Gramm pro 100 ml	Spez. Gewicht	Vol.%	Gew.%	Gramm pro 100 ml
0,96172	33,00	27,23	26,19	0,95107	40,50	33,79	32,14	0,93824	48,00	40,60	38,09
0,96159	33,10	27,32	26,27	0,95091	40,60	33,88	32,22	0,93805	48,10	40,69	38,17
0,96146	33,20	27,40	26,35	0,95075	40,70	33,97	32,30	0,93786	48,20	40,78	38,25
0,96133	33,30	27,49	26,43	0,95059	40,80	34,06	32,38	0,93768	48,30	40,88	38,33
0,96120	33,40	27,57	26,51	0,95044	40,90	34,15	32,46	0,93749	48,40	40,97	38,41
0,96108	33,50	27,66	26,59	0,95028	41,00	34,24	32,54	0,93730	48,50	41,06	38,49
0,96095	33,60	27,75	26,67	0,95012	41,10	34,33	32,62	0,93711	48,60	41,15	38,57
0,96082	33,70	27,83	26,75	0,94996	41,20	34,42	32,70	0,93692	48,70	41,24	38,65
0,96069	33,80	27,92	26,82	0,94980	41,30	34,50	32,78	0,93679	48,80	41,34	38,72
0,96056	33,90	28,00	26,90	0,94964	41,40	34,59	32,86	0,93655	48,90	41,43	38,80
0,96043	34,00	28,09	26,98	0,94948	41,50	34,68	32,93	0,93636	49,00	41,52	38,88
0,96030	34,10	28,18	27,06	0,94932	41,60	34,77	33,01	0,93617	49,10	41,61	38,96
0,96016	34,20	28,26	27,14	0,94916	41,70	34,86	33,09	0,93598	49,20	41,71	39,04
0,96003	34,30	28,35	27,22	0,94900	41,80	34,95	33,17	0,93578	49,30	41,80	39,12
0,95990	34,40	28,43	27,30	0,94884	41,90	35,04	33,25	0,93559	49,40	41,90	39,20
0,95977	34,50	28,52	27,38	0,94868	42,00	35,13	33,33	0,93540	49,50	41,99	39,28
0,95963	34,60	28,61	27,46	0,94852	42,10	35,22	33,41	0,93521	49,60	42,08	39,36
0,95950	34,70	28,70	27,54	0,94835	42,20	35,31	33,49	0,93502	49,70	42,18	39,44
0,95937	34,80	28,78	27,62	0,94810	42,30	35,40	33,57	0,93482	49,80	42,27	39,52
0,95923	34,90	28,87	27,70	0,94802	42,40	35,49	33,65	0,93463	49,90	42,37	39,60
0,95910	35,00	28,96	27,78	0,94786	42,50	35,58	33,73	0,9344	50,00	42,47	39,69
0,95896	35,10	29,05	27,86	0,94770	42,60	35,67	33,81	0,9325	51,00	43,41	40,48
0,95883	35,20	29,13	27,94	0,94753	42,70	35,76	33,89	0,9305	52,00	44,35	41,27
0,95869	35,30	29,22	28,02	0,94737	42,80	35,85	33,97	0,9285	53,00	45,31	42,07
0,95855	35,40	29,30	28,09	0,94720	42,90	35,94	34,04	0,9264	54,00	46,27	42,86
0,95842	35,50	29,38	28,17	0,94704	43,00	36,03	34,12	0,9244	55,00	47,23	43,66
0,95828	35,60	29,48	28,25	0,94687	43,10	36,12	34,20	0,9222	56,00	48,20	44,45
0,95814	35,70	29,57	28,33	0,94670	43,20	36,21	34,28	0,9201	57,00	49,18	45,23
0,95800	35,80	29,65	28,41	0,94654	43,30	36,30	34,36	0,9180	58,00	50,16	46,04
0,95787	35,90	29,74	28,49	0,94637	43,40	36,39	34,44	0,9158	59,00	51,15	46,83
0,95773	36,00	29,83	28,57	0,94620	43,50	36,48	34,52	0,9136	60,00	52,16	47,63
0,95759	36,10	29,92	28,65	0,94603	43,60	36,57	34,60	0,9113	61,00	53,15	48,41
0,95745	36,20	30,00	28,73	0,94586	43,70	36,66	34,68	0,9091	62,00	54,16	49,21
0,95731	36,30	30,09	28,81	0,94570	43,80	36,75	34,76	0,9068	63,00	55,16	50,00
0,95717	36,40	30,17	28,88	0,94553	43,90	36,84	34,84	0,9044	64,00	56,18	50,80
0,95703	36,50	30,26	28,96	0,94536	44,00	36,93	34,91	0,9021	65,00	57,21	51,59
0,95688	36,60	30,35	29,04	0,94519	44,10	37,02	34,99	0,8997	66,00	58,24	52,39
0,95674	36,70	30,44	29,12	0,94502	44,20	37,11	35,07	0,8974	67,00	59,28	53,19
0,95660	36,80	30,52	29,20	0,94484	44,30	37,21	35,15	0,8949	68,00	60,33	53,98
0,95646	36,90	30,61	29,29	0,94467	44,40	37,30	35,23	0,8925	69,00	61,39	54,77
0,95632	37,00	30,70	29,36	0,94450	44,50	37,39	35,31	0,8900	70,00	62,45	55,56
0,95618	37,10	30,79	29,44	0,94433	44,60	37,48	35,39	0,8876	71,00	63,51	56,36
0,95603	37,20	30,88	29,52	0,94416	44,70	37,57	35,47	0,8850	72,00	64,59	57,16
0,95589	37,30	30,96	29,60	0,94398	44,80	37,66	35,55	0,8825	73,00	65,67	57,95
0,95574	37,40	31,05	29,68	0,94381	44,90	37,76	35,63	0,8799	74,00	66,76	58,74
0,95560	37,50	31,14	29,76	0,94364	45,00	37,84	35,71	0,8773	75,00	67,84	59,53
0,95545	37,60	31,23	29,84	0,94346	45,10	37,93	35,79	0,8747	76,00	68,99	60,33
0,95531	37,70	31,32	29,92	0,94329	45,20	38,02	35,87	0,8721	77,00	70,10	61,12
0,95516	37,80	31,40	30,00	0,94311	45,30	38,12	35,95	0,8694	78,00	71,25	61,91
0,95502	37,90	31,49	30,08	0,94294	45,40	38,21	36,03	0,8667	79,00	72,38	62,71
0,95487	38,00	31,58	30,16	0,94276	45,50	38,30	36,11	0,8639	80,00	73,54	63,51
0,95472	38,10	31,67	30,24	0,94258	45,60	38,39	36,19	0,8611	81,00	74,68	64,30
0,95457	38,20	31,76	30,32	0,94241	45,70	38,48	36,26	0,8583	82,00	75,82	65,09
0,95442	38,30	31,85	30,40	0,94223	45,80	38,57	36,34	0,8554	83,00	77,00	65,89
0,95427	38,40	31,94	30,48	0,94206	45,90	38,66	36,42	0,8525	84,00	78,18	66,68
0,95413	38,50	32,03	30,56	0,94188	46,00	38,75	36,50	0,8496	85,00	79,40	67,47
0,95398	38,60	32,12	30,64	0,94170	46,10	38,84	36,58	0,8465	86,00	80,62	68,27
0,95383	38,70	32,20	30,72	0,94152	46,20	38,93	36,66	0,8435	87,00	81,85	69,06
0,95368	38,80	32,29	30,79	0,94134	46,30	39,03	36,74	0,8404	88,00	83,11	69,86
0,95353	38,90	32,37	30,87	0,94116	46,40	39,12	36,82	0,8372	89,00	84,38	70,65
0,95338	39,00	32,46	30,95	0,94098	46,50	39,21	36,90	0,8339	90,00	85,66	71,44
0,95323	39,10	32,55	31,03	0,94080	46,60	39,30	36,98	0,8306	91,00	86,97	72,23
0,95307	39,20	32,64	31,11	0,94062	46,70	39,39	37,06	0,8272	92,00	88,29	73,03
0,95292	39,30	32,72	31,18	0,94044	46,80	39,49	37,13	0,8236	93,00	89,61	73,82
0,95277	39,40	32,81	31,26	0,94026	46,90	39,58	37,21	0,8199	94,00	91,00	74,62
0,95262	39,50	32,90	31,34	0,94008	47,00	39,67	37,29	0,8161	95,00	92,41	75,41
0,95246	39,60	32,99	31,42	0,93990	47,10	39,76	37,37	0,8121	96,00	93,82	76,21
0,95231	39,70	33,08	31,50	0,93971	47,20	39,85	37,45	0,8079	97,00	95,29	77,01
0,95216	39,80	33,17	31,58	0,93953	47,30	39,95	37,53	0,8035	98,00	96,78	77,79
0,95200	39,90	33,27	31,66	0,93934	47,40	40,04	37,61	0,7989	99,00	98,37	78,59
0,95185	40,00	33,35	31,74	0,93916	47,50	40,13	37,69	0,7939	100,00	100,00	79,39
0,95169	40,10	33,44	31,82	0,93898	47,60	40,22	37,77				
0,95154	40,20	33,53	31,90	0,93879	47,70	40,32	37,85				
0,95138	40,30	33,61	31,98	0,93861	47,80	40,41	37,93				
0,95122	40,40	33,70	32,06	0,93842	47,90	40,51	38,01				

1) Nach LANGE, N. A. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry*, Sandusky (1956); und HODGMAN et al. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry and Physics, 1958/59*, 40. Aufl., Cleveland (1958).

Bei den höher entwickelten Organismen sind alle Lebensabläufe an das interne wässerige Milieu gebunden, dessen chemische und physikalische Eigenschaften mit höchster Präzision konstant gehalten werden. Die Kenntnis einiger Eigenschaften wässeriger Lösungen ist deshalb für den Mediziner zum Verständnis des Wasser- und Elektrolythaushaltes und zu dessen klinischer Beeinflussung unter pathologischen Umständen unentbehrlich.

Die physikalische Chemie hat heute einen hohen Stand erreicht, aber gerade auf dem Gebiete der wässerigen Lösungen bestehen noch erhebliche Lücken. Lösungen mit einer molaren Konzentration bis zu etwa 0,01 mol/kg Wasser lassen sich heute mit großer Genauigkeit berechnen. Bei höheren Konzentrationen ist die Zuziehung empirischer Korrekturfaktoren notwendig, um die auf Grund der Theorie durchgeführten Berechnungen auf die Realität abzustimmen. Für die Praxis in Biologie und Medizin ist das aber unerheblich, da die von der Theorie zur Verfügung gestellten Näherungsformeln für die meisten praktischen Belange durchaus genügen.

Die folgenden Ausführungen sind vor allem als Ergänzung zu den Tafeln auf S. 290–299 sowie zum Abschnitt «Wasser- und Elektrolythaushalt» gedacht.

Definition des Moleküls

Eine zentrale Stellung bei der Behandlung der Eigenschaften wässeriger Lösungen kommt dem Begriff des Moleküls und den damit zusammenhängenden chemischen Maßeinheiten zu.

Unter einem Molekül (vom lateinischen *molecula*, kleine Masse) ist der kleinste Teil einer chemisch homogenen Substanz zu verstehen, der noch alle Eigenschaften der Substanz besitzt und in freiem Zustande in der ins Auge gefaßten Phase (Gas, fest, flüssig, in Lösung) existieren kann. Diese Definition ist scharf von jener des Atoms zu unterscheiden, das den kleinsten Teil eines Elementes darstellt, der mit einem anderen Element in Verbindung treten kann.

Der Begriff Molekül umfaßt somit auch Atome einzelner Elemente, nämlich jene, die in freiem Zustande existieren können, zum Beispiel von Edelgasen, aber auch anderer Elemente (wie ein Element sich in freiem Zustande präsentiert, vgl. S. 209–228). Auch die Ionen eines gelösten Salzes, ob ein- oder mehratomig, sind als Moleküle aufzufassen, da sie in dieser Phase weitgehend für sich selbst bestehen. Man kann demnach im korrektesten Sinne von ein- und mehratomigen Molekülen und von molekularen und nichtmolekularen Atomen sprechen.

Maßeinheiten

Das Mol. Die Maßeinheit für Moleküle ist das Mol (internationales Symbol: mol). Es ist definiert als die *Masse* von $6{,}023 \times 10^{23}$ Molekülen *, wird vielfach aber auch in der Definition einer Mengeneinheit verwendet. In diesem Falle ist es die *Anzahl* von $6{,}023 \times 10^{23}$ Molekülen. Die Tendenz in der physikalischen Chemie geht heute dahin, das Mol wie in der Physik als Masseneinheit zu gebrauchen, die Mengeneinheit stellt in diesem Falle die *Molzahl* N dar, zum Beispiel 1 mol, 2 mol, 3 mol, $N = 1, 2, 3$ usw.

Die Verbindung zwischen der individuellen** chemischen Masseneinheit Mol und der allgemeinen physikalischen Masseneinheit Gramm bildet das Molekulargewicht bzw. bei einatomigen Molekülen das Atomgewicht:

$$1\ \text{mol} = \frac{\text{Molekulargewicht}}{(\text{Atomgewicht})} \times \text{Gramm} \qquad (1)$$

Die Molekulargewichte werden auf Grund der Bruttoformel durch Addition der Atomgewichte erhalten (Atomgewichte siehe S. 209–228). Molekulargewichte einiger medizinisch wichtiger Substanzen siehe S. 274 und 292.

Das Grammatom. Für Atome und einatomige Ionen in der obigen Molekulardefinition steht neben dem Mol auch das Grammatom (Symbol: g-atom) im Gebrauch. Es ist identisch mit dem Mol, aber nur für einatomige Moleküle verwendbar. Da in physiologischen Lösungen in der Regel ein- und mehratomige Moleküle nebeneinander vorkommen, ist die einheitliche Verwendung des Mols vorzuziehen.

Das Osmol. Beim Osmol (Symbol: osm) handelt es sich um eine in der biologisch-medizinischen Literatur häufig verwendete, in der physikalischen Chemie hingegen unbekannte und international nicht anerkannte Einheit, weil es sich zwanglos durch das Mol ersetzen läßt. Es stellt die Masse von $6{,}023 \times 10^{23}$ osmotisch wirksamen Molekülen einer Substanz in wässeriger Lösung dar, ist also nichts anderes als ein auf die Lösungsphase bezogenes Mol. Es unterscheidet sich vom Mol nur dann, wenn es auf die undissoziierte Substanz bezogen wird. Da der Dissoziationsgrad, von vielen Faktoren abhängig, keine Konstante darstellt, ist man gezwungen, das auf die undissoziierte Substanz bezogene Osmol unter der Annahme einer vollständigen Dissoziation zu definieren. In dieser Definition ist

$$1\ \text{osm}_{(\text{undiss. Substanz})} = 1\ \text{mol}_{(\text{undiss. Substanz})} / \nu \qquad (2)$$

wobei ν die Anzahl der Ionen darstellt, in die ein Molekül der undissoziierten Substanz bei vollständiger Dissoziation zerfällt.

Da die Dissoziation nie vollständig ist (scheinbar oder tatsächlich), wird die osmolare Konzentration einer Lösung der rechten Seite der Gleichung (2) nie ganz entsprechen. Das auf undissoziierte Substanzen bezogene Osmol eignet sich deshalb nur für überschlägige Rechnungen, während die osmolare Konzentration einer Lösung ebensogut durch das Mol ausgedrückt werden kann.

Das Grammäquivalent. Stellt das Mol die Masse von $6{,}023 \times 10^{23}$ Molekülen dar, so verkörpert das Grammäquivalent (internationales Symbol: val) *** eine molekulare Ionenmasse mit gesamthaft $6{,}023 \times 10^{23}$ **Valenzen.** Die Definition ist (vgl. auch S. 203):

$$1\ \text{val} = 1\ \text{mol/Wertigkeit} = \frac{\text{Molekulargewicht}}{(\text{Atomgewicht})} \times \text{Gramm/Wertigkeit} \qquad (3)$$

Da bei verschiedenwertigen Ionen je nach der Reaktion, an der sie teilnehmen, die Wertigkeit wechseln kann, differiert bei solchen Ionen auch das Grammäquivalent je nach Reaktion. Wo Zweifel entstehen könnten, ist deshalb in solchen Fällen auch die Reaktion zu nennen, für die das Grammäquivalent berechnet wurde. Bei Substanzen, die in verschiedenen Stufen dissoziieren, wird man gezwungen, den Äquivalentberechnungen eine «Durchschnittswertigkeit» zu unterlegen (vgl. zum Beispiel Phosphor und Serumproteine, S. 294, rechte Spalte).

Das Grammäquivalent ist überall dort unentbehrlich, wo Säure-Basen-Verhältnisse untersucht werden müssen.

Konzentrationsmaße (Bezugsmaße)

Normalität. Mit Normalität (Symbol: n) wird die Konzentration Grammäquivalent je Liter *Lösung* bezeichnet:

$$\text{Normalität} = \text{n} = N \frac{1000}{V} \qquad (4)$$

N = val-Zahl, zum Beispiel 1 val, 2 val, 3 val, $N = 1, 2, 3$ usw.
V = Volumen der Lösung in Milliliter

Auch die Normalität kann je nach der Reaktion bei einzelnen Ionenarten wechseln (vgl. Grammäquivalent). Eine Anzahl 0,1 n-Normallösungen zu titrimetrischen Zwecken ist auf S. 276 zusammengestellt.

Molarität, Molalität. Mit Molarität bzw. Molalität wird die Konzentration Mol je Liter Lösung bzw. Mol je Kilogramm Wasser bezeichnet:

$$\text{Molarität (je Volumeneinheit)}\ c = N \frac{1000}{V} \qquad (5)$$

$$\text{Molalität (je Gewichtseinheit)}\ m = N \frac{1000}{N_0 M_0} \qquad (6)$$

* $6{,}023 \times 10^{23}$ ist die Loschmidtsche Zahl des deutschen, die Avogadrosche Zahl der anderen Sprachgebiete. Sie differiert ein wenig, je nachdem das Mol in der chemischen oder in der physikalischen Atomgewichtsskala gemessen wird (vgl. S. 203 und 206).
** «Individuell», weil die Masse eines Mols, die von Substanz zu Substanz wechselt, «individuell» ist.
*** In den angelsächsischen Ländern verwendet man als Abkürzung die Anfangsbuchstaben von «Equivalent»: Eq, equ. oder equiv.

wobei N = Molzahl der gelösten (undissoziierten) Substanz (an Stelle von N ist bei Mischlösungen $\Sigma N = N_1 + N_2 + N_3 + \cdots$ einzusetzen; m und c sind dann mit Σm und Σc zu bezeichnen), V = Volumen der Lösung in Milliliter, N_0 und M_0 = Molzahl und Molekulargewicht des Wassers ($N_0 M_0$ = Gewicht des Wassers).

Für stark verdünnte Lösungen können Molarität und Molalität einander gleichgesetzt werden, bei höheren Konzentrationen differieren sie um so mehr, je größer das spezifische Volumen der gelösten Substanz(en) ist. Molarität und Molalität des Serums können deshalb nicht miteinander verglichen werden (großes spezifisches Volumen der Proteine) bzw. die üblichen Konzentrationsangaben, wie mg/100 ml Serum usw., müssen zur Errechnung der Molalität irgendeines Serumbestandteiles auf die Konzentration dieses Stoffes in Serumwasser umgerechnet werden.

Diese Umrechnung kann auf Grund des spezifischen Gewichtes oder des Proteingehaltes des Serums vorgenommen werden. Genauer ist die Umrechnung auf Grund des spezifischen Gewichtes. Die entsprechenden Faktoren findet man im Kapitel «Synopsis des Blutes – Spezifisches Gewicht». Auf Grund des Proteingehaltes erfolgt die Umrechnung nach folgender Formel[1]:

$$\text{Wassergehalt des Serums in g/100 ml Serum} = 98{,}40 \text{ minus } 0{,}718 \times \text{Proteingehalt (in g/100 ml Serum)} \quad (7)$$

(Der Raumbedarf der Mineralien und anderer Serumbestandteile ist in dieser Formel bereits berücksichtigt: 98,4 anstatt 100.)

Für die Betrachtung osmotischer Verhältnisse eignet sich die Molalität weit besser als die Molarität, da in erster Näherung nur das Verhältnis Moleküle der gelösten Substanz zu Molekülen des Wassers eine Rolle spielt. Bestimmt man zum Beispiel die molare Konzentration der osmotisch wirksamen Teilchen einer nicht zu konzentrierten Lösung mittels Gefrierpunktserniedrigung, so erhält man eine Molkonzentration, die mit der Molalität praktisch identisch ist.

Beispiel. Die Gefrierpunktserniedrigung des Serums beträgt 0,56 °C, was einer Molalität von 300 mmol entspricht (300 mmol je 1000 g Wasser). Die Molarität eines normalen Serums ist demnach $300 \times 0{,}940 = 282$ mmol/l Serum (Tafel im Kapitel «Synopsis des Blutes – Spezifisches Gewicht», Faktor der Kolonne 4 dividiert durch 1000, spezifisches Gewicht 1,026).

Im folgenden wird nur die Molalität verwendet. Es sei noch darauf hingewiesen, daß selbst von bedeutenden Autoren die wörtliche Unterscheidung zwischen Molarität und Molalität nicht immer getroffen wird; man vergewissere sich deshalb, was der betreffende Autor unter «Molarität» versteht.

Um Konfusionen zu vermeiden, beziehe man Molarität und Molalität immer auf die *undissoziierte* Substanz oder füge im anderen Falle stets eine Spezifikation bei, wie zum Beispiel «die Molalität aller osmotisch wirksamen Teilchen» usw.

Osmolarität, Osmolalität. Mit Osmolarität und Osmolalität werden die Molkonzentrationen aller in einer Lösung osmotisch wirksamen Moleküle bezeichnet. Diese beiden Konzentrationsmaße stellen einen Parallelfall zum Osmol dar, die dortigen Ausführungen gelten auch für sie.

$$\text{Osmolarität (je Volumeneinheit)} = N \frac{1000}{V} \quad (8)$$

$$\text{Osmolalität (je Gewichtseinheit)} = N \frac{1000}{N_0 M_0} \quad (9)$$

wobei N = Osmol der Substanz in Lösung = Mol der osmotisch wirksamen Teilchen der Substanz in Lösung (an Stelle von N ist bei Mischlösungen $\Sigma N = N_1 + N_2 + N_3 + \cdots$ einzusetzen), N_0 und M_0 = Molzahl und Molekulargewicht des Wassers.

Um Verwechslungen zu vermeiden, wird im folgenden die auf Grund der Strukturformel und unter der Annahme einer vollständigen Dissoziation zu erwartende osmotisch wirksame Konzentration einer Substanz oder Substanzmischung mit *idealer* Osmolarität oder Osmolalität bezeichnet. Sie ist gleich $N \times \nu$, wobei ν die Anzahl der Einzelteilchen darstellt, in die ein Molekül der undissoziierten Substanz bei vollständiger Dissoziation zerfällt, und N die *Mol*zahl (nicht Osmol) der nichtdissoziierten Substanz. An Stelle von νN ist bei Mischlösungen $\Sigma \nu N = \nu_1 N_1 + \nu_2 N_2 + \cdots$ einzusetzen.

Umrechnungen. Um sich vor Kommafehlern zu schützen, rechne man nur mit Einheiten der gleichen Dezimale:

mol → val → g → ° C → atm usw.
oder mmol→ mval→ mg→ m° C→ matm usw.

Man rechne auch nur mit den dimensionslosen Einheitenzahlen N; am Schluß der Rechnung wird dann das Ergebnis durch Anhängen der Einheit wieder in eine dimensionsbehaftete Größe umgewandelt.

Im folgenden bedeuten (um Verwechslungen zu vermeiden) N_{mol}, N_{val}, N_{osm}, N_{g} die Einheitenzahlen von Mol, Grammäquivalent usw. Das bei den Umrechnungen in Betracht gezogene Osmol stellt die auf die undissoziierte Substanz bezogene Einheit dar. ν = Anzahl der Teilchen, in die ein Molekül bei vollständiger Dissoziation zerfällt, z = Wertigkeit eines Ions, M = Molekulargewicht.

Gesucht	Gegeben	Umrechnung	
N_{mol}	N_{g}	$N_{\text{mol}} = N_{\text{g}}/M$	(10)
	N_{osm}	$= N_{\text{osm}}/\nu$	(11)
	N_{val}	$= N_{\text{val}}/z$	(12)
N_{val}	N_{g}	$N_{\text{val}} = N_{\text{g}} \times z/M$	(13)
	N_{mol}	$= N_{\text{mol}} \times z$	(14)
	N_{osm}	$= N_{\text{osm}} \times z/\nu$	(15)
N_{osm}	N_{g}	$N_{\text{osm}} = N_{\text{g}}/\nu \times M$	(16)
	N_{mol}	$= N_{\text{mol}} \times \nu$	(17)
	N_{val}	$= N_{\text{val}} \times \nu/z$	(18)
N_{g}	N_{mol}	$N_{\text{g}} = N_{\text{mol}} \times M$	(19)
	N_{val}	$= N_{\text{val}} \times M/z$	(20)
	N_{osm}	$= N_{\text{osm}} \times \nu \times M$	(21)

Diese Umrechnungen gelten auch für Konzentrationen, sofern eine einheitliche Konzentrationsdefinition während der ganzen Rechnung verwendet wird.

Elektrolyte

Als wässerige Elektrolyte bezeichnet man Lösungen von Salzen, Säuren und Basen, die gegenüber reinem Wasser eine erhöhte elektrische Leitfähigkeit besitzen (in der «Umgangssprache» bezeichnet man solche Salze, Säuren und Basen selbst schon als Elektrolyte, streng gilt dies nur für deren Lösung). In Lösung zerfallen alle elektrolytbildenden Substanzen, im folgenden Elektrolyte genannt, mehr oder weniger in elektrisch geladene Radikale, Ionen genannt. Die positiv geladenen, im elektrischen Feld zur Kathode wandernden Ionen, die *Kationen*, werden gemäß ihrer Wertigkeit mit Punkten, die zur Anode wandernden, negativ geladenen *Anionen* mit Strichen bezeichnet. Beispiele: Magnesiumion = $Mg^{\cdot\cdot}$, Wasserstoffion = H'. Diese in der physikalischen Chemie gebräuchlichen Symbole werden in unseren *Wissenschaftlichen Tabellen* durch die für sich selbst sprechenden Zeichen + und – ersetzt, um einem weiteren Leserkreis verständlich zu bleiben.

Man unterscheidet starke und schwache Elektrolyte. Starke Elektrolyte sind schon in höheren Konzentrationen zu 50%, in schwächeren praktisch ganz dissoziiert; schwache Elektrolyte zerfallen auch in kleinsten Konzentrationen nie ganz. Zu den starken Elektrolyten zählen die meisten Neutralsalze, starke Säuren, wie Salz-, Salpeter- und Schwefelsäure. Schwache Elektrolyte sind die meisten organischen Säuren und Basen (auch die Kohlensäure).

Die Dissoziation der Elektrolyte ist stark konzentrationsabhängig; sie ist um so größer, je verdünnter die Lösung ist. Da die Ionen als Moleküle betrachtet werden können, ist die molekulare Konzentration eines Elektrolyten größer als der Molgehalt der entsprechenden undissoziierten Substanz. Unter der Annahme einer vollständigen Dissoziation ist die (ideale) Konzentration aller osmotisch aktiven Teilchen gleich νN (ν = Anzahl der Teilchen, in die ein Molekül bei vollständiger Dissoziation zerfällt,

1) Peters, J. P., Water Balance in Health and Disease, in: Duncan, G. G. (Hrsg.), *Diseases of Metabolism*, Philadelphia (1953).

N = Molzahl der undissoziierten Substanz). Realiter ist die osmotische Konzentration um den Faktor g kleiner:

$$\text{reale } \frac{\text{Osmolarität}}{\text{Osmolalität}} = g \times \text{ideale } \frac{\text{Osmolarität}}{\text{Osmolalität}}$$

Der Faktor g, *osmotischer Koeffizient* genannt, kann für sehr verdünnte Lösungen nach dem DEBYE-HÜCKELschen Grenzgesetz berechnet werden, ist aber zumeist eine empirisch bestimmte Größe (siehe weiter unten). Er hängt nicht nur von der Konzentration, sondern auch von den Ionenarten ab, die in der Lösung vorkommen, wobei der Einfluß der Ionenqualität mit der Wertigkeit zunimmt.

Diese komplizierten Verhältnisse zwingen bei der Berechnung biologischer Elektrolytlösungen zu Vereinfachungen:

a) man läßt den Faktor g ganz außer Betracht und nimmt vollständige Dissoziation an. Bei starken Elektrolyten entsteht dadurch kein großer Fehler; in diesem Falle rechnet man mit der idealen Osmolarität oder Osmolalität;

b) sofern der Faktor g für die gesuchte Konzentration bekannt ist, nimmt man an, daß er auch in der Mischlösung trotz Dazukommen anderer Ionenarten gleichbleibe;

c) man bestimmt empirisch die osmotisch wirksame Konzentration.

Ideale und reale Lösungen

Die thermodynamische Behandlung wässeriger Lösungen geht von dem Begriff der idealen Lösung aus. Aus Raumgründen kann hier auf deren Definition nicht näher eingetreten werden. Es sei lediglich erwähnt, daß diese Konzeption nur in sehr verdünnten Lösungen einigermaßen verwirklicht ist. Die Eigenschaften einer idealen Lösung verändern sich (bei konstanter Temperatur und konstantem Druck) in erster Näherung proportional zur molekularen Konzentration der Lösung. Infolgedessen ändern sich auch die verschiedenen Eigenschaften proportional zueinander. In der Praxis macht man sich diesen Umstand zunutze, indem man den schwierig zu messenden osmotischen Druck in der Regel aus der leicht zu ermittelnden Gefrierpunktserniedrigung berechnet. Der Begriff «osmotisch wirksame Konzentration» (Osmolarität, Osmolalität) bezieht sich deshalb nicht nur auf den osmotischen Druck, sondern auch auf die Gefrierpunktserniedrigung, die Siedepunktserhöhung usw.

Osmotischer Druck und Gefrierpunktserniedrigung idealer Lösungen werden folgendermaßen berechnet:

Osmotischer Druck (ideal) $= P_{id} = 0{,}08205 \times T \times \nu \times m$ **(22)*** in atm

Gefrierpunktserniedrigung (ideal) $= \Delta T_{id} = 1{,}858 \times \nu \times m$ **(23)*** in °C

wobei 0,08205 = R = Gaskonstante in Literatmosphären, T = absolute Temperatur in Grad Kelvin (°K) = 273,16 + °C, 1,858 = kryoskopische Konstante = molale Gefrierpunktserniedrigung des Wassers, ν = Anzahl der Teilchen, in die ein Molekül bei vollständiger Dissoziation zerfällt, m = Molalität = mol/1000 g Wasser der undissoziierten Substanz*. Umrechnungsfaktoren für Druckeinheiten siehe S. 186, osmotischer Druck und Gefrierpunktserniedrigung für osmotische Konzentrationen von 10 bis 740 mmol/1000 g Wasser siehe S. 290.

Aus **(22)** und **(23)** erhält man:

$$P_{(atm)} = 0{,}0442 \times T \times \Delta T_{(°C)} \quad \textbf{(24)}$$
(T wie in **22**)

oder $P_{(atm,\ bei\ 0°C)} = 12{,}06 \times \Delta T_{(°C)}$ **(25)**

Im Gegensatz zu **(22)** und **(23)** gelten **(24)** und **(25)** über einen viel weiteren Konzentrationsbereich, P und ΔT sind deshalb hier nicht mit $_{id}$ (ideal) bezeichnet.

Reale Lösungen. Die Verbindung zwischen idealer und realer Lösung bildet, wie schon erwähnt, der osmotische Koeffizient g, den wir nun an Hand von **(23)** bestimmen können:

Osmotischer Koeffizient

$$g = \frac{\Delta T}{\Delta T_{id}} = \frac{\Delta T}{1{,}858\,\nu\,m} = \frac{\Delta T/N}{1{,}858\,\nu} \quad \textbf{(26)}$$

wobei ΔT = tatsächliche Gefrierpunktserniedrigung;

N = Molzahl der eingewogenen oder analytisch bestimmten (undissoziierten) Substanz in 1000 g Wasser;

T/N = sogenannte molekulare Gefrierpunktserniedrigung der betreffenden Substanz («molekular» bezogen auf die undissoziierte Substanz). In chemischen Nachschlagewerken (*International Critical Tables*, *Handbook of Chemistry and Physics*, LANDOLT-BÖRNSTEIN) ist meistens diese molekulare Gefrierpunktserniedrigung angegeben. Sie ist nur noch durch $1{,}858 \times \nu$ zu dividieren, um g zu erhalten;

ν = Anzahl der Teilchen, in die ein Molekül der betreffenden Substanz bei vollständiger Dissoziation zerfällt.

Der osmotische Koeffizient g einer Teilsubstanz einer Mischlösung kann nicht bestimmt werden. Man geht deshalb bei der Berechnung der osmotischen Konzentration dieser Teilsubstanz von der realen Osmolalität der Mischlösung aus und nimmt an, g besitze dieselbe Größe, die er bei einer einfachen Lösung mit derselben Osmolalität wie die Mischlösung besäße.

Die reale Osmolalität erhält man aus der realen Gefrierpunktserniedrigung nach der Gleichung **(23)** für ideale Gefrierpunktserniedrigung zu

$$\text{(reale) Osmolalität} = \Delta T/1{,}858 \quad \textbf{(27)}$$

Die ideale Osmolalität erhält man aus der (realen) Osmolalität zu

$$\text{ideale Osmolalität} = \text{reale Osmolalität}/g \quad \textbf{(28)}$$

(28) braucht man nur, wenn man zu einer gegebenen realen Osmolalität das Gewicht der abzuwägenden Substanz sucht. Im andern Falle, bei gegebenem Gewicht, kann die ideale Osmolalität stets stöchiometrisch berechnet werden ($\nu\,m$).

Anwendungen

Berechnung der Osmolalität des Blutserums aus der Gefrierpunktserniedrigung (–0,56° C). Nach **(27)** ist die (reale) Osmolalität des Serums = 0,56/1,858 = 301,4 mmol (ohne großen Fehler 300 mmol gleichzusetzen).

Zur Berechnung von Gefrierpunktserniedrigung und osmotischem Druck aus der Tonizität und umgekehrt dient die Tafel auf S. 290.

Berechnung von NaCl- und Glucoselösungen (Tafel auf S. 291).

a) Das **abzuwägende Gewicht einer idealen Osmolalität** NaCl bzw. Glucose oder Fructose erhält man aus den Kolonnen 1 und 2 sowie 1 und 6. Kolonne 7 gibt gleichzeitig den entsprechenden Kalorienwert für Glucose oder Fructose.

b) Die **ideale Osmolalität eines bestimmten Gewichtes** NaCl bzw. Glucose oder Fructose erhält man aus den Kolonnen 11 und 12 bzw. 11 und 13. Kolonne 14 gibt wiederum den entsprechenden Kalorienwert für Glucose oder Fructose.

c) Die **osmotischen Koeffizienten** g bzw. $1/g$ von NaCl oder Glucose erhält man aus den Kolonnen 1 und 4 bzw. 1 und 5 (NaCl) oder 1 und 9 bzw. 1 und 10 (Glucose), wobei die Werte der Kolonne 1 realen Osmolalitäten entsprechen.

Anwendungsbeispiel 1. Gesucht das abzuwägende Gewicht NaCl, um eine Lösung der (realen) Osmolalität von 500 mmol zu erhalten.

Nach **(28)** ist die ideale Osmolalität = reale Osmolalität/g = 500/0,9170 = 500 × 1,0905 = 545,25 mmol. Das entsprechende Gewicht liegt nach a) in der Mitte zwischen 15,783 und 16,075, bei etwa 15,9 g NaCl. Es sind deshalb 15,9 g NaCl in 1000 g H_2O aufzulösen, um eine Lösung der Osmolalität von 500 mmol zu erhalten.

* An Stelle von νm ist bei Mischlösungen $\Sigma \nu m = \Sigma \nu N \frac{1000}{N_0 M_0}$ einzusetzen ($\Sigma \nu N = \nu_1 N_1 + \nu_2 N_2 + \nu_3 N_3 + \cdots$.

Man kann sich den Umweg über die Errechnung der idealen Osmolalität ersparen und das abzuwägende Gewicht direkt aus Kolonne 2 errechnen (bei Glucose aus Kolonne 6). Zu diesem Zweck nimmt man das Gewicht, das sich auf gleicher Höhe befindet wie die (reale) Osmolalität, mit der man in Kolonne 1 eingeht, um den Faktor *g* zu suchen. Dieses Gewicht wird mit $1/g$ multipliziert. Für obiges Beispiel erhalten wir auf diese Weise $14{,}613 \times 1{,}0905 = 15{,}935$ g NaCl.

Anwendungsbeispiel 2. Die Osmolalität einer Lösung von 400 mmol ist durch Zusatz von NaCl auf 500 mmol zu erhöhen. Hier geht man von der vereinfachenden Annahme aus, der Faktor *g* verändere sich in Mischlösungen nicht. $1/g$ NaCl für 500 mmol/1000 g H_2O ist 1,0905. Durch NaCl zu ergänzen sind 100 mmol, das abzuwägende Gewicht ist (siehe oben) deshalb $2{,}923 \times 1{,}0905 = 3{,}188$ g NaCl.

d) **Exakte Berechnung isotonischer Lösungen.** Man kann diese, wie in Beispiel 1 und 2 angegeben, berechnen. Einfacher gestaltet sich der Vorgang nach Kolonne 1 und 3 (NaCl) sowie 1 und 8 (Glucose).

Beispiel 1. Um eine isotonische NaCl- bzw. Glucoselösung zu erhalten (= Osmolalität von 300 mmol), müssen 9,448 g NaCl bzw. 53,399 g Glucose in 1000 g Wasser gelöst werden.

Beispiel 2. Eine Lösung einer Osmolalität von 200 mmol soll durch Zusatz von NaCl auf Isotonie zum Serum (auf 300 mmol) gebracht werden. Die zu ergänzende Osmolalität beträgt 100 mmol (Kolonne 1), das entsprechende Gewicht NaCl beträgt 3,150 g (Kolonne 3).

Entsprechend wird bei Glucose verfahren.

Die Umrechnungstafeln auf S. 292–294 sprechen für sich selbst. Die Erläuterungen zu den Tafeln auf S. 298 und 299 finden sich auf S. 295–297.

Berechnung der Gefrierpunktserniedrigung und des osmotischen Druckes

Siehe S. 287–289

Reale Osmolalität Millimol auf 1000 g Wasser	Gefrierpunktserniedrigung ΔT °C	Osmotischer Druck bei 0 °C atm	Osmotischer Druck bei 38 °C* atm	Gefrierpunktserniedrigung ΔT °C	Reale Osmolalität Millimol auf 1000 g Wasser	Osmotischer Druck bei 0 °C atm	Osmotischer Druck bei 38 °C* atm	Reale Osmolalität Millimol auf 1000 g Wasser	Gefrierpunktserniedrigung ΔT °C	Osmotischer Druck bei 0 °C atm	Osmotischer Druck bei 38 °C* atm	Gefrierpunktserniedrigung ΔT °C	Reale Osmolalität Millimol auf 1000 g Wasser	Osmotischer Druck bei 0 °C atm	Osmotischer Druck bei 38 °C* atm
10	0,01858	0,22	0,26	0,01	5,38	0,12	0,14	**400**	0,74320	8,97	10,22	**0,40**	215,28	4,83	5,50
20	03716	0,45	0,51	02	10,76	0,24	0,28	10	76178	9,19	10,47	41	220,67	4,95	5,64
30	05574	0,67	0,78	03	16,15	0,36	0,41	20	78036	9,41	10,73	42	226,04	5,07	5,78
40	07432	0,90	1,02	04	21,53	0,48	0,55	30	79894	9,64	10,99	43	231,43	5,19	5,91
50	0,09290	1,12	1,28	0,05	26,91	0,60	0,69	40	81752	9,86	11,24	44	236,81	5,31	6,05
60	11148	1,35	1,53	06	32,29	0,72	0,83	50	0,83610	10,09	11,50	0,45	242,20	5,43	6,19
70	13006	1,57	1,79	07	37,68	0,84	0,96	60	85468	10,31	11,75	46	247,58	5,55	6,33
80	14864	1,79	2,04	08	43,01	0,97	1,10	70	87326	10,53	12,01	47	252,96	5,67	6,46
90	16722	2,02	2,30	09	48,44	1,09	1,24	80	89184	10,76	12,26	48	258,34	5,79	6,60
100	0,18580	2,24	2,56	**0,10**	53,82	1,21	1,38	90	91042	10,98	12,52	49	263,72	5,91	6,74
10	20438	2,47	2,81	11	59,20	1,33	1,51	**500**	0,92900	11,21	12,78	**0,50**	269,11	6,03	6,88
20	22296	2,69	3,07	12	64,59	1,45	1,65	10	94758	11,43	13,03	51	274,49	6,15	7,01
30	24154	2,91	3,32	13	69,97	1,57	1,79	20	96616	11,66	13,29	52	279,88	6,27	7,15
40	26012	3,14	3,58	14	75,35	1,69	1,93	30	98474	11,88	13,54	53	285,25	6,39	7,29
50	0,27870	3,36	3,83	0,15	80,73	1,81	2,06	40	1,00332	12,10	13,80	54	290,63	6,51	7,43
60	29728	3,59	4,09	16	86,11	1,93	2,20	50	1,02190	12,33	14,05	0,55	296,02	6,63	7,57
70	31586	3,81	4,34	17	91,50	2,05	2,34	60	04048	12,55	14,31	**56**	**301,40**	**6,76**	**7,70**
80	33444	4,03	4,60	18	96,88	2,17	2,48	70	05906	12,78	14,57	57	306,78	6,88	7,84
90	35302	4,26	4,86	19	102,26	2,29	2,61	80	07764	13,00	14,82	58	312,16	7,00	7,98
200	0,37160	4,48	5,11	**0,20**	107,64	2,41	2,75	90	09622	13,22	15,08	59	317,55	7,12	8,11
10	39018	4,71	5,37	21	113,02	2,53	2,89	**600**	1,11480	13,45	15,33	0,60	322,93	7,24	8,25
20	40876	4,93	5,62	22	118,41	2,65	3,03	10	13338	13,67	15,59	61	328,31	7,36	8,39
30	42734	5,16	5,88	23	123,79	2,77	3,16	20	15196	13,90	15,84	62	333,69	7,47	8,53
40	44592	5,38	6,13	24	129,17	2,89	3,30	30	17054	14,12	16,10	63	339,07	7,60	8,66
50	0,46450	5,60	6,39	0,25	134,55	3,02	3,44	40	18912	14,34	16,35	64	344,46	7,72	8,80
60	48308	5,83	6,64	26	139,94	3,14	3,58	50	1,20770	14,57	16,61	0,65	349,84	7,84	8,94
70	50166	6,05	6,90	27	145,32	3,26	3,71	60	22628	14,79	16,87	66	355,22	7,96	9,08
80	52024	6,28	7,15	28	150,70	3,38	3,85	70	24486	15,02	17,12	67	360,60	8,08	9,21
90	53882	6,50	7,41	29	156,08	3,50	3,99	80	26344	15,24	17,38	68	365,98	8,20	9,35
300	**0,55740**	**6,72**	**7,67**	**0,30**	161,46	3,62	4,13	90	28202	15,47	17,63	69	371,37	8,32	9,49
10	57598	6,95	7,92	31	166,85	3,74	4,26	**700**	1,30060	15,69	17,89	**0,70**	376,75	8,44	9,63
20	59456	7,17	8,18	32	172,23	3,86	4,40	10	31918	15,91	18,14	71	382,13	8,56	9,76
30	61314	7,40	8,43	33	177,61	3,98	4,54	20	33776	16,14	18,40	72	387,51	8,68	9,90
40	63172	7,62	8,69	34	182,99	4,10	4,68	30	35634	16,36	18,65	73	392,90	8,81	10,04
50	0,65030	7,84	8,94	0,35	188,38	4,22	4,81	40	37492	16,59	18,91	74	398,28	8,92	10,18
60	66888	8,07	9,20	36	193,76	4,34	4,95								
70	68746	8,29	9,45	37	199,14	4,46	5,09								
80	70604	8,52	9,71	38	204,52	4,58	5,23								
90	72462	8,74	9,97	39	209,90	4,70	5,36								

* Temperatur des Blutes etwa 38 °C = 311,16 °K.

Siehe S. 287–290

Kolonnen 3, 4, 5, 8, 9 und 10 sind für die betreffenden (realen) osmotischen Konzentrationen (Millimol oder Gramm) je 1000 g Wasser berechnet. Siehe S. 287–289. Osmotische Koeffizienten g interpoliert nach Werten aus WASHBURN et al., *Int. crit. Tab.*, 4 (1928).

	Kochsalz, NaCl, Mol.-Gew. 58,448				D-Glucose*, $C_6H_{12}O_6$, Mol.-Gew. 180,16						Kochsalz, NaCl	D-Glucose*, $C_6H_{12}O_6$	
Osmolalität (ideal)	Entspricht einem Gewicht von	Entspricht bei einer Gefrierpunktserniedrigung von 0,56° C (Osmolalität = 300 mmol) einem Gewicht von	Osmotischer Koeffizient für eine reale Osmolalität in der Größe der idealen Osmolalität der Kolonne 1		Entspricht einem Gewicht von	Dieses Gewicht entspricht	Entspricht bei einer Gefrierpunktserniedrigung von 0,56° C (Osmolalität = 300 mmol) einem Gewicht von	Osmotischer Koeffizient für eine reale Osmolalität in der Größe der idealen Osmolalität der Kolonne 1		Gramm	Entspricht einer (idealen) Osmolalität von	Entspricht einer (idealen) Osmolalität von	Dieses Gewicht entspricht
mmol	Gramm	Gramm	g	$1/g$	Gramm	Kalorien**	Gramm	g	$1/g$		Millimol	Millimol	Kalorien**
10	0,292	0,315	0,9780	1,0225	1,802	7,53	1,780	1,0011	0,9989	1	34,22	5,55	4,18
20	0,585	0,630	9699	0310	3,603	15,07	3,560	0011	9989	2	68,43	11,10	8,36
30	0,877	0,945	9649	0364	5,405	22,60	5,340	0011	9989	3	102,65	16,65	12,55
40	1,169	1,260	9607	0409	7,206	30,14	7,120	0011	9989	4	136,86	22,20	16,73
50	1,461	1,574	0,9574	1,0445	9,008	37,67	8,900	1,0011	0,9989	5	171,08	27,75	20,91
60	1,754	1,890	9546	0476	10,810	45,21	10,680	0011	9989	6	205,29	33,30	25,09
70	2,046	2,205	9522	0502	12,611	52,74	12,460	0011	9989	7	239,51	38,85	29,27
80	2,338	2,519	9500	0526	14,413	60,27	14,240	0011	9989	8	273,72	44,41	33,46
90	2,630	2,834	9480	0549	16,214	67,81	16,020	0011	9989	9	307,93	49,96	37,64
100	2,923	3,150	0,9462	1,0569	18,016	75,34	17,800	1,0011	0,9989	**10**	342,15	55,51	41,82
10	3,215	3,464	9447	0585	19,818	82,88	19,580	0016	9984	11	376,36	61,06	46,00
20	3,507	3,779	9434	0600	21,619	90,41	21,360	0021	9979	12	410,58	66,61	50,18
30	3,800	4,095	9423	0612	23,421	97,95	23,140	0027	9973	13	444,79	72,16	54,37
40	4,092	4,410	9413	0624	25,222	105,48	24,920	0032	9968	14	479,01	77,71	58,55
50	4,384	4,724	0,9404	1,0634	27,024	113,01	26,700	1,0037	0,9963	15	513,22	83,26	62,73
60	4,676	5,039	9395	0644	28,826	120,55	28,480	0042	9958	16	547,44	88,81	66,91
70	4,969	5,355	9386	0654	30,627	128,08	30,260	0048	9952	17	581,65	94,36	71,09
80	5,261	5,669	9377	0664	32,429	135,62	32,040	0054	9946	18	615,87	99,91	75,28
90	5,553	5,984	9368	0675	34,230	143,15	33,820	0059	9941	19	650,08	105,46	79,46
200	5,845	6,299	0,9360	1,0684	36,032	150,68	35,600	1,0065	0,9935	**20**	684,30	111,01	83,64
10	6,138	6,614	9351	0694	37,834	158,22	37,380	0071	9930	21	718,51	116,56	87,82
20	6,430	6,929	9342	0704	39,635	165,75	39,120	0077	9924	22	752,73	122,11	92,00
30	6,722	7,244	9334	0714	41,437	173,29	40,940	0083	9918	23	786,94	127,66	96,19
40	7,015	7,559	9326	0723	43,238	180,82	42,720	0089	9912	24	821,16	133,22	100,37
50	7,307	7,874	0,9318	1,0732	45,040	188,36	44,500	1,0095	0,9906	25	855,37	138,77	104,55
60	7,599	8,189	9310	0741	46,842	195,89	46,280	0101	9900	26	889,59	144,32	108,73
70	7,891	8,503	9302	0750	48,643	203,43	48,060	0106	9895	27	923,80	149,87	112,91
80	8,184	8,819	9295	0759	50,445	210,96	49,840	0112	9889	28	958,02	155,42	117,10
90	8,476	9,124	9287	0768	52,246	218,49	51,619	0117	9884	29	992,45	160,97	121,28
300	8,768	**9,448**	**0,9280**	**1,0776**	54,048	226,03	**53,399**	**1,0122**	**0,9880**	**30**	1026,45	166,52	125,46
10	9,060		9273	0784	55,850	233,56		0126	9876	31	1060,66	172,06	129,64
20	9,353		9266	0792	57,651	241,10		0132	9870	32	1094,88	177,62	133,82
30	9,645		9259	0800	59,453	248,63		0138	9864	33	1129,09	183,17	138,01
40	9,937		9252	0808	61,254	256,17		0143	9859	34	1163,31	188,72	142,19
50	10,230		0,9245	1,0816	63,056	263,70		1,0148	0,9854	35	1197,52	194,27	146,37
60	10,522		9238	0824	64,858	271,23		0153	9849	36	1231,74	199,82	150,55
70	10,814		9232	0832	66,659	278,77		0158	9845	37	1265,95	205,37	154,73
80	11,106		9226	0839	68,461	286,30		0163	9840	38	1300,17	210,92	158,92
90	11,399		9220	0846	70,262	293,84		0167	9836	39	1334,38	216,47	163,10
400	11,691		0,9214	1,0853	72,064	301,37		1,0172	0,9831	**40**	1368,60	222,03	167,28
10	11,983		9209	0859	73,866	308,91		0176	9827	41	1402,81	227,58	171,46
20	12,275		9204	0865	75,667	316,44		0180	9823	42	1437,03	233,13	175,64
30	12,568		9199	0871	77,469	323,98		0184	9819	43	1471,24	238,68	179,82
40	12,860		9194	0877	79,270	331,51		0187	9816	44	1505,46	244,23	184,00
50	13,152		0,9190	1,0881	81,072	339,04		1,0191	0,9813	45	1539,67	249,78	188,19
60	13,444		9186	0886	82,874	346,58		0194	9810	46	1573,89	255,33	192,37
70	13,737		9182	0891	84,675	354,11		0197	9807	47	1608,10	260,88	196,55
80	14,029		9178	0896	86,477	361,64		0200	9804	48	1642,32	266,43	200,74
90	14,321		9174	0900	88,278	369,18		0203	9801	49	1676,53	271,98	204,92
500	14,613		0,9170	1,0905	90,080	376,72		1,0207	0,9797	**50**	1710,74	277,53	209,10
10	14,906		9167	0909	91,882	384,25		0210	9794	51	1744,96	283,08	213,28
20	15,198		9164	0912	93,683	391,78		0213	9791	52	1779,18	288,63	217,46
30	15,490		9161	0916	95,485	399,32		0216	9789	53	1813,39	294,18	221,65
40	15,783		9158	0919	97,286	406,85		0219	9786	54	1847,61	299,73	225,82
50	16,075		0,9155	1,0923	99,088	414,39		1,0222	0,9783	55	1881,82	305,28	230,01
60	16,367		9152	0927	100,890	421,92		0225	9780	56	1916,03	310,84	234,19
70	16,659		9149	0930	102,691	429,45		0228	9777	57	1950,25	316,39	238,37
80	16,952		9146	0934	104,493	436,98		0231	9774	58	1984,47	321,94	242,56
90	17,244		9143	0937	106,294	444,52		0233	9772	59	2018,68	327,49	246,73
600	17,536		0,9140	1,0941	108,096	452,06		1,0236	0,9769	**60**	2052,90	333,04	250,92
10	17,829		9137	0945	109,898	459,59		0238	9767	61	2087,11	338,59	255,10
20	18,121		9134	0948	111,699	467,13		0241	9765	62	2121,33	344,14	259,28
30	18,413		9131	0952	113,501	474,66		0243	9763	63	2155,54	349,69	263,47
40	18,705		9128	0955	115,302	482,19		0246	9760	64	2189,76	355,24	267,65
50	18,998		0,9126	1,0958	117,104	489,73		1,0248	0,9758	65	2223,97	360,79	271,83
60	19,290		9123	0961	118,906	497,26		0250	9756	66	2258,19	366,34	276,01
70	19,582		9121	0964	120,707	504,80		0252	9754	67	2292,40	371,89	280,19
80	19,874		9119	0966	122,509	512,33		0255	9751	68	2326,62	377,44	284,38
90	20,167		9117	0969	124,310	519,87		0257	9749	69	2360,83	382,99	288,56
700	20,459		0,9115	1,0971	126,112	527,40		1,0259	0,9748	**70**	2395,05	388,55	292,74
10	20,751		9113	0973	127,914	534,93		0261	9746	71	2429,26	394,09	296,92
20	21,043		9111	0976	129,715	542,47		0264	9743	72	2463,48	399,65	301,10
30	21,336		9109	0978	131,517	550,00		0266	9741	73	2497,69	405,20	305,29
40	21,628		9107	0981	133,318	557,54		0268	9738	74	2531,91	410,75	309,47

Diese Werte entsprechen jenen der Kolonne 2, dividiert durch 0,9280 bzw. multipliziert mit 1,0776 (= g bzw. 1/g NaCl bei einer Osmolalität von 300 mmol oder mosm).

Diese Werte entsprechen jenen der Kolonne 6, dividiert durch 1,0122 bzw. multipliziert mit 0,9880 (= g bzw. 1/g Glucose bei einer Osmolalität von 300 mmol oder mosm).

* a) Da die elementare Zusammensetzung von Glucose und **Fructose** dieselbe ist, können Kolonnen 6, 7, 13 und 14 auch für Fructose angewendet werden. Der osmotische Koeffizient g von Fructose ist aber nicht gleich dem Koeffizienten g von Glucose.

b) Da das Molekulargewicht des **Wassers** genau $^1/_{10}$ desjenigen der Glucose beträgt, können Kolonnen 6 und 13 auch für Wasser verwendet werden, indem bei Kolonne 6 das Komma um eine Stelle nach links, bei Kolonne 13 um eine Stelle nach rechts verschoben wird.

** Als Kalorienäquivalent für 1 g Kohlenhydrat wurde jenes von LOEWY verwendet (4,182 Kalorien je Gramm).

Wässerige Lösungen – Umrechnungsfaktoren für Elektrolyte I

Vgl. S. 287–290

a) Gegeben: Elektrolyt. **Gesucht:** Molekulargewicht und maximale Löslichkeit in kaltem und warmem Wasser.
b) Gegeben: Gewicht der undissoziierten Substanz. **Gesucht:** Millimol (mmol) der undissoziierten Substanz, Milligrammäquivalente (mval) und Gewicht des Kations und des Anions oder Milliosmol eines aufgelösten Stoffes unter Annahme einer vollständigen Dissoziation.

	1 g enthält bzw. entspricht		Molekulargewicht	Undissoziierte Substanz	Löslichkeit[1] Gramm in 1000 g Wasser		Kation			Anion			Milliosmol***
				mmol	kalt	warm	mval	mg		mval	mg		
1	**Calcium, Ca, Kalzium**		40,08	24,95			49,90						
2	aceticum hydrat. *(acetat)*	$Ca(C_2H_3O_2)_2 + H_2O$	176,19	5,68	436^{20}	343^{100}	11,35	228	Ca^{++}	11,35	670	$C_2H_3O_2^-$	17,03
3		$Ca(C_2H_3O_2)_2 + 2\,H_2O$	194,20	5,15	347^{0}	335^{50}	10,30	206	Ca^{++}	10,30	608	$C_2H_3O_2^-$	15,45
4	chloratum hydrat. *(chlorid)*	$CaCl_2 + 2\,H_2O$	147,03	6,80	977^{0}	3260^{60}	13,60	273	Ca^{++}	13,60	482	Cl^-	20,40
5	crystallisatum	$CaCl_2 + 6\,H_2O$	219,09	4,56	2790^{0}	5360^{20}	9,13	183	Ca^{++}	9,13	324	Cl^-	13,69
6	citricum *(citrat)*	$Ca_3(C_6H_5O_7)_2 + 4\,H_2O$	570,52	1,75	$8,5^{18}$	$9,6^{83}$	10,52	211	Ca^{++}	10,52	663	$C_6H_5O_7^{--}$	8,76
7	glyconicum (D-*gluconat*)	$Ca(C_6H_{11}O_7)_2 + H_2O$	448,40	2,23	33^{15}	–	4,46	89	Ca^{++}	4,46	870	$C_6H_{11}O_7^-$	6,69
8	hyposulfurosum *(thiosulfat)*	$CaS_2O_3 + 6\,H_2O$	260,31	3,84	1000^{s}	d	7,68	154	Ca^{++}	7,68	431/246	$S_2O_3^{--}$ / S	7,68
9	lacticum *(lactat)*	$Ca(C_3H_5O_3)_2 + 5\,H_2O$	308,31	3,24	31^{0}	79^{80}	6,49	130	Ca^{++}	6,49	578	$C_3H_5O_3^-$	9,73
10	laevulicum *(laevulinat)*	$Ca(C_5H_7O_3)_2 + 2\,H_2O$	306,33	3,27	400	–	6,53	131	Ca^{++}	6,53	752	$C_5H_7O_3^-$	9,79
11	oxydatum *	CaO	56,08	17,83	$1,31^{10}$d	$0,7^{80}$d	35,66	715	Ca^{++}				
12	phosphoricum bibasicum *(diorthophosphat)*	$CaHPO_4 + 2\,H_2O$	172,10	5,81	$0,2^{25}$	$0,75^{100}$	11,62	233	Ca^{++}	11,62	558/180	HPO_4^{--} / P	11,62
13	**Chlorinum, Cl, Chlor**		35,457	14,10 (Cl_2)	–	–	28,20						
14	Acidum hydrochloricum dilutum 10% *(10%ige Salzsäure)*		(HCl)										
	1 g	(0,1 g HCl)	36,465	2,74	∞	∞	2,74	2,8	H^+	2,74	97,2	Cl^-	5,48
	1 ml	(0,1047 g HCl)	36,465	2,87	∞	∞	2,87	2,9	H^+	2,87	101,8	Cl^-	5,74
15	Ammonium chloratum *(chlorid)*	NH_4Cl	53,50	18,69	297^{0}	758^{100}	18,69	337	NH_4^+	18,69	663	Cl^-	37,38
	Vgl. auch Calcium (4, 5), Kalium (20), Magnesium (27) und Natrium (36)												
16	**Kalium, K, Potassium**	K	39,10	25,58			25,58						
17	aceticum *(acetat)*	$K(C_2H_3O_2)$	98,15	10,19	2530^{20}	4920^{62}	10,19	398	K^+	10,19	602	$C_2H_3O_2^-$	20,38
18	bicarbonicum *(bicarbonat)*	$KHCO_3$	100,12	9,99	224	600^{60}	9,99	391	K^+	9,99	610	HCO_3^-	19,98
19	bromatum *(bromid)*	KBr	119,02	8,40	$534,8^{0}$	1020^{100}	8,40	329	K^+	8,40	672	Br^-	16,81
20	chloratum *(chlorid)*	KCl	74,56	13,41	347^{20}	567^{100}	13,41	525	K^+	13,41	476	Cl^-	26,83
21	citricum tribasicum *(citrat)*	$K_3(C_6H_5O_7) + H_2O$	324,42	3,08	1670^{15}	1997^{31}	9,25	362	K^+	9,25	583	$C_6H_5O_7^{--}$	12,33
22	glyconicum (D-*gluconat*)	$K(C_6H_{11}O_7)$	234,25	4,27			4,27	167	K^+	4,27	833	$C_6H_{11}O_7^-$	8,54
23	oxydatum *(monoxyd)* *	K_2O	94,20	10,62	s.g.	s.g.	21,23	830					
24	phosphoricum monobasicum *(monorthophosphat)*	KH_2PO_4	136,09	7,35	330^{25}	s.g.	7,35 / 7,35	287 / 7,4	K^+ / H^+	14,70	705/228	HPO_4^{--} / P	22,04
25	phosphoricum bibasicum sicc. *(diorthophosphat)*	K_2HPO_4	174,18	5,74	1670^{20}	s.g.	11,48	449	K^+	11,48	551/178	HPO_4^{--} / P	17,22
26	**Magnesium, Mg**	Mg	24,32	41,12			82,24						
27	chloratum *(chlorid)*	$MgCl_2$	95,23	10,50	$542,5^{20}$	727^{100}	21,00	255	Mg^{++}	21,0	745	Cl^-	31,50
28		$MgCl_2 + 6\,H_2O$	203,33	4,92	1670	3670	9,84	120	Mg^{++}	9,84	349	Cl^-	14,75
29	hydricum *(hydroxyd)*	$Mg(OH)_2$	58,34	17,14	$0,009^{18}$	$0,04^{100}$	34,28	417	Mg^{++}				
30	oxydatum *(Magnesia)* *	MgO	40,32	24,80	0,0062	$0,086^{30}$	49,60	603	Mg^{++}				
31	sulfuricum *(sulfat)*	$MgSO_4 + 7\,H_2O$	246,50	4,06	710^{20}	910^{40}	8,11	98,7	Mg^{++}	8,11	390/130	SO_4^{--} / S	8,11
32	**Natrium, Na, Sodium**	Na	22,991	43,48			43,48						
33	aceticum *(acetat)*	$Na(C_2H_3O_2) + 3\,H_2O$	136,09	7,35	762^{0}	1388^{50}	7,35	169	Na^+	7,35	434	$C_2H_3O_2^-$	14,70
34	*bicarbonicum *(bicarbonat)* **	$NaHCO_3$	84,01	11,90	69^{0}	164^{60}	11,90	274	Na^+	11,90	726	HCO_3^-	23,80
35	bromatum *(bromid)*	NaBr	102,91	9,72	795^{0}	1210^{100}	9,72	224	Na^+	9,72	777	Br^-	19,43
36	chloratum *(chlorid, Kochsalz)*	NaCl	58,45	17,11	357^{0}	391^{100}	17,11	393	Na^+	17,11	607	Cl^-	34,22
37	citricum bibasicum *(bicitrat)*	$Na_2H(C_6H_5O_7)$ + 1½ H_2O	263,12	3,80	s.g.	s.g.	7,60	175	Na^+	7,60	723	$H(C_6H_5O_7)^{--}$	11,40
							7,60 / 3,80	175 / 3,83	Na^+ / H^+	11,4	719	$C_6H_5O_7^{--}$	15,20
38	citricum tribasicum *(citrat)*	$Na_3(C_6H_5O_7) + 2\,H_2O$	294,11	3,40	720^{25}	1670^{100}	10,19	235	Na^+	10,19	643	$C_6H_5O_7^{--}$	13,60
39		$Na_3(C_6H_5O_7) + 5½\,H_2O$	357,17	2,80	s.g.	s.g.	8,40	193	Na^+	8,40	529	$C_6H_5O_7^{--}$	11,20
40	hyposulfurosum *(thiosulfat)*	$Na_2S_2O_3$	158,11	6,32	500	2310^{100}	12,65	291	Na^+	12,65	709/406	$S_2O_3^{--}$ / S	18,97
41	*lacticum *(lactat)* **	$Na(C_3H_5O_3)$	112,06	8,92	s.g.		8,92	205	Na^+	8,92	795	$C_3H_5O_3^-$	17,85
42	oxydatum *(oxyd)* *	Na_2O	61,98	16,13	d	d	32,26	742	Na^+				
43	paraaminosalicylicum	$Na(C_7H_6O_3N) + 2\,H_2O$	211,16	4,74	?	?	4,74	109	Na^+	4,74	720	$C_7H_6O_3N^-$	9,47
44	phosphoricum monobasicum *(monorthophosphat)*	$NaH_2PO_4 + H_2O$	138,00	7,25	599^{0}	427^{100}	7,25 / 7,25	167 / 7,3	Na^+ / H^+	14,49	696/224	HPO_4^{--} / P	21,74
45		$NaH_2PO_4 + 2\,H_2O$	156,01	6,41	710^{0}	3900^{83}	6,41 / 6,41	147 / 6,5	Na^+ / H^+	12,82	615/199	HPO_4^{--} / P	19,23
46	phosphoricum bibasicum	Na_2HPO_4	141,97	7,04			14,08	324	Na^+	14,08	676/218	HPO_4^{--} / P	21,13
47	sicc. *(diorthophosphat)*	$Na_2HPO_4 + 2\,H_2O$	178,00	5,62	1000^{50}	1170^{80}	11,24	258	Na^+	11,24	539/174	HPO_4^{--} / P	16,85
48		$Na_2HPO_4 + 12\,H_2O$	358,16	2,79	41,5	874^{34}	5,58	128	Na^+	5,58	268/86,5	HPO_4^{--} / P	8,38
49	salicylicum *(salicylat)*	$Na(C_7H_5O_3)$	160,11	6,25	1110^{15}	1250^{25}	6,25	144	Na^+	6,25	856	$C_7H_5O_3^-$	12,49
50	sulfuricum sicc. *(sulfat)*	Na_2SO_4	142,05	7,04	$47,6^{0}$	427^{100}	14,08	324	Na^+	14,08	676/226	SO_4^{--} / S	21,12
51	*(Glaubersalz)*	$Na_2SO_4 + 10\,H_2O$	322,21	3,10	110^{0}	927^{80}	6,21	143	Na^+	6,21	298/100	SO_4^{--} / S	9,31
52	**Phosphorus, P, Phosphor** Vgl. Calcium (12), Kalium (24, 25) u. Natrium (44–48)		30,975	123,92 (P_4)	–	–	vgl. S. 294						
53	**Sulfur, S, Schwefel** Vgl. Calcium (8), Magnesium (31) und Natrium (40, 50, 51)		32,066	256,53 (S_8)	–	–	vgl. S. 294						

* Die Aufnahme von Oxyden erfolgte im Hinblick auf die vielfach noch verwendeten älteren Nahrungsmitteltabellen.
** 1 g Natriumbicarbonat entspricht dem Natriumgehalt von 1,33 g Natriumlactat. 1 g Natriumlactat entspricht dem Natriumgehalt von 0,75 g Natriumbicarbonat.
*** Unter Annahme einer vollständigen Dissoziation.
1) Nach HODGMAN et al. (Hrsg.), *Handbook of Chemistry and Physics, 1958/59*, 40. Aufl., Cleveland (1958). Die hochgestellten Zahlen geben die Temperatur in °C. – s.g. bedeutet sehr gut löslich, d = Zerfall.

Vgl. S. 287–290

Gegeben: Milliosmol eines aufgelösten Stoffes unter Annahme einer vollständigen Dissoziation.
Gesucht: Gewicht und Millimol (mmol) der undissoziierten Substanz, Milligrammäquivalente (mval) und Gewicht des Kations und des Anions.

	10 mosm Substanz entsprechen		Undissoziierte Substanz		Kation			Anion		
			g	mmol	mval	mg		mval	mg	
	Calcium, Ca, Kalzium									
2	aceticum hydrat.	$Ca(C_2H_3O_2)_2 + H_2O$	0,587	3⅓	6⅔	134	Ca^{++}	6⅔	394	$C_2H_3O_2^-$
3		$Ca(C_2H_3O_2)_2 + 2\,H_2O$	0,647	3⅓	6⅔	134	Ca^{++}	6⅔	394	$C_2H_3O_2^-$
4	chloratum hydrat.	$CaCl_2 + 2\,H_2O$	0,490	3⅓	6⅔	134	Ca^{++}	6⅔	236	Cl^-
5	crystallisatum	$CaCl_2 + 6\,H_2O$	0,730	3⅓	6⅔	134	Ca^{++}	6⅔	236	Cl^-
6	citricum	$Ca_3(C_6H_5O_7)_2 + 4\,H_2O$	1,141	2	12	241	Ca^{++}	12	756	$C_6H_5O_7^{--}$
7	glyconicum	$Ca(C_6H_{11}O_7)_2 + H_2O$	1,495	3⅓	6⅔	134	Ca^{++}	6⅔	1301	$C_6H_{11}O_7^-$
8	hyposulfurosum	$CaS_2O_3 + 6\,H_2O$	1,302	5	10	200	Ca^{++}	10	561	$S_2O_3^{--}$
									321	S
9	lacticum	$Ca(C_3H_5O_3)_2 + 5\,H_2O$	1,028	3⅓	6⅔	134	Ca^{++}	6⅔	594	$C_3H_5O_3^-$
10	laevulicum	$Ca(C_5H_7O_3)_2 + 2\,H_2O$	1,021	3⅓	6⅔	134	Ca^{++}	6⅔	767	$C_5H_7O_3^-$
12	phosphoricum bibasicum	$CaHPO_4 + 2\,H_2O$	0,861	5	10	200	Ca^{++}	10	480	HPO_4^{--}
									155	P
	Chlorinum, Cl, Chlor									
14	Acidum hydrochloricum dilutum 10%									
	1 g	(0,1 g HCl/g)	1,823	5	5	5	H^+	5	177	Cl^-
	1 ml	(0,1047 g HCl/ml)	1,741	5	5	5	H^+	5	177	Cl^-
15	Ammonium chloratum	NH_4Cl	0,268	5	5	90	NH_4^+	5	177	Cl^-
	Vgl. auch Calcium (4, 5), Kalium (20), Magnesium (27) und Natrium (36)									
	Kalium, K, Potassium									
17	aceticum	$K(C_2H_3O_2)$	0,491	5	5	196	K^+	5	295	$C_2H_3O_2^-$
18	bicarbonicum	$KHCO_3$	0,501	5	5	196	K^+	5	305	HCO_3^-
19	bromatum	KBr	0,595	5	5	196	K^+	5	400	Br^-
20	chloratum	KCl	0,373	5	5	196	K^+	5	177	Cl^-
21	citricum tribasicum	$K_3(C_6H_5O_7) + H_2O$	0,811	2½	7½	293	K^+	7½	473	$C_6H_5O_7^{--}$
22	glyconicum	$K(C_6H_{11}O_7)$	1,171	5	5	196	K^+	5	976	$C_6H_{11}O_7^-$
24	phosphoricum monobasicum	KH_2PO_4	0,454	3⅓	3⅓	130	K^+	6⅔	320	HPO_4^{--}
									103	P
25	phosphoricum bibasicum sicc.	K_2HPO_4	0,581	3⅓	6⅔	261	K^+	6⅔	320	HPO_4^{--}
									103	P
	Magnesium, Mg									
27	chloratum	$MgCl_2$	0,317	3⅓	6⅔	81	Mg^{++}	6⅔	236	Cl^-
28		$MgCl_2 + 6\,H_2O$	0,678	3⅓	6⅔	81	Mg^{++}	6⅔	236	Cl^-
31	sulfuricum	$MgSO_4 + 7\,H_2O$	1,233	5	10	122	Mg^{++}	10	480	SO_4^{--}
									160	S
	Natrium, Na, Sodium									
33	aceticum	$Na(C_2H_3O_2) + 3\,H_2O$	0,681	5	5	115	Na^+	5	295	$C_2H_3O_2^-$
34	bicarbonicum	$NaHCO_3$	0,420	5	5	115	Na^+	5	305	HCO_3^-
35	bromatum	NaBr	0,515	5	5	115	Na^+	5	400	Br^-
36	chloratum	NaCl	0,292	5	5	115	Na^+	5	177	Cl^-
37	citricum bibasicum	$Na_2H(C_6H_5O_7) + 1½\,H_2O$	0,658	2½	5	115	Na^+	7½	473	$C_6H_5O_7^{--}$
38	citricum tribasicum	$Na_3(C_6H_5O_7) + 2\,H_2O$	0,735	2½	7½	173	Na^+	7½	473	$C_6H_5O_7^{--}$
39		$Na_3(C_6H_5O_7) + 5½\,H_2O$	0,893	2½	7½	173	Na^+	7½	473	$C_6H_5O_7^{--}$
40	hyposulfurosum	$Na_2S_2O_3$	0,527	3⅓	6⅔	153	Na^+	6⅔	374	$S_2O_3^{--}$
									214	S
41	lacticum	$Na(C_3H_5O_3)$	0,560	5	5	115	Na^+	5	445	$C_3H_5O_3^-$
43	paraaminosalicylicum	$Na(C_7H_6O_3N) + 2\,H_2O$	1,056	5	5	115	Na^+	5	761	$C_7H_6O_3N^-$
44	phosphoricum monobasicum	$NaH_2PO_4 + H_2O$	0,460	3⅓	3⅓	77	Na^+	6⅔	320	HPO_4^{--}
45		$NaH_2PO_4 + 2\,H_2O$	0,520	3⅓	3⅓	77	Na^+	6⅔	320	HPO_4^{--}
									103	P
46	phosphoricum bibasicum sicc.	Na_2HPO_4	0,473	3⅓	6⅔	153	Na^+	6⅔	320	HPO_4^{--}
									103	P
47		$Na_2HPO_4 + 2\,H_2O$	0,593	3⅓	6⅔	153	Na^+	6⅔	320	HPO_4^{--}
									103	P
48		$Na_2HPO_4 + 12\,H_2O$	1,194	3⅓	6⅔	153	Na^+	6⅔	320	HPO_4^{--}
									103	P
49	salicylicum	$Na(C_7H_5O_3)$	0,801	5	5	115	Na^+	5	686	$C_7H_5O_3^-$
50	sulfuricum sicc.	Na_2SO_4	0,474	3⅓	6⅔	153	Na^+	6⅔	320	SO_4^{--}
									107	S
51		$Na_2SO_4 + 10\,H_2O$	1,074	3⅓	6⅔	153	Na^+	6⅔	320	SO_4^{--}
									107	S
52	**Phosphorus, P, Phosphor** Vgl. Calcium (12), Kalium (24, 25) und Natrium (44–48)									
53	**Sulfur, S, Schwefel** Vgl. Calcium (8), Magnesium (31) und Natrium (40, 50, 51)									

Wässerige Lösungen – Umrechnungsfaktoren für Elektrolyte III

In Zusammenarbeit mit A. F. Essellier und P. Jeanneret, Medizinische Universitätsklinik Zürich (Prof. W. Löffler)

Vgl. S. 287–290

a) **Gegeben:** Gewicht der anorganischen Ionen. **Gesucht:** entsprechendes Gewicht des Salzes. – Linke Spalte.
b) **Gegeben:** Milliäquivalente der Ionen. **Gesucht:** entsprechendes Gewicht des Salzes. – Rechte Spalte.

Anorganische Ionen

	1 g = 49,90 mval Calcium++, Ca++, Kalzium++ entspricht:		**1 mval = 20,04 mg Calcium++, Ca++, Kalzium++ entspricht:**	
2	4,396 g	$Ca(C_2H_3O_2)_2 + H_2O$	88,09 mg	$Ca(C_2H_3O_2)_2 + H_2O$
3	4,845 g	$Ca(C_2H_3O_2)_2 + 2\,H_2O$	97,10 mg	$Ca(C_2H_3O_2)_2 + 2\,H_2O$
4	3,668 g Calcium chloratum hydrat.	$CaCl_2 + 2\,H_2O$	75,51 mg Calcium chloratum hydrat.	$CaCl_2 + 2\,H_2O$
5	5,466 g cryst.	$CaCl_2 + 6\,H_2O$	109,55 mg cryst.	$CaCl_2 + 6\,H_2O$
6	4,745 g Calcium citricum	$Ca_3(C_6H_5O_7)_2 + 4\,H_2O$	95,09 mg Calcium citricum	$Ca_3(C_6H_5O_7)_2 + 4\,H_2O$
7	11,187 g Calcium glyconicum	$Ca(C_6H_{11}O_7)_2 + H_2O$	224,20 mg Calcium glyconicum	$Ca(C_6H_{11}O_7)_2 + H_2O$
8	6,495 g Calcium hyposulfurosum	$CaS_2O_3 + 6\,H_2O$	130,15 mg Calcium hyposulfurosum	$CaS_2O_3 + 6\,H_2O$
9	7,692 g Calcium lacticum	$Ca(C_3H_5O_3)_2 + 5\,H_2O$	154,15 mg Calcium lacticum	$Ca(C_3H_5O_3)_2 + 5\,H_2O$
10	7,463 g Calcium laevulicum	$Ca(C_5H_7O_3)_2 + 2\,H_2O$	153,17 mg Calcium laevulicum	$Ca(C_5H_7O_3)_2 + 2\,H_2O$
12	4,294 g Calcium phosphoricum bibasicum	$CaHPO_4 + 2\,H_2O$	86,05 mg Calcium phosphoricum bibasicum	$CaHPO_4 + 2\,H_2O$
13	**1 g = 28,20 mval Chlorinum⁻, Cl⁻, Chlor⁻ entspricht:**		**1 mval = 35,457 mg Chlorinum⁻, Cl⁻, Chlor⁻ entspricht:**	
14	10,28 g bzw. 9,551 ml Acidum hydrochloricum dilutum 10%		364,7 mg bzw. 348,28 µl Acidum hydrochloricum dilutum 10%	
15	1,509 g Ammonium chloratum	NH_4Cl	53,50 mg Ammonium chloratum	NH_4Cl
4	2,073 g Calcium chloratum hydrat.	$CaCl_2 + 2\,H_2O$	73,51 mg Calcium chloratum hydrat.	$CaCl_2 + 2\,H_2O$
5	3,090 g cryst.	$CaCl_2 + 6\,H_2O$	109,55 mg cryst.	$CaCl_2 + 6\,H_2O$
20	2,103 g Kalium chloratum	KCl	74,56 mg Kalium chloratum	KCl
27	1,343 g Magnesium chloratum	$MgCl_2$	47,62 mg Magnesium chloratum	$MgCl_2$
28	2,867 g	$MgCl_2 + 6\,H_2O$	101,67 mg	$MgCl_2 + 6\,H_2O$
36	1,649 g Natrium chloratum	NaCl	58,45 mg Natrium chloratum	NaCl
16	**1 g = 25,58 mval Kalium+, K+, Potassium+ entspricht:**		**1 mval = 39,10 mg Kalium+, K+, Potassium+ entspricht:**	
17	2,510 g Kalium aceticum	$K(C_2H_3O_2)$	98,15 mg Kalium aceticum	$K(C_2H_3O_2)$
18	2,560 g Kalium bicarbonicum	$KHCO_3$	100,12 mg Kalium bicarbonicum	$KHCO_3$
19	3,044 g Kalium bromatum	KBr	119,02 mg Kalium bromatum	KBr
20	1,907 g Kalium chloratum	KCl	74,56 mg Kalium chloratum	KCl
21	2,766 g Kalium citricum tribasicum	$K_3(C_6H_5O_7) + H_2O$	108,14 mg Kalium citricum tribasicum	$K_3(C_6H_5O_7) + H_2O$
22	5,991 g Kalium glyconicum	$K(C_6H_{11}O_7)$	234,25 mg Kalium glyconicum	$K(C_6H_{11}O_7)$
24	3,481 g Kalium phosphoricum monobasicum	KH_2PO_4	136,09 mg Kalium phosphoricum monobasic.	KH_2PO_4
25	2,227 g Kalium phosphoricum bibasicum	K_2HPO_4	87,09 mg Kalium phosphoricum bibasicum	K_2HPO_4
	1 g Kohlendioxyd, CO_2, entspricht 1,387 g = 22,72 mval Bicarbonationen (HCO_3^-)		**1 mval = 61,02 mg Bicarbonationen** (HCO_3^-) entspricht 44,01 mg Kohlendioxyd (CO_2)	
	1 Vol.% Kohlendioxyd, CO_2, entspricht bei 0° C und 760 Torr (mm Hg) 27,40 mg/l = 0,449 mval/l Bicarbonationen (HCO_3^-)*		**1 mval/l = 61,02 mg/l Bicarbonationen** (HCO_3^-) entspricht bei 0° C und 760 Torr (mm Hg) 2,23 Vol.% Kohlendioxyd (CO_2)*	
26	**1 g = 82,24 mval Magnesium++, Mg++ entspricht:**		**1 mval = 12,16 mg Magnesium++, Mg++ entspricht:**	
27	4,707 g Magnesium chloratum	$MgCl_2$	47,62 mg Magnesium chloratum	$MgCl_2$
28	8,361 g	$MgCl_2 + 6\,H_2O$	101,67 mg	$MgCl_2 + 6\,H_2O$
31	10,136 g Magnesium sulfuricum	$MgSO_4 + 7\,H_2O$	123,25 mg Magnesium sulfuricum	$MgSO_4 + 7\,H_2O$
32	**1 g = 43,48 mval Natrium+, Na+ entspricht:**		**1 mval = 22,991 mg Natrium+, Na+ entspricht:**	
33	5,918 g Natrium aceticum	$Na(C_2H_3O_2) + 3\,H_2O$	136,09 mg Natrium aceticum	$Na(C_2H_3O_2) + 3\,H_2O$
34	3,654 g Natrium bicarbonicum	$NaHCO_3$	84,01 mg Natrium bicarbonicum	$NaHCO_3$
36	2,542 g Natrium chloratum	NaCl	58,45 mg Natrium chloratum	NaCl
37	5,721 g Natrium citricum bibasicum	$Na_2H(C_6H_5O_7) + 1\frac{1}{2}\,H_2O$	131,56 mg Natrium citricum bibasicum	$Na_2H(C_6H_5O_7) + 1\frac{1}{2}\,H_2O$
38	4,263 g Natrium citricum tribasicum	$Na_3(C_6H_5O_7) + 2\,H_2O$	98,04 mg Natrium citricum tribasicum	$Na_3(C_6H_5O_7) + 2\,H_2O$
39	5,177 g	$Na_3(C_6H_5O_7) + 5\frac{1}{2}\,H_2O$	119,06 mg	$Na_3(C_6H_5O_7) + 5\frac{1}{2}\,H_2O$
40	3,438 g Natrium hyposulfurosum	$Na_2S_2O_3$	79,06 mg Natrium hyposulfurosum	$Na_2S_2O_3$
41	4,873 g Natrium lacticum	$Na(C_3H_5O_3)$	112,06 mg Natrium lacticum	$Na(C_3H_5O_3)$
43	9,182 g Natrium paraaminosalicylicum	$Na(C_7H_6O_3N) + 2\,H_2O$	211,16 mg Natrium paraaminosalicylicum	$Na(C_7H_6O_3N) + 2\,H_2O$
44	6,002 g Natrium phosphoricum monobasicum	$NaH_2PO_4 + H_2O$	138,00 mg Natrium phosphoricum monobasic.	$NaH_2PO_4 + H_2O$
45	6,784 g	$NaH_2PO_4 + 2\,H_2O$	156,01 mg	$NaH_2PO_4 + 2\,H_2O$
46	3,087 g Natrium phosphoricum bibasicum	Na_2HPO_4	70,98 mg Natrium phosphoricum bibasicum	Na_2HPO_4
47	3,780 g	$Na_2HPO_4 + 2\,H_2O$	89,00 mg	$Na_2HPO_4 + 2\,H_2O$
48	7,788 g	$Na_2HPO_4 + 12\,H_2O$	179,08 mg	$Na_2HPO_4 + 12\,H_2O$
49	6,962 g Natrium salicylicum	$Na(C_7H_5O_3)$	160,11 mg Natrium salicylicum	$Na(C_7H_5O_3)$
50	3,089 g Natrium sulfuricum	Na_2SO_4	71,02 mg Natrium sulfuricum	Na_2SO_4
51	7,006 g	$Na_2SO_4 + 10\,H_2O$	161,10 mg	$Na_2SO_4 + 10\,H_2O$
52	**1 g Phosphorus, P, Phosphor entspricht:**		Bei pH 4,3 entspricht **1 g Phosphor,** P, 32,28 mval $H_2PO_4^-$-Ionen, und **1 mval $H_2PO_4^-$**-Ionen entspricht 30,98 mg Phosphor**.	
12	5,555 g Calcium phosphoricum bibasicum	$CaHPO_4 + 2\,H_2O$		
24	4,393 g Kalium phosphoricum monobasicum	KH_2PO_4		
25	5,622 g Kalium phosphoricum bibasicum	K_2HPO_4		
44	4,455 g Natrium phosphoricum monobasicum	$NaH_2PO_4 + H_2O$	Bei pH 9,6 entspricht **1 g Phosphor,** P, 64,56 mval HPO_4^{--}-Ionen, und **1 mval HPO_4^{--}-Ionen** entspricht 15,49 mg Phosphor.	
45	5,036 g	$NaH_2PO_4 + 2\,H_2O$		
46	4,583 g Natrium phosphoricum bibasicum	Na_2HPO_4	Bei pH 7,4 und 38° C entspricht **1 g anorganischer Phosphor** 58,1 mval Phosphationen, und **1 mval Phosphationen** entspricht 17,21 mg Phosphor (anorganisch)[1].	
47	5,746 g	$Na_2HPO_4 + 2\,H_2O$		
48	11,563 g	$Na_2HPO_4 + 12\,H_2O$		
53	**1 g Sulfur, S, Schwefel entspricht:**		**1 g Sulfur, S, Schwefel** entspricht 62,37 mval SO_4^{--} und **1 mval SO_4^{--}** entspricht 16,03 mg Schwefel.	
8	4,059 g Calcium hyposulfurosum	$CaS_2O_3 + 6\,H_2O$		
31	7,687 g Magnesium sulfuricum	$MgSO_4 + 7\,H_2O$		
40	2,466 g Natrium hyposulfurosum	$Na_2S_2O_3$		
50	4,430 g Natrium sulfuricum	Na_2SO_4		
51	10,049 g	$Na_2SO_4 + 10\,H_2O$		
			Bei pH 7,4 und 38° C und einem Albumin-Globulin-Quotienten von 1,8 entspricht **1 g Serumproteine** 0,241 Basen-mval ionisierter Serumproteine, und **1 Basen-mval** ionisierter Serumproteine entspricht 4,15 g Serumproteine[2].	

* Die hier angeführten Umrechnungsfaktoren (0,449 bzw. 2,23) von Vol.% CO_2 in mmol CO_2/l oder mval CO_2/l (Bicarbonat-CO_2) und umgekehrt sind vom Molvolumen dieses Gases abgeleitet (22,257 Liter bei 0° C und 760 Torr [mm Hg]). Der in der medizinischen Literatur oft verwendete Umrechnungsfaktor von 2,24 basiert irrtümlicherweise auf dem Molvolumen idealer Gase (22,412 Liter). Der Unterschied zwischen den beiden Faktoren ist für praktische Zwecke unwesentlich. Der gleiche Faktor (festgesetzt auf 2,226) wird im Kapitel «Synopsis des Blutes – Blutgase» verwendet.

** Basenäquivalenz der Phosphate bei pH-Werten zwischen 4,3 und 9,6, also auch bei den physiologischerweise vorhandenen pH-Werten von 4,8–7,4 im Harn.

1) Nach Edlbacher und Leuthardt, *Lehrbuch der physiologischen Chemie*, 14. Aufl., Berlin (1959).

2) Nach Van Slyke et al., *J. biol. Chem.*, **79**, 768 (1928).

Von A. F. Essellier und P. Jeanneret, Medizinische Universitätsklinik Zürich (Prof. W. Löffler)[1]

Literatur siehe S. 298

Die Zusammenstellung auf S. 298 und 299 gibt eine Übersicht gebräuchlicher Infusionslösungen mit der Angabe des Natrium-, Kalium- und Chloridgehaltes sowie des Lactat- oder Bicarbonat- bzw. Ammoniumionengehaltes. Die (ideale) Osmolarität* (vgl. S. 287–289) gibt einen überschlägigen Aufschluß über die Abweichungen der Lösungen von der Isotonie. Die einzelnen Lösungen und Gruppen von Lösungen werden anschließend kurz besprochen, mit besonderer Berücksichtigung der parenteralen Kaliumzufuhr. Der Magnesium-, Calcium- und Phosphatersatz, dessen klinische Bedeutung im Rahmen der parenteralen Flüssigkeits- und Elektrolytersatztherapie noch weiterer Abklärung bedarf, wurde in dieser Diskussion nicht speziell berücksichtigt. Auf kommerzielle Infusionslösungen konnte in dieser Übersicht nicht eingegangen werden.

Es handelt sich hier nicht um ein therapeutisches Schema, sondern um eine Übersicht der wichtigsten in der Literatur angeführten Lösungen. Die hier gewählte einheitliche Darstellung des Ionengehaltes und der osmotischen Konzentration ermöglicht einen Vergleich und eine Auswahl der Lösungen. Für die praktische Infusionstherapie müssen einige gutgeeignete Grundlösungen zur Verfügung stehen, die in verschiedenen Kombinationen (mit getrennten Zusatzampullen für die hochdosierte Calcium- und Kaliumtherapie) allen Indikationen der parenteralen Wasser-, Kalorien- und Elektrolytersatztherapie genügen. Die klinisch wichtigen Lösungen zur parenteralen Kalorienzufuhr in Form von Glucose, Fructose, Aminosäuren und Alkohol sowie die Ersatzstoffe für Plasmakolloide (Dextranlösungen usw.), die mit der Elektrolyt- und Wasserzufuhr in engstem praktischem Zusammenhang stehen, sind in dieser Tabelle nicht einbezogen.

Wenn mit den Infusionen eine Kalorienzufuhr durch Kohlenhydrate erwünscht ist, können alle angeführten Lösungen für die intravenöse Zufuhr mit Glucose, Fructose oder Invertzucker bis zu einer Gesamtkonzentration von 900 bis maximal 1200 mmol/l angereichert werden (je 100 g/l Glucose oder Fructose = 555 mmol/l). Vgl. auch S. 291.

Ad. A. Physiologische Lösungen (Tabellen auf S. 298 und 299)

Sogenannte physiologische Lösungen streben die Isotonie mit dem Serum oder eine dem Serum ähnliche Zusammensetzung an. Keine dieser Bedingungen ist für die intravenöse Elektrolyttherapie von Belang.

Isotonie. Eine *strenge* Isotonie ist nur in der experimentellen Medizin zur Perfusion isolierter Organe notwendig. In der Klinik ist sie für subkutane Infusionen erwünscht, um Gewebereizungen zu vermeiden. Bei intravenöser Verabreichung kommt es aber zu einer raschen Verdünnung der Infusionslösungen, so daß bedeutende Abweichungen von der Isotonie ohne Reizung der Venenwand möglich sind. Gut toleriert werden zum Beispiel 20%ige Invertzuckerlösungen (etwa 1110 mosm/l), 2–2½%ige Kochsalzlösung (513–769 mosm/l), Mischungen zum Beispiel von 10%iger Glucoselösung mit 3 g Kaliumchlorid und 4 g Kochsalz (772 mosm/l).

Eine Infusionslösung ist definitionsgemäß mit dem Serum isotonisch, wenn sie die gleiche Gefrierpunktserniedrigung wie die Blutflüssigkeit aufweist (Δt, 0,56°, vgl. Diskussion dieses Wertes in Michaels und Münzel[1]). Auf S. 287–289 findet der Leser Definition und Anleitung zur Berechnung der osmotischen Konzentration. Isotonische osmotische Konzentrationen für einige Elektrolyte sind hier zusammengestellt.

	Osmotische Konzentration*			
	in 1000 g Wasser		in 1 Liter Lösung	
	mmol	g	mmol	g
Natriumchlorid**	325	9,5	325	9,5 (0,95%ig)
Ammoniumchlorid	327	8,75	325	8,7 (0,87%ig)
Natriumbicarbonat	314	13,2	312	13,1 (1,31%ig)
Glucose**	298	53,8	289	52,0 (5,20%ig)

In der Tabelle auf S. 298 und 299 sind für Natriumchlorid (0,95%), Natriumbicarbonat (1,40%) und Glucose (5,25%) die Werte nach Michaels und Münzel[1] eingesetzt. Die Werte für die isotonische Natriumlactat- (1,75%) und die Ammoniumchloridlösung (0,83%) basieren auf Messungen von Jeanneret et al.[2]. Die Vorschrift der *Pharm. Dan. IX* für die isotonische Natriumlactatlösung ist 1,72% (siehe Waldoe[3]).

Aus diesen Zahlen geht hervor, daß die üblichen Elektrolytinfusionslösungen bei einer Osmolarität* von etwa 310–330 mmol/l isotonisch sind, die Glucoselösung bei rund 290 mmol/l. Die in der letzten Spalte der folgenden Tabelle (S. 298 und 299) angegebenen Osmolaritäten* erlauben eine rasche, wenn auch nur angenäherte Beurteilung der osmotischen Verhältnisse.

Wenn Elektrolyte mit einer Glucoselösung kombiniert werden, um eine zusätzliche Kalorienzufuhr zu ermöglichen, so muß die Osmolarität* der Elektrolyte zu derjenigen der Glucose addiert werden. Eine 5,25%ige (isotonische) Glucoselösung entspricht 291 mmol/l, eine 10%ige Glucoselösung 555 mmol/l.

Ionische Zusammensetzung. Eine isotonische Infusionslösung ist eigentlich nur dann «physiologisch», wenn sie die gleiche Zusammensetzung wie das Blutserum aufweist. Aus der Tabelle S. 298 ist ersichtlich, daß die unter A angeführten Lösungen in ihrer Zusammensetzung von derjenigen des Blutserums (vgl. «Wasser- und Elektrolythaushalt») zum Teil stark abweichen. Bei der Infusionstherapie an nierengesunden Patienten ist dies belanglos, weil die Niere die überschüssigen Ionen ausscheidet und damit Verschiebungen in der ionischen Zusammensetzung der extrazellulären Flüssigkeit verhindert. Oft ist es im Gegenteil angezeigt, Lösungen, die in ihrer Zusammensetzung vom Blutserum abweichen, zu infundieren, um eine genügende Zufuhr der erwünschten Mineralbestandteile zu ermöglichen. Für die experimentelle Perfusion isolierter Organe hingegen ist das gegenseitige Verhältnis der Kationen Na+, K+ und Ca++ sehr wesentlich.

— *Ad A 1.* Die sogenannte physiologische Kochsalzlösung enthält die Na- und Cl-Ionen im Verhältnis von 1:1, während diese Ionen im Serumwasser ungefähr im Verhältnis von 3:2 vorliegen (vgl. «Wasser- und Elektrolythaushalt»). Bei großen Infusionsmengen sowie bei beeinträchtigter Nierenfunktion wirkt diese Lösung deshalb ansäuernd[4].

— *Ad A 2.* Die isotonische Natriumlactat-Kochsalz-Lösung (modifiziert nach Butler und Darrow[5, 6]) ist «physiologisch» sowohl in bezug auf die Isotonie als auf das Verhältnis der Na- und Cl-Ionen.

— *Ad A 3.* a) Die sehr gebräuchliche Traubenzucker-Kochsalz-Lösung ist nicht nur für die Deckung des Natrium- und Chlorbedarfs, sondern auch *teilweise* des Wasserbedarfs zu verwenden, der sich mit isotonischer Kochsalzlösung nur zum Teil decken läßt.

Die Glucose bzw. Fructose der Glucose-, Fructose- oder Invertzuckerlösungen wird im Stoffwechsel verbraucht und das Lösungswasser somit für die Bedürfnisse des Wasserhaushaltes freigegeben.

b) Die Lösung a) kann dadurch verbessert werden, daß an Stelle von 1 Volumen isotonische Kochsalzlösung 1 Volumen isotonische Natriumlactat-Kochsalz-Lösung (Nr. 2) verwendet wird.

Die Infusionslösungen 3a und b können auch mit Glucose, Fructose oder Invertzucker 10–20%ig statt 5,25%ig zubereitet werden, wenn man eine größere Kalorienzufuhr wünscht, was praktisch immer der Fall ist. Diese Infusionslösungen sind dann aber hypertonisch und eignen sich deshalb nicht für die subkutane Zufuhr. An Stelle von Glucoselösung werden heute in zunehmendem Maße Fructoselösungen verwendet, da Fructose besser und schneller verwertet wird als Glucose (auch vom Diabetiker!).

Wenn die Glucosezufuhr unerwünscht ist, wird die Kochsalzlösung statt mit Glucose mit destilliertem Wasser verdünnt. Diese hypotonische Lösung eignet sich dann allerdings nicht für die subkutane Verabreichung.

— *Ad A 4.* In der Ringerschen Lösung ist das Verhältnis von Na- und Cl-Ionen dasselbe wie in der gewöhnlichen Kochsalzlösung; ihr Kaliumgehalt ist zu gering, um den täglichen Bedarf zu decken; für die Kaliumersatztherapie kommt diese Lösung daher gar nicht in Betracht. Diese und ähnliche Lösungen (Tyrode, Ringer-Locke usw., siehe Zusammenstellung in Michaels und Münzel[1] und Hartmann[7], sowie Lösungen mit Magnesium und Phosphatzusatz[7–10]) sind für physiologisch-experimentelle Zwecke, das heißt für die Perfusion isolierter Organe, ferner für cytologische Arbeiten notwendig. Der klinische Wert dieser Gruppe von Infusionslösungen, welche in ihrer Zusammensetzung das Blutserum nachahmen, steht nicht fest, da die Rolle der Calcium-, Phosphat- und Magnesiumionen im Rahmen der parenteralen Wasser- und Elektrolytersatztherapie noch nicht genügend abgeklärt ist und die Zufuhr dieser Ionen mit Infusionsflüssigkeiten zur Zeit noch vorwiegend auf theoretischen Erwägungen beruht.

— *Ad A 5.* In der Ringer-Lactat-Lösung[7] ist das Verhältnis der Na- und Cl-Ionen-Konzentration physiologisch. Sie ist deshalb bei großen Infusionen, besonders bei acidotischer Stoffwechsellage, der gewöhnlichen Ringerschen oder Kochsalzlösung vorzuziehen.

* Osmotische Konzentration (ideal), unter Annahme einer vollständigen Dissoziation der Elektrolyte. Vgl. S. 287–289.

** Vgl. auch S. 291.

Bemerkungen zur Tabelle auf S. 298 und 299 (Fortsetzung)

— *Ad A 6.* Diese Lösung enthält Natrium und Chlorid im «physiologischen» Verhältnis von etwa 14:10 und Calciumionen in der Serumkonzentration. Kalium und Magnesium sind in doppelt so hoher Konzentration als im Serum enthalten. Die Kaliumkonzentration dieser Lösung ist knapp genügend, um den normalen Bedarf mit Infusionslösungen zu decken (siehe weiter unten). Wegen ihres höheren Kaliumgehaltes bedeutet diese Lösung für den klinischen Gebrauch aber doch einen Fortschritt gegenüber den RINGERschen Lösungen. Die Lösung nach FOX enthält aber kein Phosphat.

Ad B. Lösungen zur Therapie der metabolischen Acidose und Alkalose

Die ansäuernde bzw. alkalisierende Wirkung eines Salzes beruht auf der metabolischen Verwertung des Kations oder Anions, wobei das gegensinnig geladene Ion zurückbleibt. Das Lactation wird zur Hauptsache in der Leber zu Glycogen, das Ammoniumion zu Harnstoff umgewandelt.

— *Ad B 1. Natriumlactat*lösungen werden heute für die Zubereitung von Infusionslösungen an Stelle von Natriumbicarbonat viel verwendet, da sie haltbar und leicht zu sterilisieren sind. Im Gegensatz dazu lassen sich *Natriumbicarbonat*lösungen nicht sterilisieren; zur Herstellung von sterilen Lösungen muß man von Natriumbicarbonat in Trockenampullen ausgehen. Diese werden erst unmittelbar vor Gebrauch in der auf Körpertemperatur vorgewärmten Infusionsflüssigkeit durch leichtes Schütteln aufgelöst. 1 g Natriumbicarbonat entspricht 1,33 g Natriumlactat, und 1 g Natriumlactat entspricht 0,75 g Natriumbicarbonat. Die Bicarbonat- oder Lactatlösungen werden in der Regel mit Glucoselösung oder mit destilliertem Wasser verdünnt verabfolgt. Die Kombination mit Glucoselösung kommt besonders bei renaler Acidose in Betracht. Die alkalinisierende Wirkung des Natriumlactats ist bei fortgeschrittenem Leberschaden beeinträchtigt, wenn der Abbau des Lactations verzögert ist[11].

— *Ad B 2.* Die intravenöse Ammoniumchloridbehandlung von alkalotischen Zuständen wurde von BODANSKY[12] eingehend besprochen. Theoretisch könnte die intravenöse Ammoniumchloridverabreichung bei bestehender Lebererkrankung wegen des verzögerten Abbaus des Ammoniumions[11] zu vorübergehenden toxischen Erscheinungen führen. Praktisch müßte es sich um eine fortgeschrittene Leberparenchymschädigung handeln, da die Umwandlung von Ammoniumsalzen in Harnstoff sogar in der durchströmten isolierten Leber weitergeht (LÖFFLER[13]).

Da weder eine plötzliche Alkalinisierung noch Ansäuerung erwünscht ist, werden diese Lösungen praktisch nie als solche, sondern in Mischung mit anderen Lösungen verabreicht.

Die *praktische Berechnung* der Menge der theoretisch zu verabreichenden ansäuernden bzw. alkalinisierenden Infusionslösungen[13, 14] basiert beim Erwachsenen auf einem durchschnittlichen Körperwassergehalt von 50% (vgl. «Wasser- und Elektrolythaushalt») sowie auf einer gleichmäßigen intra- und extrazellulären Verteilung des Bicarbonations[15]. Solche Berechnungen geben naturgemäß nur ein grob angenähertes Bild der Infusionsmengen, besonders da die Frage der intrazellulären Konzentration des Bicarbonats noch nicht abgeklärt ist[16] (HASTINGS, zitiert in [11], S. 24) und weil Chlorionen sich nicht auf das ganze Körperwasser verteilen[17].

Um diese Berechnungen zu erleichtern, rechnet man in Millival (vgl. S. 287–289).

Bei einem durchschnittlichen Wassergehalt von 50% (siehe «Wasser- und Elektrolythaushalt») erhöhen bzw. erniedrigen 0,5 mval alkalinisierender bzw. ansäuernder Ionen je Kilogramm Körpergewicht theoretisch die «Alkalireserve» um 1 mval/l = 2,23 Vol.%. In der elften Spalte der Tabelle ist für jede Infusionslösung der Gehalt an Lactat- oder Bicarbonat- bzw. Ammoniumionen angegeben, so daß die erforderliche Infusionsmenge zur Erreichung der erwünschten Veränderung der «Alkalireserve» größenordnungsmäßig ermittelt werden kann. Beispielsweise sollten demnach bei einem 70 kg schweren Patienten zur Erhöhung bzw. Senkung der «Alkalireserve» um 6 mval/l: $70 \times 6 \times 0{,}5 = 210$ mval Lactat- oder Bicarbonat- bzw. Ammoniumionen verabreicht werden. Um zu verhindern, daß eine Acidose in eine Alkalose übergeht, ist davon abzuraten, mit einer alkalinisierenden Lösung eine völlige Normalisierung der «Alkalireserve» zu erstreben[18]. Alkalinisierende Lösungen sollen nicht ohne Kaliumsalz verabfolgt werden.

Da beim Kind mit einem höheren Wassergehalt von 66% gerechnet wird, ergibt die Berechnung in der Pädiatrie etwas höhere Infusionsmengen[18, 19]. Die Abweichungen zwischen der berechneten und gefundenen Wirkung alkalinisierender[18, 19] und ansäuernder Verbindungen[17] können erheblich sein, da die obige Annäherungsrechnung verschiedene wesentliche Faktoren nicht berücksichtigt.

Bei *diabetischer Acidose* sind die Ansichten über die Zweckmäßigkeit einer intensiven Alkalitherapie geteilt. Nach BLAND[20], BUTLER[8, 9], JOSLIN et al.[21] und andern ist Zurückhaltung angezeigt; namentlich sollten keine größeren Mengen von Natriumsalzen ohne Kaliumsalze verabfolgt werden. HARTMANN et al.[22] berichten dagegen über ausgezeichnete Resultate bei der intensiven Lactatbehandlung des diabetischen Comas. Es besteht kein Zweifel, daß bei diabetischer Ketose mit stark erniedrigter Alkalireserve eine mäßige Alkalitherapie angezeigt ist, da der Nachweis erbracht wurde, daß die Insulinwirkung durch die Acidose gehemmt wird[23–25] und die Acidose blutzuckersteigernd wirkt[62].

Ad C. Lösungen für die Kaliumersatztherapie

Kaliumzufuhr und *-ausscheidung.* Die durchschnittliche tägliche Kaliumzufuhr und -ausscheidung beträgt bei normaler Kost 77 bis 102 mval (3–4 g), bei kaliumreicher Kost kann sie auf mehr als das Doppelte ansteigen. Bei völlig fehlender Kaliumzufuhr kann dessen Konzentration im Harn beim gesunden Erwachsenen bis auf 1,6 mval/l (6,3 mg%) absinken (nach FOURMAN[27]). Schwerkranke zeigen aber im Harn selten tiefere Kaliumwerte als im Serum[28]; es ist nachgewiesen, daß die tubuläre Rückresorption des Kaliums durch Stoffwechselstörungen, insbesondere acidotische Zustände und Streß, beeinträchtigt werden kann[27]. Diese mangelhafte Regulation erklärt die Häufigkeit der Kaliumverarmung bei kaliumloser Infusionstherapie, sofern nicht genügend Kalium per os mit der Nahrung oder in medikamentöser Form[21] zugeführt wird. Kaliumdefizite entstehen auch beim Verlust von Flüssigkeiten des Verdauungstraktes (Drainagen, Durchfall, Erbrechen). Bei der Infusionsbehandlung des Coma diabeticum sind hochgradige Defizite möglich, die für den Erwachsenen 300–400 mval (11,8–15,7 g) Kalium betragen können. Weitere wichtige Ursachen von hypokaliämischen Zuständen sind die Zufuhr von alkalinisierenden Natriumsalzen und die Behandlung mit hochdosierten Nebennierenrindenhormonen (vgl. Corticotropin).

Prophylaxe des Kaliummangels. Bei reiner parenteraler Ernährung sollten *intravenös* wenigstens 30–40 mval (1,2–1,6 g) Kalium je Tag verabreicht werden, vorausgesetzt, daß es nur mit dem Harn ausgeschieden wird und keine anderen Kaliumverluste durch Erbrechen, Durchfall usw. bestehen und keine alkalinisierenden Natriumsalze oder Nebennierenrindenhormone gegeben werden. Wenn keine perorale Zufuhr von Kaliumsalzen möglich ist, läßt sich der Bedarf auf einfache Weise durch Zugabe von etwa 15–30 mval (0,6–1,2 g) Kaliumionen je Liter Infusionslösung decken. Diese Lösung soll nicht rascher als im Verlaufe von 4 Stunden verabreicht werden (etwa 83 Tropfen je Minute). Bei dieser Tropfenzahl und Konzentration ist die Kaliumverabreichung völlig gefahrlos[29].

Behandlung des Kaliummangels. Für die Behandlung eines schon bestehenden Kaliummangels muß zwischen *akuter* und *chronischer* Verarmung unterschieden werden. Bilanzstudien ergeben, daß der Kaliummangel bei einem akuten Defizit größenordnungsmäßig 1,5–5 g (38–130 mval) beträgt, bei chronischem Kaliummangel kann er 10–20 g (260–520 mval)[30], in Ausnahmefällen bis 39 g (1000 mval)[31] betragen. Zur Behebung der Kaliumdefizite müssen jedoch größere Mengen verabreicht werden, um der täglichen Ausscheidung Rechnung zu tragen. Bei einer täglichen Kaliumzufuhr von maximal 8–10 g, in Fällen mit erhaltener Diurese, dauert es stets mehrere Tage, bis das Defizit ausgeglichen ist. Im schweren diabetischen Coma sollten nach MARTIN[30] während der ersten 2 Tage 6–8 g Kalium (153–205 mval) verabreicht werden, anfangs intravenös, dann so bald als möglich peroral. Nach TARAIL und ELKINTON[28] können in Fällen von ausgesprochenem Mangel bei erhaltener Diurese täglich bis zu 3,7 mval Kalium (145 mg) je Kilogramm Körpergewicht, nach DARROW und PRATT[6] bis zu 3 mval (117 mg) je Kilogramm infundiert werden.

Infusionsvorschriften. Bei erhaltener Diurese, und wenn keine Nebennierenrindeninsuffizienz besteht, beruht eine mögliche Toxizität nicht auf der im Verlaufe von 24 Stunden verabreichten Gesamtmenge, sondern liegt an der Schnelligkeit der intravenösen Zufuhr.

Beim Erwachsenen sollten nach TARAIL und ELKINTON[28, 31] nicht mehr als 20 mval Kalium (782 mg) je Stunde infundiert werden; eine Konzentration von 80 mval Kalium (3,12 g) je Liter Infusionslösung wird von diesen Autoren als ungefährlich betrachtet. KÜHLMAYER[32] hat gezeigt, daß bis 1 g (25,6 mval) Kalium je Stunde intravenös verabreicht werden kann, ohne daß es zu einem bedeutenden Anstieg des Serumkaliumspiegels kommt. Nach Bo-

Bemerkungen zur Tabelle auf S. 298 und 299 (Fortsetzung)

DANSKY[12] ist bei langsamer Verabreichung eine Konzentration von 40–90 mval Kalium (1,6–3,5 g) je Liter Infusionsflüssigkeit zulässig. DARROW und PRATT[6] betrachten eine Kaliumkonzentration von 36 mval (1,4 g) je Liter Infusionslösung als ungefährlich. Diese Autoren verdünnen die von ihnen angegebenen Lösungen in der pädiatrischen Praxis auf 12 mval/l. Mit den anfänglichen Infusionen bei der Behandlung des Coma diabeticum[8, 9, 33], während des ersten postoperativen Tages[34, 35], bei ausgesprochener Oligurie oder Anurie im traumatischen Schock oder nach größeren Muskelverletzungen[33] ist eine Kaliumzufuhr nicht angezeigt.

Wir empfehlen, für die Therapie von Kaliummangelzuständen je Liter Infusionslösung routinemäßig 30 mval (etwa 1,2 g) Kalium im Verlaufe von 4 Stunden zu verabfolgen (83 Tropfen je Minute*). Der Vergleich mit den obenerwähnten Autoren zeigt, daß man sich mit dieser Dosierung weit außerhalb der Toxizitätsgrenze befindet. Bei ausgesprochener Hypokaliämie kann ohne weiteres die doppelte Dosis gegeben werden.

Wahl des Kaliumsalzes. Mit Ausnahme von Zuständen mit renaler hyperchlorämischer Acidose bestehen keine Kontraindikationen für die Zufuhr von Kaliumchlorid, dem gebräuchlichsten Kaliumsalz. Als alkalinisierende Kaliumsalze kommen Kaliumlactat[8], -acetat[36–38] und -gluconat[39] in Betracht.

Weil der intrazelluläre Kaliumverlust auch mit einem Phosphatverlust verbunden ist, wird in neueren Arbeiten eine gepufferte Kaliumphosphatmischung im Verhältnis monobasisches zu bibasischem Phosphat 1:4,5 empfohlen[31, 40]. Da aber Infusionslösungen nicht mehr als 0,2 g Phosphor je Liter enthalten sollten[9], müssen Mischungen von Phosphaten mit andern Kaliumsalzen verwendet werden.

DAVIDSEN, KJERULF-JENSEN et al.[41, 42] haben auf Grund ihrer Beobachtungen bei der Verabreichung von Kaliumphosphatlösungen die Regel aufgestellt, daß nicht mehr als 1 mval Phosphat je 3 mval Kalium gegeben werden soll. Bei zu hoher Phosphatzufuhr haben diese Autoren das Auftreten von Hyperphosphatämie und Hypocalcämie mit tetanischen Anfällen beobachtet[41].

Lösungen mit hohem Phosphatgehalt sind nur für die Behandlung von ausgeprägten Kaliummangelzuständen indiziert, bei welchen die Wahrscheinlichkeit eines intrazellulären Phosphatverlustes besteht. Es ist nicht abgeklärt, ob diese vorwiegend auf theoretischer Basis begründete Phosphatzufuhr auch klinisch wichtig ist.

* Um die Anzahl Normaltropfen je Minute zu berechnen, die zur Verabreichung von *A* Litern Infusionslösungen je 24 Stunden notwendig sind, wird *A* mit 13,9 multipliziert. Die Formel gilt annähernd für einfache Elektrolyt- sowie Glucoselösungen bis zu 20%iger Konzentration.

Ad C 1 und 5. Mit den Kaliumlösungen nach DARROW[6] ist es möglich, die oben angegebene Kaliumtherapie beim Erwachsenen ohne allzu große Flüssigkeitsbelastung durchzuführen.

Ad C 2a. Bei der früheren *pädiatrischen* Lösung nach BUTLER[43] handelt es sich um eine hypertonische Glucoselösung (10%) mit sehr geringem Kalium-, Natrium- und Chlorgehalt. Beim Coma diabeticum ist diese Lösung kontraindiziert, solange eine nichtnormalisierte Glycämie besteht. Die Lösung enthält so wenig Kalium, daß bei Erwachsenen eine wirksame Kaliumersatztherapie nicht möglich ist, da sie nicht einmal den täglichen Kaliumbedarf zu decken vermag; sie enthält 0,04 g Phosphor je Liter als Phosphat.

Ad C 2b. Die neue pädiatrische Lösung nach BUTLER[9] eignet sich auch für die Behandlung des Erwachsenen. Nach BUTLER ist es beim Coma diabeticum in den ersten Behandlungsstunden nicht indiziert, diese magnesium-, kalium- und phosphatreiche Lösung zu verabreichen; der Autor empfiehlt als erstes die Zufuhr von etwa 1 Liter (beim Erwachsenen) einer zur Hälfte verdünnten Lactat-Kochsalz-Lösung (Lösung A2). Diese Lösung enthält 5,3 mval Magnesium je Liter und 0,21 g Phosphor je Liter.

Ad C 3 und 6, siehe oben, Bemerkungen über die Phosphatzufuhr. Beide Lösungen figurieren auch in der *Pharm. Dan. IX* (siehe in [3, 44]).

Ad C 4 und 7. Diese Lösungen enthalten zuviel Phosphat (1,03 g Phosphor je Liter); in Lösung Nr. 4 liegt Kalium ausschließlich als Kaliumphosphat vor; dies führt bei hoher Kaliumdosierung zu einer übertriebenen Phosphatzufuhr[41]. In Lösung 7 liegen von insgesamt 82,1 mval Kalium 41,8 als Phosphat vor, während nicht mehr als 1 von 3 mval Kalium als Kaliumphosphat gegeben werden sollten[41]. Der Kaliumgehalt der Lösung 7 ist an der oberen Grenze der zulässigen Konzentration.

Ampullenlösungen. Für die Prophylaxe sowie für die Therapie von Kaliummangelzuständen können Ampullenlösungen zu 30–40 mval Kalium je Liter verwendet werden. Als übliche Dosierung empfehlen wir, eine Ampulle auf 1 Liter Tropfinfusion in 4 Stunden zu verabreichen (83 Tropfen je Minute). (Wahl des Kaliumsalzes, siehe oben.)

Ad D. Elektrolytersatz bei Verlust von Sekreten des Verdauungstraktes

Die Lösungen D 1 und D 2 sind dem durchschnittlichen Gehalt an Natrium-, Kalium- und Chlorionen in den Sekreten des Verdauungstraktes angenähert (vgl. auch «Wasser- und Elektrolythaushalt»). Die gleichen Elektrolytmengen können auch in 5- bis 10%iger Glucoselösung verabfolgt werden, wenn eine zusätzliche Kalorienzufuhr erwünscht ist.

Anhang: Natrium-, Kalium- und Chloridgehalt von konserviertem Blut und Plasma

	Na^+		K^+		Cl^-	
	mval	mg	mval	mg	mval	mg
Anfänglicher Gehalt des Plasmas einer *frischen Blutkonserve*:						
Mit Anticoagulanslösung 1 (Natrium citricum tribasicum [5½ H_2O] 258,5 g, Acidum citricum 76,1 g, Glycosum 333,3 g, Aqua dest. ad 10 000 ml):						
je 400 ml Konserve etwa	43	990	0,850	30	17,5	620
je Liter Konservenplasma etwa	165	3800	3,300	130	67,5	2400
Mit Anticoagulanslösung 2 (Natrium citricum tribasicum [5½ H_2O] 160 g, Acidum citricum 47 g, Glycosum 250 g, Aqua dest. ad 10 000 ml):						
je 400 ml Konserve etwa	36	830	0,850	30	17,5	620
je Liter Konservenplasma etwa	138	3180	3,30	130	67,5	2400
Gehalt einer *Trockenplasmakonserve* zu rund 250 ml wiederhergestelltes Citratplasma:						
je Konserve etwa	34	780	0,9	40	18	640
je Liter Plasma der Plasmakonserve etwa	137	3150	3,5	140	72	2560

Wiederhergestelltes Trockenplasma sowie das Plasma frischer Blutkonserven enthalten die Elektrolyte des Spenderplasmas, zu welchen der Elektrolytgehalt der Anticoagulanslösung hinzukommt. Da der Elektrolytspiegel und der Hämatokritwert des Spenderblutes nicht bekannt sind, kann der Elektrolytgehalt von konserviertem Blut und Plasma nur annähernd angegeben werden. Die in der Tabelle errechneten Werte von Blut- und Plasmakonserven des *Blutspendedienstes des Schweizerischen Roten Kreuzes* basieren auf den durchschnittlichen Normalwerten für Natrium, Kalium und Chlorid im Serum (vgl. «Wasser- und Elektrolythaushalt»), einem Hämatokrit von 45% und einem Mischungsverhältnis von etwa 310 ml Blut mit 90 ml Anticoagulanslösung für Blut zur Gewinnung von Trockenplasma.

Nach 10 Tagen zweckmäßiger Konservierung oder schon nach kürzerer Zeit kann sich der Kaliumgehalt des Plasmas der Blutkonserve durch Austritt von Zellkalium auf das Doppelte, nach 20 Tagen auf das Vierfache erhöhen oder noch höhere Werte erreichen[45, 46].

Auch in frischen Blutkonserven ist die Kaliumkonzentration im Plasma sehr unterschiedlich. Untersuchungen haben gezeigt, daß

in gelöstem Trockenplasma hingegen die Kaliumkonzentration weitgehend mit dem aus dem Mischungsverhältnis von Anticoagulanslösung und Blut errechneten Wert übereinstimmt, weil Trockenplasma meist rasch nach Entnahme aus dem Spenderblut gewonnen wird, so daß kein nennenswerter Austritt von Zellkalium stattfinden kann.

Literatur: *1)* MICHAELS und MÜNZEL, *Pharm. Acta Helvet.*, **24**, 58, 199 (1949). *2)* JEANNERET et al., *Helv. med. Acta*, **21**, 191 (1954). *3)* WALDOE, M., *Svensk farm. T.*, **55**, 332 (1951), Referat LAUBER und MÜNZEL, in: *Schweiz. ApothZtg*, **91**, 833 (1953). *4)* BLACK, D. A. K., *Lancet*, **1**, 353 (1953). *5)* BUTLER und TALBOT, *New. Engl. J. Med.*, **231**, 585, 621 (1944). *6)* DARROW und PRATT, *J. Amer. med. Ass.*, **143**, 365, 432 (1950). *7)* HARTMANN, A. F., *J. Amer. med. Ass.*, **103**, 1349 (1934). *8)* BUTLER, A. M., *Acta paediat. (Uppsala)*, **38**, 59 (1949). *9)* BUTLER, A. M., *New Engl. J. Med.*, **243**, 648 (1950). *10)* COOKE und CROWLEY, *New Engl. J. Med.*, **246**, 637 (1952). *11)* PETERS und VAN SLYKE, *Quantitative Clinical Chemistry*, Bd. 1, *Interpretations*, 2. Aufl., Baltimore (1946). *12)* BODANSKY, O., *Amer. J. med. Sci.*, **218**, 567 (1949). *13)* LÖFFLER, W., *Biochem. Z.*, **85**, 230 (1918). *14)* MADDOCK, W. G., *Ohio St. med. J.*, **45**, 462 (1949). *15)* PETERS, J. P., *Body Water. The Exchange of Fluids in Man*, Springfield (1935). *16)* DARROW und PRATT, *J. Pediat.*, **41**, 688 (1952). *17)* GOLDFINCH und HOLT, *Lancet*, **2**, 801 (1953). *18)* HARTMANN und SENN, *J. clin. Invest.*, **11**, 327 (1932). *19)* HARTMANN et al., *J. Pediat.*, **13**, 692 (1938). *20)* BLAND, J. H., *The Clinical Use of Fluid and Electrolyte*, Philadelphia (1952). *21)* JOSLIN et al., *The Treatment of Diabetes Mellitus*, 9. Aufl., Philadelphia (1952). *22)* HARTMANN und ERGANIAN, *J. Pediat.*, **31**, 274 (1947). *23)* GUEST, G. M., *Amer. J. Med.*, **7**, 630 (1949). *24)* GUEST et al., *Diabetes*, **1**, 276 (1952). *25)* FRANÇOIS und RUITON-UGLIENGO, *Presse méd.*, **62**, 867 (1954). *26)* MARKEES und MENCZER, *Schweiz. med. Wschr.*, **75**, 255 (1945). *27)* FOURMAN, P., *Lancet*, **1**, 1042 (1952). *28)* TARAIL und ELKINTON, *J. clin. Invest.*, **28**, 99 (1949). *29)* LANS et al., *Surg. Gynec. Obstet.*, **95**, 321 (1952). *30)* MARTIN et al., *J. Amer. med. Ass.*, **147**, 24 (1951). *31)* ELKINTON und TARAIL, *Amer. J. Med.*, **9**, 200 (1950). *32)* KÜHLMAYER, R., *Arch. klin. Chir. (Langenbecks)*, **271**, 475 (1952). *33)* PLATTNER, C. H., *Le métabolisme du potassium et ses perturbations*, Paris (1954). *34)* ELIEL et al., *New Engl. J. Med.*, **243**, 471 (1950). *35)* RANDALL et al., *Surgery*, **26**, 341 (1949). *36)* MUDGE et al., *Proc. Soc. exp. Biol. (N.Y.)*, **71**, 136 (1949). *37)* WINFIELD et al., *Ann. Surg.*, **134**, 626 (1951). *38)* FOX et al., *J. Amer. med. Ass.*, **148**, 827 (1952). *39)* BERNARD, A., *Science*, **113**, 751 (1951). *40)* ELMAN und WEICHSELBAUM, *Ann. Surg.*, **135**, 164 (1952). *41)* DAVIDSEN et al., *Lancet*, **1**, 375 (1951). *42)* DAVIDSEN und KJERULF-JENSEN, *Lancet*, **2**, 17 (1951). *43)* BUTLER et al., *Amer. J. Dis. Child.*, **72**, 481 (1946). *44)* KOEFOED, H., Referat MÜNZEL, K., in *Schweiz. ApothZtg*, **92**, 93 (1954). *45)* BEST und TAYLOR, *Physiological Basis of Medical Practice*, 6. Aufl., Baltimore (1950). *46)* WEISBERG, H. F., *Water, Electrolyte and Acid-Base Balance*, Baltimore (1953).

Übersicht gebräuchlicher Infusionslösungen zur parenteralen Wasser- und Elektrolyttherapie †

Vgl. Bemerkungen auf S. 295–297, Literatur siehe oben

Lösung*	Na+		K+		Ca++		Mg++		Cl−		Lactat⁻- oder Bicarbonat⁻- bzw. Ammonium⁺-ionen	Phosphor	Osmolarität (ideal) ***
	mval/l	mg/l	mval/l	mg/l	mval/l	mg/l	mval/l	mg/l	mval/l	mg/l	mval/l	mg/l	mmol/l
A. «Physiologische» Lösungen													
1. Isotonische Kochsalzlösung (0,95%)	162,5	3733							162,5	5767	0		325
2. Isotonische Natriumlactat**-Kochsalz-Lösung: 1 Volumen Natriumlactatlösung (1,75%) + 2 Volumen Kochsalzlösung (0,95%) (Natrium lacticum 5,83 g, Natrium chloratum 6,33 g, Aqua dest. ad 1000 ml)	160,3	3683							108,3	3842	— 52,0		321
3. a) Glucose-Kochsalz-Lösung: 2 Volumen isotonische Glucoselösung (5,25%) + 1 Volumen isotonische Kochsalzlösung (0,95%) (Glycosum 35,0 g, Natrium chloratum 3,16 g, Aqua dest. ad 1000 ml)	54,1	1242							54,1	1918	0		302
b) Glucose-Natriumlactat-Kochsalz-Lösung: 2 Volumen isotonische Glucoselösung (5,25% + 1 Volumen isotonische Natriumlactat-Kochsalz-Lösung (Glycosum 35,0 g, Natrium lacticum 1,94 g, Natrium chloratum 2,11 g, Aqua dest. ad 1000 ml)	53,4	1227							36,1	1290	— 17,3		301
4. RINGERsche Lösung nach BEST und TAYLOR[45] (Natrium chloratum 9,00 g, Kalium chloratum 0,40 g, Calcium chloratum crystallisatum 0,25 g, Natrium bicarbonicum 0,20 g, Aqua dest. ad 1000 ml)	156,4	3592	5,4	210	2,3	46			161,7	5738	— 2,4		324
5. RINGER-Lactat-Lösung nach HARTMANN[7] (Natrium chloratum 6,00 g, Natrium lacticum 3,05 g, Kalium chloratum 0,40 g, Calcium chloratum crystallisatum [6 H_2O] 0,20 g, Magnesium chloratum [6 H_2O] 0,20 g, Aqua dest. ad 1000 ml)	129,8	2983	5,4	210	1,8	37	2,0	24,0	111,8	3967	— 27,2		276
6. Lösung nach Fox et al.[37, 38]. Vorschrift nicht angegeben. Organische Anionen als Lactat und Acetat, insgesamt 55 mval/l	140	3220	10	390	5	100,2	3	36,5	103	3660	— 55		316
B. Lösungen zur Behebung acidotischer bzw. alkalotischer Zustände													
Acidosebehandlung													
1. Isotonische Natriumlactatlösung** (1,75%) (Natrium lacticum 17,5 g, Aqua dest. ad 1000 ml)	156,1	3587									—156,1		312

*, **, *** siehe Fußnoten auf nächster Seite.

† Zusammengestellt von A. F. ESSELLIER und P. JEANNERET, Medizinische Universitätsklinik Zürich (Prof. W. LÖFFLER).

Lösung*	Na+		K+		Ca++		Mg++		Cl⁻		Lactat⁻- oder Bicarbonat⁻- bzw. Ammonium⁺-ionen	Phosphor	Osmolarität (ideal) ***
	mval/l	mg/l	mval/l	mg/l	mval/l	mg/l	mval/l	mg/l	mval/l	mg/l	mval/l	mg/l	mmol/l
Alkalosebehandlung													
2. Isotonische Ammoniumchloridlösung (0,83%) (Ammonium chloratum 8,30 g, Aqua dest. ad 1000 ml)									155,1	5503	+ 155,1		310
C. Lösungen für die Kaliumersatztherapie													
Bei Acidose sowie bei normaler Alkalireserve zu verabreichen													
1. Lösung nach DARROW[6, 12, 31] (Kalium chloratum 2,70 g, Natrium lacticum** 5,80 g, Natrium chloratum 4,00 g, Aqua dest. ad 1000 ml)	120,2	2761	36,2	1417					104,7	3713	— 51,7		313
Beim Kleinkind wird nach DARROW 1 Volumen dieser Lösung mit 2 Volumen isotonischer Glucoselösung infundiert	40,7	920	12,1	472					34,9	1238	— 17,2		mit Glucose 5,25%: 299
2. a) Pädiatrische Lösung nach BUTLER[43] (Kalium chloratum 0,89 g, Kalium phosphoricum bibasicum siccum 0,25 g, Natrium lacticum** 2,24 g, Natrium chloratum 0,58 g, Sol. glycosi 10% ad 1000 ml)	29,9	687	14,8	580					21,9	775	— 20,0	44,5	643
b) Neue pädiatrische Lösung nach BUTLER[9] (Kalium chloratum 1,0 g, Kalium phosphoricum bibasicum siccum 1,0 g, Natrium lacticum 2,8 g, Natrium chloratum 1,8 g, Natrium phosphoricum monobascium [NaH_2PO_4 + 1 H_2O] 0,14 g, $MgCl_2$ 0,25 g, Sol. glycosi 2–10% ad 1000 ml). (Das $MgCl_2$ muß getrennt sterilisiert werden)	56,8	1304	24,9	974			5,3	63,8	49,5	1755	— 25,0	209,4	ohne Glucose 167
3. Lösung nach DAVIDSEN und KJERULF-JENSEN[42] (Kalium chloratum 3,8 g, Natrium phosphoricum monobasicum [$NaH_2PO_4 + 2H_2O$)] 0,3 g, Natrium phosphoricum bibasicum [Na_2HPO_4 + 2 H_2O] 1,2 g, Natrium chloratum 5,4 g, Aqua dest. ad 1000 ml)	107,8	2476	51,0	1995					143,4	5087	0	269	313
4. Lösung nach ELKINTON und TARAIL[31] (Kalium phosphoricum bibasicum siccum 4,5 g, Kalium phosphoricum monobasicum 1,0 g, Natrium chloratum 5,5 g, Aqua dest. ad 1000 ml)	94,1	2162	59,0	2307					94,1	3339	0	1029	288
Bei Alkalose sowie bei normaler Alkalireserve zu verabreichen													
5. Lösung nach DARROW[6] (Kalium chloratum 2,70 g, Natrium chloratum 6,00 g, Aqua dest. ad 1000 ml)	102,6	2358	36,2	1418					138,8	4927	0		278
Beim Kleinkind wird nach DARROW 1 Volumen dieser Lösung mit 2 Volumen isotonischer Glucoselösung verdünnt	34,2	786	12,0	473					46,3	1642	0		mit Glucose 5,25%: 287
6. Lösung nach DAVIDSEN und KJERULF-JENSEN[42] (Kalium chloratum 3,8 g, Natrium phosphoricum monobasicum [$NaH_2PO_4 + 2H_2O$] 0,3 g, Natrium phosphoricum bibasicum [Na_2H $PO_4 + 2 H_2O$] 1,2 g, Natrium lacticum 10,3 g, Aqua dest. ad 1000 ml)	107,3	2465	51,0	1995					51,0	1809	— 91,9	269	312
7. Lösung nach ELKINTON und TARAIL[31] (Kalium chloratum 3,0 g, Natrium chloratum 4,2 g, Kalium phosphoricum bibasicum siccum 3,2 g, Kalium phosphoricum monobasicum 0,7 g, Aqua dest. ad 1000 ml)	71,9	1651	82,1	3213					112,1	3977	0	729,2	295
D. Lösungen zum Ersatz von Sekretflüssigkeiten des Verdauungstraktes													
1. Lösung zum Ersatz von Magensaft[10] (Natrium chloratum 3,70 g, Kalium chloratum 1,30 g, Ammonium chloratum 3,74 g, Aqua dest. ad 1000 ml)	63,3	1454	17,4	683					150,6	5344	+ 69,9		301
2. Lösung zum Ersatz von alkalischen Sekreten (Galle, Pancreas- und Dünndarmsekret)[10] (Natrium lacticum** 5,60 g, Natrium chloratum 5,10 g, Kalium chloratum 0,90 g, Aqua dest. ad 1000 ml)	137,2	3152	12,1	473					99,4	3524	— 50,0		299

* Alle Prozentangaben der Tabelle beziehen sich auf Gramm Substanz in 100 ml Lösung.

** Wenn kein Natriumlactat zur Verfügung steht oder die Verabreichung von Lactat kontraindiziert ist, kann eine frisch zubereitete Natriumbicarbonatlösung verwendet werden: 1 *Trocken*ampulle zu 14 g Natriumbicarbonat, in 1 Liter sterilem destilliertem Wasser frisch gelöst, ergibt eine isotonische Natriumbicarbonatlösung (14 g Natrium bicarbonicum = 167 mval Na, 333 mmol Gesamtkonzentration) (siehe Bemerkungen zu B, S. 296). Für die Zubereitung von Lactatlösungen siehe WALDOE[3].

*** Konzentration aller osmotisch wirksamen Teilchen unter Annahme einer vollständigen Dissoziation der Elektrolyte. (Vgl. S. 287–289.)